XX ENCONTRO BAIANO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA
IX FÓRUM BAIANO DAS LICENCIATURAS EM MATEMÁTICA
ISSN 2175-1668
01 A 04 DE AGOSTO DE 2023
PAULO AFONSO - BA

Modelagem paramétrica como caminho para a mobilização de saberes matemáticos na produção de materiais didáticos palpáveis a mão livre

Eixo Temático 5: Ensino Superior

Autor. Afonso Henriques. Universidade Estadual de Santa Cruz (UESC). E-mail: henry@uesc.br;
Elisângela Silva Farias. Universidade Estadual de Santa Cruz (UESC). E-mail: esfarias@uesc.br;
Liliane Xavier Neves. Universidade Estadual de Santa Cruz (UESC). E-mail: lxneves@uesc.br;
Rosane Leite Funato. Universidade Estadual de Santa Cruz (UESC). E-mail: rlfunato@uesc.br;
Ramon Santos Costa. Universidade Estadual de Santa Cruz (UESC). E-mail: rscosta@uesc.br;

RESUMO
Pretende-se com este curso conduzir os participantes ao acesso de conhecimentos da Modelagem paramétrica capaz de favorecer a mobilização de saberes matemáticos necessários na produção de materiais didáticos manipuláveis na tela de um computador e a mão livre por prototipagem rápida na impressora 3D.

Palavras-chave: Ambiente papel/lápis. Ambiente computacional. Modelagem paramétrica. Software Maple.

INTRODUÇÃO

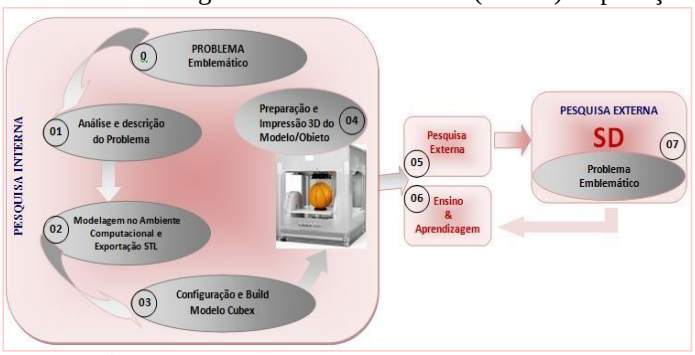
A Modelagem paramétrica é um método propício de tratamento e produção de conhecimento matemático definido por Henriques (2021) como:

> técnica de geração e manipulação de objetos geométricos, como curvas e superfícies em ambiente computacional, e se apoia na conexão destes objetos e suas inter-relações mediadas por parâmetros especificados que podem ser alterados automaticamente pelo ambienteou pelo sujeito em tempo real, sem perda da geometria visada. HENRIQUES (2021, p. 107)

Trata-se, portanto, de um método de alto nível de produção de conhecimentos matemáticos que não se pode reduzir a obtenção imediata de soluções de situações ou problemas em jogo, provocando os sujeitos à reflexão, familiarização e construção de estratégias de geração e manipulação de objetos geométricos inerentes com base na

organização matemática correspondente. Como é sabido, toda e qualquer situação contextualizada ou não, colocada em jogo no trabalho do estudante/aluno está sempre ligada à uma organização de objetos de saberes reconhecidos em uma dada instituição produtora de *logos* que sustentam a existência de uma ou várias soluções desta situação no contexto praxeológico. Isso significa como afirma Chevallard (1992), que um dado objeto do saber só existe se uma pessoa ou uma instituição o reconhece. A contextualização de situações ou tarefas que podem colocar os estudantes/alunos em um espaço de abstração, tratamento e produção de conhecimentos matemáticos tem sido utilizada frequentemente no ensino e na pesquisa em Educação Matemática. Nesta utilização, a Modelagem paramétrica pode ser uma alternativa no direcionamento do estudante/aluno nessa abstração em busca de soluções propícias. Visando, particularmente, a produção de materiais concretos manipuláveis a mão livre, impressos em 3D, também denominados PCOC[1], a Modelagem paramétrica cumpre o Percurso Metodológico do Desenvolvimento de PCOC e aplicação apresentado na Figura 1.

