

SEQUÊNCIA DIDÁTICA: SUBTRAÇÃO DE NÚMEROS INTEIROS POR MEIO DE GRAFOS CORDIAIS

Eixo Temático: Ensino e Aprendizagem de Matemática na Educação Básica.

Caroline dos Santos Lima. Universidade Estadual de Feira de Santana.

cslimasantos777@gmail.com.

Marcos Grilo. Universidade Estadual de Feira de Santana. grilo@uefs.br.

RESUMO

Neste trabalho propomos uma sequência didática para o ensino de subtração de números inteiros por meio de materiais manipuláveis baseados em grafos cordiais. Um grafo é cordial se for possível rotular cada um de seus vértices com o número zero ou número um de tal maneira que: o peso de uma aresta é definido pelo módulo da diferença entre os rótulos dos vértices nos quais ela incide; o módulo da diferença entre a quantidade de vértices rotulados com uns e zeros é no máximo 1; o módulo da diferença entre a quantidade de arestas rotuladas com uns e zeros é no máximo 1. Esperamos, por meio dessa sequência didática, contribuir com uma abordagem que auxilie professores no ensino de números negativos, relação de ordem, módulo de um número inteiro e princípios de Lógica Matemática.

Palavras-chave: Subtração. Números Inteiros. Grafos Cordiais.

INTRODUÇÃO

Números inteiros é um tema que integra diversos conteúdos pertinentes aos currículos do Ensino Fundamental. São notórias as dificuldades enfrentadas por estudantes da Educação Básica quanto à compreensão e interpretação do conjunto dos números inteiros (\mathbb{Z}), principalmente quando se trata da subtração de números inteiros. Campbell e Zaskis (2002) ressaltam a necessidade de mais pesquisas sobre o ensino de números inteiros.

Segundo Mariano e Matos (2013, p. 6), o professor precisa trabalhar o conceito do número negativo paralelamente ao desenvolvimento da abstração matemática. Resende (2007) afirma que o estudo dos números inteiros propicia o desenvolvimento de ideias matemáticas importantes, como a divisibilidade, números primos e outros temas relacionados.

Por outro lado, grafos podem ser usados no desenvolvimento de tarefas voltadas para o ensino de conteúdos de Matemática na Educação Básica. Santana e Grilo (2019) aplicaram uma atividade para estudar grafos a partir de letras de músicas na Educação Básica. Considerando a preferência musical dos estudantes, Santana e Grilo (2019) aplicaram a atividade em uma turma do 2º ano do Ensino Médio. Antunes et al. (2021) desenvolveram uma tarefa investigativa baseada em grafos para avaliar possíveis impactos da volta das aulas presenciais sem um controle efetivo da pandemia do novo coronavírus. Os autores elaboraram a tarefa seguindo os passos do ciclo de aprendizagem de Roger Bybbe (2006): Envolvimento, Exploração, Explicação, Elaboração e Avaliação.

O conceito de grafo cordial contém ideias de conteúdos matemáticos como operações com números inteiros, módulo, relação de ordem e princípios da Lógica Matemática. Dessa forma, o objetivo deste trabalho é propor uma sequência didática voltada para o ensino de subtração de números inteiros utilizando materiais manipuláveis baseados no conceito de grafos cordiais.

NÚMEROS INTEIROS: SUBTRAÇÃO COM NÚMEROS INTEIROS

Resende (2007) define tópicos essenciais para o ensino da Teoria Elementar dos Números na formação inicial de professores de Matemática:

Números Inteiros: evolução histórica e epistemológica do conceito de números naturais e inteiros; representações dos números naturais, operações, algoritmos e propriedades, definição por recorrência Teoria Elementar dos Números é a parte da Teoria dos Números voltada aos estudos dos números (potências em \mathbb{N} , seqüências, progressões aritméticas e geométricas) e princípio da indução finita; Divisibilidade:

algoritmo da divisão, máximo divisor comum, mínimo múltiplo comum, algoritmo de Euclides, números primos, critérios de divisibilidade, o Teorema Fundamental da Aritmética; Introdução à congruência módulo m : definições, propriedades e algumas aplicações; Equações Diofantinas lineares. (RESENDE, 2007, p.228)

A capacidade de operar com números naturais pode ser construída a partir de conceitos que contemplem noções de correspondência, ordenamento, completamento, composição e reversão. A construção dos números naturais pode pressupor um domínio. Segundo Teixeira (1993), a "construção do conceito de números inteiros, do ponto de vista matemático, é uma ampliação dos naturais, sendo desta perspectiva necessário demonstrar que as leis do sistema de numeração mantêm-se sendo cumpridas".

Glaeser (1985) aponta que a construção formal dos números inteiros levou vários séculos. Atualmente, uma construção formal do conjunto dos números naturais para os inteiros presente nos currículos dos cursos de Licenciatura fundamenta-se na construção do conjunto quociente $N \times N / \sim$, onde a relação de equivalência é definida da seguinte forma: dados (a, b) e (c, d) em $N \times N$, $(a, b) \sim (c, d)$ se, e somente se, $a + d = b + c$. Desta forma, tem-se classes de equivalências \overline{ab} que significam basicamente o seguinte: todas as subtrações iguais a $a - b$ são representadas pela classe de equivalência \overline{ab} . Desta forma, se $a > b$, tem-se números positivos, se $a = b$, tem-se o zero e se $a < b$, tem-se números negativos.

Dessa maneira, pode-se notar que a fundamentação teórica dos números inteiros perpassa por uma compreensão e interpretação mais abstrata. Os primeiros contatos de estudantes da Educação Básica com os números inteiros geralmente ocorrem após algum contato com situações reais que envolvem números negativos. Por exemplo, números negativos podem aparecer em uma tabela que indica o saldo de gols de um campeonato de futebol ou no registro de temperaturas de uma cidade/região.

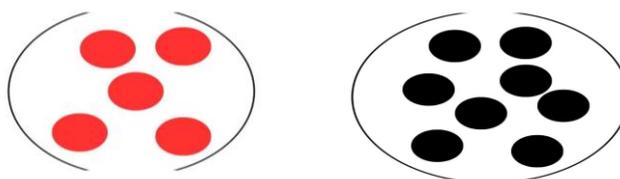
Desse modo, ainda é possível utilizar situações reais voltadas ao cotidiano para a interpretação de números negativos. O que sabemos sobre adição e subtração de números inteiros segue a ideia de juntar e retirar. Desse modo, é importante expandir o que

conhecemos acerca da interpretação da adição com números negativos. Pires, Curi e Campos (2001) afirmam que a “adição de um número negativo significa o mesmo que a subtração do correspondente número positivo; e a subtração de um número negativo, o mesmo que a adição de um número positivo” (PIRES, CURI; CAMPOS, 2001, p. 35). De fato, a subtração entre dois números inteiros a e b é uma adição entre o número inteiro a e o simétrico de b : $a-b = a+(-b)$, onde o sinal - representa a operação de subtração e o simétrico de um número. O mesmo sinal - também é utilizado para representar um número negativo. No conjunto dos números inteiros, o zero pode ter duas interpretações. Na primeira, o zero representa ausência de quantidade: $a-a = 0$. Nas operações com números inteiros, o zero é o elemento neutro da adição: $a + 0 = a$.

Van de Walle (2009) apresenta um modelo de operações com inteiros que consiste em contadores de duas cores diferentes, conforme Figura 2. Por exemplo, supõe-se um contador vermelho para os números positivos e um contador preto para os negativos. Van de Walle (2009) ressalta ainda que “é importante que os alunos compreendam que é sempre possível adicionar ou remover de uma pilha qualquer número de pares numéricos constituindo de um contador positivo e um negativo sem mudar o valor da pilha”.

Algumas estratégias podem auxiliar o ensino da adição. Segundo, Van de Walle (2003), o uso de cores para diferenciar os sinais de “+” e “-”. Os conjuntos de bolinhas na Figura 1 representam os números 5 e -8, respectivamente, com as cores vermelha e preta. Essas coleções contendo bolinhas podem dar significado à adição de números inteiros por meio de um procedimento que inicialmente une os conjuntos. Em seguida, exclui-se cada par de bolas composto por uma vermelha e uma preta.