Figura 1: Percurso metodológico do desenvolvimento (PMDP) e aplicação de PCOC



FONTE: (HENRIQUES; FARIAS; FUNATO, 2021, p. 482)

Os autores apresentam a descrição deste percurso que trazemos no Quadro 1.

Quadro 1: Descrição dos elementos que compõem o PMDP

Nível	Nome do nível	Descrição do nível
(00)	Problema emblemático	Caracteriza um tipo de tarefa que aparece em grande número de exemplares em uma dada organização praxeológica de um objeto do saber reconhecida em uma instituição de ensino.
(01)	Análise e descrição do problema	Concepção do problema emblemático visando a modelagem paramétrica do PCOC. Determinação de cálculos preliminares, escolha das variáveis globais e locais e suas dimensões/métricas para o modelo PCOC.
(02)	Modelagem paramétrica no ambiente computacional e exportação stl	Implementação da análise descritiva do problema emblemático no ambiente computacional de produção, visando a impressão 3D do PCOC correspondente. Escolha das variáveis globais e locais. Neste nível ocorre a instrumentação e a instrumentalização do sujeito e do PCOC,

[1] Projetos de Construção de Objetos Concretos.

		respectivamente.
(03)	Configuração e *Build*, Modelo *Cubex*	Neste nível ocorre a configuração do PCOC de extensão stl gerado no ambiente computacional de produção, utilizando a *Cubex 3D Systems* enquanto software intermediário entre a impressora 3D e o ambiente de produção.
(04)	Preparação e Impressão 3D do Modelo/Objeto	Uma vez que o modelo PCOC é devidamente configurado no software intermediário, deve-se preparar a impressora para a impressão do modelo, desde a instalação dos insumos, filamentos em PLA ou ABS, a determinação da temperatura adequada e acompanhamento da impressão do modelo até o fim para retirá-lo da impressora.
(05)	Pesquisa Externa	Utilização do modelo em Pesquisas Externas, na perspectiva de análises a posteriores de práticas institucionais dos alunos em torno dos saberes inerentes ao PCOC impresso.
(06)	Ensino & Aprendizagem	Utilização do modelo no processo ensino-aprendizagem, na perspectiva de sequência de ensino de alunos de uma dada instituição em torno dos saberes inerentes ao PCOC impresso caracterizado no nível zero.
(07)	Pesquisa Externa (Problema Emblemático)	Validação dos resultados da Pesquisa Externa em conformidade com os conhecimentos visados no problema emblemático caracterizado no nível zero.

FONTE: (HENRIQUES; FARIAS; FUNATO, 2021, p. 482)

O minicurso que propomos se restringe ao trabalho a ser desenvolvido pelos participantes nos três primeiros níveis do PMDP, para isso, considera-se como primeira situação elementar o *Problema emblemático* que apresentamos na seção subsequente, para ser implementado em um ambiente computacional. Para isso, elegemos os *softwares Maple* e *GeoGebra*. Não descrevemos esses ambientes aqui, mas as suas potencialidades referentes a gênese instrumental do problema emblemático serão destacadas durante a realização do curso.

UM PROBLEMA EMBLEMÁTICO A CONSIDERAR

Consideramos o problema emblemático elaborado com o seguinte enunciado:

> *Um **ouro** em forma de um **cubo**, aqui denominado **CubodeOuro** deve ser atribuído para **oito** finalistas de uma competição de olimpíadas internacionais realizadas no Brasil, sendo que os **dois primeiros** devem receber uma parte do ouro em forma de um cubo cada, de tamanhos diferentes. Os **três seguintes** (do terceiro ao quinto colocado) devem receber uma parte do ouro em forma de um paralelepípedo cada de **bases iguais a do menor cubo** e alturas iguais a do maior cubo. Os **três últimos** (do sexto ao oitavo colocado) devem receber uma parte do ouro, também em forma de um paralelepípedo cada, de **bases iguais a do maior cubo** e alturas iguaisa do menor cubo. Como proceder para satisfazer a referida atribuição?*

Seguindo as etapas da modelagem paramétrica que envolve o Percurso Metodológico do Desenvolvimento de PCOC, vemos pelo *Nível* (00) que se trata de um problema emblemático elementar, mas que requer do sujeito o desenvolvimento de competências necessárias para a sua realização. Caracteriza-se como um tipo de tarefa que exige basicamente os conceitos de partes e de um todo de uma figura geométrica espacial, conceitos de volume e de relações algébricas referentes à soma ou diferença de cubos.

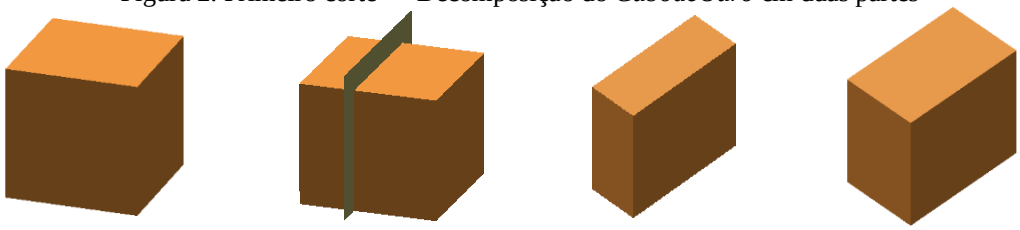
Análise e descrição do problema (Nível (01))

Do ponto de vista geométrico, o problema requer a mobilização de um objeto bem familiar, o *Cubo* que deve ser decomposto em oito partes. Como disposto no enunciado as duas primeiras partes são: dois cubos de tamanhos diferentes. Assim, suponhamos que as arestas do *CubodeOuro* sejam identificadas por *c*. Então o Volume*V* do *CubodeOuro* é representado por $V = c^3$. A decomposição pode ser realizada de várias maneiras possíveis. Dentre elas, podemos proceder como segue:

Primeiro corte possível do CubodeOuro

Dividir a aresta *c* do *CubodeOuro* em duas partes de medidas *a* e *b*, tais que $a<b$. Desta forma tem-se que $c = a + b$. A divisão referente ao primeiro corte se traduz, geometricamente, pelo resultado apresentado na Figura 2(ii) considerando-se assim um plano *p1* paralelo a duas faces $c \times c$ do *CubodeOuro*.

Figura 2: Primeiro corte → Decomposição do *CubodeOuro* em duas partes



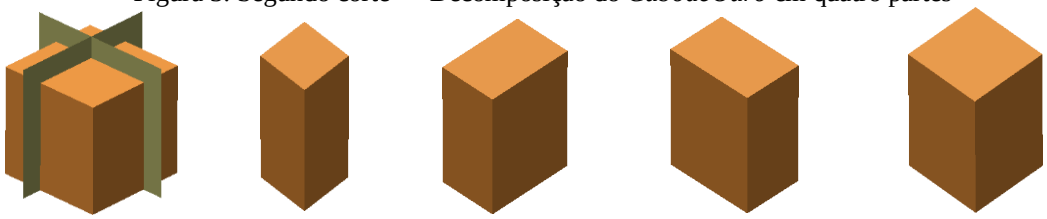
(i) $c \times c \times c$ (ii) $c \times c \times a + c \times c \times b$ (iii) $c \times c \times a$ (iv) $c \times c \times b$

Fonte: produção dos autores

Segundo corte possível do CubodeOuro

De forma análoga considerando, porém, um plano *p2* perpendicular ao primeiro *p1* e secante a duas faces $c \times c$ do *CubodeOuro*, conforme mostrado na Figura 3 (i).