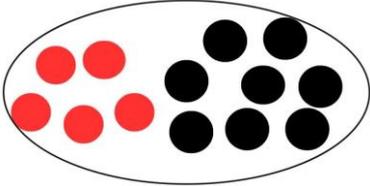
Figura 1: Representação dos números inteiros 5, com bolas vermelhas e -8, com bolas pretas.



Fonte: Os autores (2023).

Após a representação dos números 5 e -8, conforme Figura 1, efetuamos o cálculo de $5 + (-8)$, inicialmente, realizando a união dessas bolinhas conforme Figura 2:

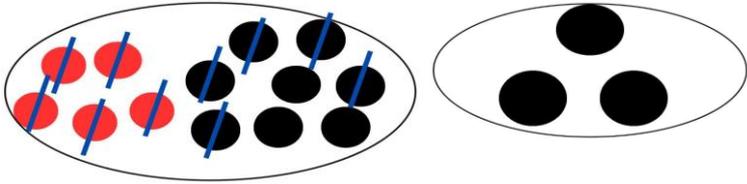
Figura 2: Representação da união entre os conjuntos com 5 bolas vermelhas e 8 bolas pretas.



Fonte: Os autores (2023).

Conforme Figura 3, elimina-se os pares compostos por uma bola vermelha e por uma preta, O resultado da operação, -3, é representado por 3 bolinhas pretas:

Figura 3: Subtração de números inteiros por meio de bolinhas.



Fonte: Os autores (2023).

Desta forma, percebemos como é possível trabalhar com a subtração de inteiros por meio da propriedade de existência de elemento simétrico. Veremos que a definição de grafos cordiais é uma possibilidade de aplicarmos a proposta de Van de Walle (2003) para o ensino de subtração de números inteiros por meio de materiais manipuláveis.

GRAFO CORDIAL

Um grafo é uma estrutura matemática constituída de vértices e arestas. Cada aresta de um grafo está associada a um par de vértices. Um grafo é rotulado se cada vértice possui um rótulo, podendo ser uma sequência de letras ou algarismos. Um grafo é

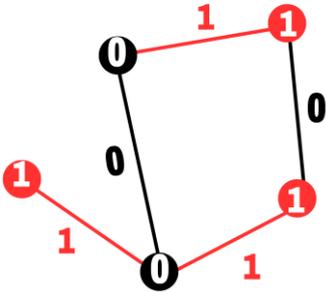
ponderado se para cada aresta atribui-se um peso. Se cada aresta de um grafo possuir uma direção, diz-se que o grafo é dirigido. Nesta proposta, trataremos de grafos não dirigidos.

Seja G um grafo não dirigido formado por um conjunto de vértices V e um conjunto de arestas E . Suponha que para cada vértice de G seja atribuído o rótulo 0 ou 1. O peso de cada aresta é definido como o módulo da diferença dos rótulos de seus vértices incidentes. Seja f uma função que conta a quantidade de 0 e 1 nos conjuntos V e E . Um grafo é cordial se: 1) o módulo da diferença da quantidade de 0 e 1 em $V(G)$ é no máximo igual a 1; o módulo da diferença da quantidade de 0 e 1 em $E(G)$ é no máximo igual a 1. De outro modo, um grafo é cordial se:

$$|f(V,1)-f(V,0)|\leq 1 \text{ e } |f(E,1)-f(E,0)|\leq 1$$

onde $f(V, 0)$ e $f(V, 1)$ representam, respectivamente, a quantidade de 0 e 1 nos vértices, e $f(E, 0)$, $f(E, 1)$, a quantidade 0 e 1 nas arestas. A Figura 4 mostra um exemplo de grafo cordial. A Tabela 1 mostra os cálculos que verificam a condição do grafo da Figura 4 ser cordial.

Figura 4: Número de vértices e arestas.



Fonte: Os autores (2023).

Tabela 1. Verificação da condição do grafo da Figura 4 ser cordial.