Figura 3: Segundo corte → Decomposição do *CubodeOuro* em quatro partes



(i) $a \times a \times c + 2a \times b \times c + b \times b \times c$ (ii) $a \times a \times c$ (iii) $a \times b \times c$ (iv) $a \times b \times c$ (iv) $a \times a \times b$

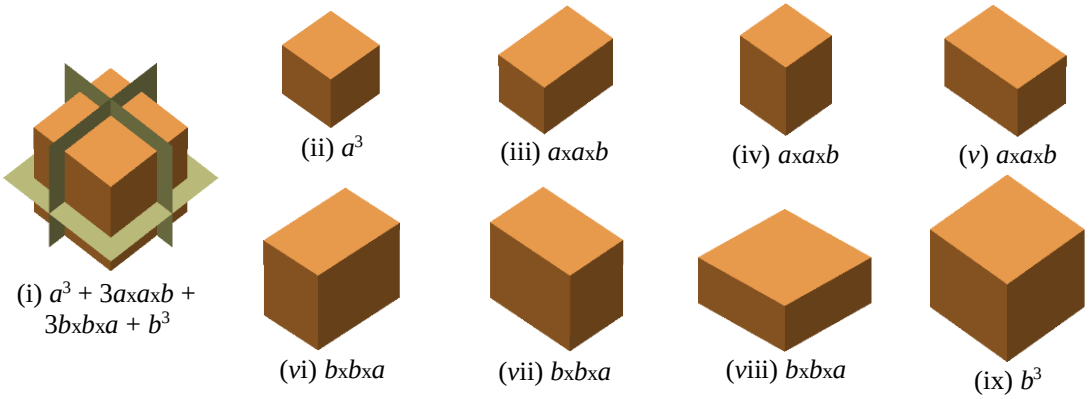
Fonte: produção dos autores

Terceiro corte possível do CubodeOuro

Da mesma forma considerando um plano *p3* perpendicular aos dois primeiros,

secante a duas faces cxc do *CubodeOuro*, conforme mostrado na Figura 3 (i).

Figura 3: Terceiro corte → Decomposição do *CubodeOuro* em oito partes esperadas



Fonte: produção dos autores

Do ponto de vista da Abordagem Instrumental (RABARDEL, 1995; HENRIQUES, 2021), a decomposição requer uma ergonomia cognitiva de figuras geométricas capaz de favorecer a aquisição das partes requeridas cuja união constitui a unidade, em particular o *CubodeOuro*. Nesta perspectiva, a questão que emerge é: *Qual é a gênese instrumental que o sujeito/estudante/aluno deve mobilizar para satisfazer a atribuição considerada na situação-problema* utilizando um ambiente computacional como artefato*?* Elegendo o *software Maple* como artefato, e conforme sublinhado anteriormente, em outros termos, a construção do instrumento durante a *gênese instrumental* em torno desta situação ou tarefa pode ocorrer de diversas formas, isto é, diferentes esquemas podem ser organizados para se alcançar o resultado apresentado na Figura 4.

Além disso, do ponto de vista algébrico vimos que se as arestas do *CubodeOuro* são identificadas por c, então o Volume V do *CubodeOuro* é representado por $V = c^3$, e fazendo $c = a + b$, para $a<b$, verifica-se que $c^3 = (a + b)^3$ ou equivalentemente:

$(a + b)^3 = a^3 + 3a$xax$b + 3b$xbx$a + b^3$. (confere Figura 3 (i))

Concluíndo-se, portanto que:

$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3b^2a + b^3$

Com efeito, podemos estabelecer a seguinte conjectura:

O cubo da soma (**a + b**) *é igual ao cubo de lado* **a**, *mais três vezes o quadrado de* **a** *vezes* **b**, *mais três vezes o quadrado* **b** *vezes* **a**, *mais o cubo de lado* **b**.

Retomando a descrição do problema podemos estabelecer as seguintes relações:

- *cubo de lado* **a** → *ouro do primeiro colocado*;
- *cubo de lado* **b** → *ouro do primeiro colocado*;

- *três vezes o quadrado de* ***a*** *vezes* ***b*** *→ ouro do terceiro ao quinto colocado;*
- *três vezes o quadrado de* ***b*** *vezes* ***a*** *→ ouro do sexto ao oitavo colocado.*

Os participantes serão, portanto, desafiados pelo problema, e veremos quanto tempo levarão na fase (01) de concepção para estabelecerem estratégias eficazes de abordá-lo visando a modelagem paramétrica do PCOC no ambiente computacional.

Modelagem paramétrica no ambiente computacional (Nível (02))

A construção do instrumento durante a *gênese instrumental* em torno da situação em questão pode ocorrer de diversas formas. Assim, seguindo os cortes considerados no nível (01) podemos organizar a modelagem paramétrica em *blocos de execução* mobilizando esquemas de utilização do *software Maple* enquanto artefato. Nessa organização deve-se definir ou escolher as variáveis globais e locais da situação. Para isso, consideramos as seguintes escolhas para variáveis globais:

```
Fator:=10:
a:=2*Fator: # a é uma variável didática que assume o valor 2
b:=3*Fator: # b é uma variável didática que assume o valor 2;
c:=5*Fator: # c é uma variável didática que assume o valor 2;
pc1:=a: # pc1 é o plano do primeiro corte do CubodeOuro;
pc2:=a: # pc2 é o plano do segundo corte do CubodeOuro;
pc3:=a: # pc3 é o plano do terceiro corte do CubodeOuro;
# x, y e z são variáveis matemáticas referentes ao espaço tridimensional do modelo PCOC.
```

Com estas escolhas percebe-se, portanto, que o *CubodeOuro* é um modelo PCOC cujas arestas medem 5 unidades de comprimento. A implementação de todos os cortes deste modelo descritos no nível (01) bem como das respectivas partes, utiliza as ferramentas *with*, *plot3d* e *display* do *Maple* com as seguintes sintaxes: *with*(*plots*), *plot3d*(*[X(u,v), Y(u,v), Z(u,v)], u=ui..uf, v=vi..vf, <opções>*) e *display*(*Vl1, Vl2,...,Vln*) respectivamente, em que *Vln* indica as *n* variáveis locais de cada bloca de execução.

O primeiro bloco de execução a ser implementado durante o curso utiliza duas variáveis locais e três instruções fornecidas ao *Maple* cujo resultado é encontrado na Figura 2 (ii). A execução de cada instrução implementada no *Maple* é feita apertando-se a tecla "*Enter*" do teclado ou aplicando-se um *clique* sobre a ferramenta ! do *Maple*. O pacote (*plots*) é carregado, de preferência, em conjunto com as variáveis globais.

Bloco1: Primeiro corte possível do CubodeOuro

```
# CuboOuro: variável local que estoca o CuboOuro;
# PlanoCorte1: variável local que estoca o crivo do primeiro plano de corte.
CuboOuro:= plot3d({[0, x, y], [c, x, y], [x, 0, y], [x, c, y], [x, y, 0], [x, y, c]}, x = 0 .. c, y = 0 .. c, color = gold);
PlanoCorte1:= plot3d([x, pc1, z], x = -1 .. c+Fator, z = 0 .. c+Fator, color = khaki);
```

display(CuboOuro, PlanoCorte1);

Como descrito no nível (01) este corte deve produzir duas partes do *CubodeOuro* cuja a implementação da modelagem paramétrica correspondente utilizaas seguintes instruções fornecidas ao *Maple*:

Bloco2: Parte 1 do Primeiro corte

```
# Parte1pcx: variável local que estoca dois crivos de planos paralelos ao plano_yz restritos a parte 1.
# Parte1pcy: variável local que estoca dois crivos de planos paralelos ao plano_xz restritos a parte 1.
# Parte1pcz: variável local que estoca dois crivos de planos paralelos ao plano_xy restritos a parte 1.
Parte1pcx := plot3d({[0, y, z], [c, y, z]}, y = 0 .. a, z = 0 .. c, color = gold);
Parte1pcy := plot3d({[x, 0, z], [x, a, z]}, x = 0 .. c, z = 0 .. c, color = gold);
Parte1pcz := plot3d({[x, y, 0], [x, y, c]}, x = 0 .. 5, y = 0 .. a, color = gold);
display(Parte1pcx, Parte1pcy, Parte1pcz);
```