	$f(X, 1)$	$f(X,0)$	$ f(X, 1)-f(X,0) $
Vértices ($X = V$)	3	2	1
Arestas ($X = E$)	3	2	1

SEQUÊNCIA DIDÁTICA: SUBTRAÇÃO DE NÚMEROS INTEIROS POR MEIO DE GRAFOS CORDIAIS

Ensinar Matemática com o auxílio de materiais concretos, constitui em uma estratégia de aprendizagem fácil e significativa. Segundo Novello et al. (2009, p. 4-5):

O conhecimento sobre os materiais como recursos de ensino e possibilitadores de ensino-aprendizagem podem promover um aprender significativo no qual o aluno pode ser estimulado a raciocinar, incorporar soluções alternativas, acerca dos conceitos envolvidos nas situações e, conseqüentemente, aprender. A Matemática a partir da utilização de material concreto torna as aulas mais interativas, assim como incentiva a busca, o interesse, a curiosidade e o espírito de investigação; instigando-os na elaboração de perguntas, desvelamento de relações, criação de hipóteses e a descoberta das próprias soluções. Utilizar o material concreto por si só, não garante aprendizagem, é fundamental o papel do professor nesse processo, enquanto mediador da ação e articulador das situações experienciadas no material concreto e os conceitos matemáticos, para uma posterior abstração e sistematização.

Apresentaremos uma sequência didática para o ensino da subtração de números inteiros por meio de grafos cordiais utilizando materiais concretos. Para Zabala (1998, p.18) sequência didática é “um conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais, que têm um princípio e um fim conhecido tanto pelos professores como pelos alunos”. Conforme Zabala (1998,64-66), uma sequência didática consiste de conhecimentos prévios, significância, desenvolvimento, conflito cognitivo, auto-estima e aprender a aprender.

Zabala (1998, p. 54) também afirma que “a opção da sequência se justifica se, levamos em conta a importância da definição dos conteúdos de aprendizagem e o papel das atividades que se propõem”. Baseado em Zabala (1998), a nossa proposta de sequência didática está organizada nas seguintes etapas: 1) Apresentação de uma situação

problema envolvendo bolas e palitos de duas cores; 2) Respostas intuitivas ou suposições; 3) Sistema operatório de adição e subtração de números inteiros; 4) Conceito de grafo cordial; 5) Aplicação do conceito de grafo cordial no ensino de subtração de números inteiros; 6) Conclusões.

No primeiro momento, apresentamos na Tabela 2, a primeira atividade desenvolvida com palitos e bolas, ambas com duas cores. O objetivo é desenvolver o raciocínio lógico para efetuar os cálculos de adição e subtração de números inteiros, de forma que a manipulação desses objetos concretos auxiliem na interpretação e compreensão das operações e do zero.

Tabela 2. Plano de aula 1

PRIMEIRA AULA

Duração da aula: 50 minutos

Objetivos:

Reconhecer, interpretar e fazer operações de subtração de números inteiros.

Conteúdo:

Subtração de números inteiros

Metodologia:

Nessa primeira aula, propomos que o professor introduza de forma investigativa, a operação de subtração utilizando bolas de isopor e palitos, ambos pintados com duas cores. Espera-se que os discentes consigam construir a ideia de representar os números inteiros positivos, negativos e do zero por meio de bolinhas e a forma de realizar a subtração em \mathbb{Z} .

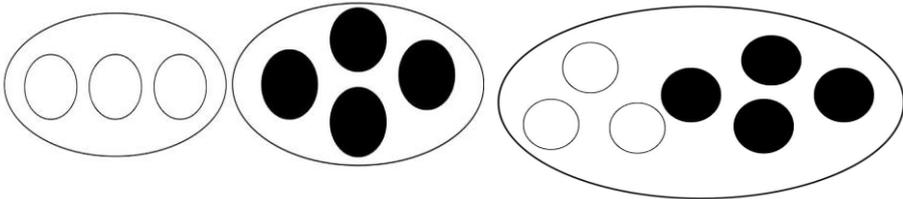
Recursos:

Palitos e bolas de isopor.

Avaliação: Participação em sala de aula.