Bloco3: Parte 2 do Primeiro corte

```
# Parte2pcx: variável local que estoca dois crivos de planos paralelos ao plano_yz restritos a parte 2.
# Parte2pcy: variável local que estoca dois crivos de planos paralelos ao plano_xz restritos a parte 2.
# Parte2pcz: variável local que estoca dois crivos de planos paralelos ao plano_xy restritos a parte 2.
Parte2pcx := plot3d({[0, y, z], [c, y, z]}, y = a .. c, z = 0 .. c, color = gold);
Parte2pcy := plot3d({[x, a, z], [x, c, z]}, x = 0 .. c, z = 0 .. c, color = gold);
Parte2pcz := plot3d({[x, y, 0], [x, y, c]}, x = 0 .. c, y = a .. c, color = gold);
display(Parte2pcx, Parte2pcy, Parte2pcz);
```

A execução do segundo e do terceiro bloco retorna o resultado apresentado na Figura 2 (iii) e (iv) respectivamente, decompondo assim o *CubodeOuro* em duas partes. A implementação da modelagem paramétrica correspondente as partes apresentadas nas Figuras 3 e 4 é desenvolvida de forma análoga a construção do instrumento alcançada no Bloco2 e no Bloco3 de execução, mobilizando-se, porém a geometria tridimensional de cada crivo restrito associado a cada parte do *CubodeOuro* esperado. Esse trabalho deve ser realizado pelos participantes deste minicurso, antes de entrar no terceiro nível do Percurso Metodológico do Desenvolvimento de PCOC que consiste na:

Configuração e Build, Modelo Cubex (Nível (03))

Como descrito no Quadro 1, neste nível ocorre a configuração do modelo PCOC de extensão stl gerado no ambiente computacional de produção, neste caso o *software Maple*, utilizando a Cubex 3D Systems enquanto *software* intermediário entre a impressora 3D e o ambiente de produção (*Maple*). Trata-se, portanto, de um conhecimento que deve ser adquirido pelos participantes durante o desenvolvimento do curso, sendo a parte que consistirá no encerramento deste trabalho, esperando-se que haja um bom aproveitamento dos participantes no âmbito de produção de materiais didáticos a partir da análise de uma situação problema contextualizada.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

É consenso que a utilização de tecnologia na produção de materiais didáticos palpáveis a mão livre, a exemplo dos PCOC é uma alternativa saudável no fomento do processo ensino-aprendizagem, não apenas da Matemática, mas também de outras áreas de formação de recursos humanos. A situação problema contextualizada neste minicurso, permite estabelecer uma discussão no ensino da Matemática em diversos níveis da Educação, agregando diferentes temas, tais como a Geometria Espacial, Geometria Analítica, Produtos notáveis em Álgebra, entre outros. Assim, esperamosque este minicurso seja de interesse da comunidade da Educação Matemática e que venha contribuir de alguma forma na aquisição de conhecimentos dos participantes.

REFERÊNCIAS

CHEVALLARD, Y. Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique. **Recherches en Didactique des Mathématiques**, v. 12, n°1, p. 73-112, 1992. Disponível em: https://revue-rdm.com/1992/concepts-fondamentaux-de-la-didactique/. Acessado em 11/07/2023

HENRIQUES, Afonso. Abordagem Instrumental e aplicações. **Educação Matemática Pesquisa**: Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática, [S.L.], v. 23, n. 3, p. 247-280, 27 dez. 2021. Pontifical Catholic University of Sao Paulo (PUC-SP). Disponível em http://dx.doi.org/10.23925/1983-3156.2021v23i3p247-280. Acessado em: 11/07/2023.

HENRIQUES, A. FARIAS, E. S.; FUNATO, R. L. Exposição do Laboratório de Visualização Matemática da UESC e o papel da Impressora 3D na produção de Recursos Didáticos. In. **Educação Matemática em Pesquisa Perspectivas e Tendências** - Volume 2. Editora Científica digital. V. 2. p. 478-493, 2021. Disponível em: https://www.editoracientifica.com.br/livros/livro-educacao-matematica-em-pesquisa-perspectivas-e-tendencias-volume-2. Acessado em: 11/07/2023.

HENRIQUES, A. **Introdução ao Maple enquanto sistema de computação algébrica & gestão de códigos para impressora 3D**. Editus 2021.

RABARDEL P. **Les Hommes et les Technologies**: Approche cognitive des instruments contemporains. Armand Colin Editeur, Paris, 1995. Disponível em https://hal.science/hal-01017462. Acessado em 11/07/2023.