Baseando nisso, utilizaremos um conjunto de bolas de isopor e palitos. As bolas de isopor de cor preta representam os vértices com rótulo 1 e as brancas, com rótulo 0. Os palitos de cor preta representam as arestas com peso igual a 1 e as de cor branca, com rótulo 0. Pediremos aos alunos que realizem a operação de adição de números inteiros positivos utilizando bolas de isopor de cor preta. Em seguida, propomos aos alunos que realizem operações de subtração de números inteiros com bolas de isopor com cores distintas. A Figura 5 ilustra a atividade:

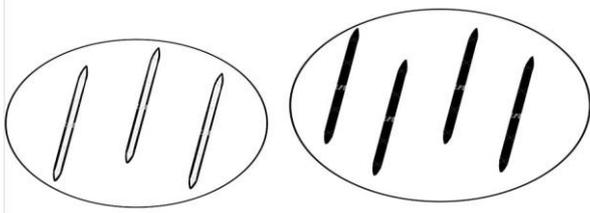
Figura 5: Adição de números inteiros. Em a), dois conjuntos com 3 vértices com rótulo 1 e 4 vértices com rótulo 0. Em b), o resultado da subtração entre 3 e 4.



Fonte: Os autores (2023).

Considerando representar utilizando os Números Inteiros positivos e negativos, como por exemplo 3 e -4. Para isso, iremos utilizar palitos de cor branca representando números positivos e palitos de cor preta representando os números negativos, como demonstra na Figura 6 abaixo:

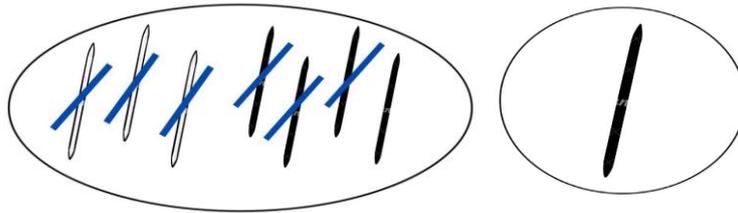
Figura 6: Representação 3 e -4.



Fonte: Os autores (2023).

Note que os palitos de cores distintas 3 brancos e 4 pretos, correspondem a operação $3+(-4)=-1$. A quantidade de palitos que restaram após o processo de eliminação é o resultado da operação, conforme Figura 7:

Figura 7: Subtração entre 3 e 4, tendo como resultado, -1.



Fonte: Os autores (2023).

Após trabalhar diversas situações, os alunos devem ser estimulados a elaborar generalizações acerca dos procedimentos realizados de modo que possam efetuar a subtração de números inteiros sem o auxílio de bolinhas e palitos coloridos. O segundo momento é descrito na Tabela 3:

Tabela 3: Plano de aula 2

SEGUNDA AULA

Duração da aula: 50 minutos

Objetivos:

Compreender e reconhecer quando um grafo pode ser cordial.

Conteúdo:

Conceito de grafo cordial

Metodologia:

Nessa segunda aula, o professor deve explicar o conceito de grafo cordial, usando palitos e bolinhas de isopor. O professor deve estimular os alunos a construírem grafos cordiais.

Recursos:

Palitos e bolas de isopor.

Avaliação: Participação em sala de aula.

Na segunda aula, o professor deve explicar aos alunos o conceito de grafo cordial utilizando os palitos e bolas de isopor da aula anterior. O professor introduz o conceito de grafo nominando as bolas de isopor de vértices e os palitos de arestas. As bolinhas de cor preta possuem rótulo 1 e os de cor branca, 0. Analogamente, estabelece-se que as arestas de cor preta possuem peso 1 e as de cor branca, peso 0. Espera-se que os alunos possam construir grafos cordiais por meio de materiais concretos, exercitando a operação de subtração de números inteiros. Os estudantes devem ser estimulados a construir grafos cordiais de forma empírica. Em seguida, podem ser convidados a encontrar condições para a construção de um grafo cordial.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A presente pesquisa trata do uso de materiais manipuláveis baseados em grafos cordiais como estratégia metodológica para o ensino de subtração de números inteiros. Compreendemos que é possível propor situações em que o aluno consiga interpretar e realizar a subtração com números negativos por meio do conceito de grafos cordiais. O professor pode trabalhar as propriedades aritméticas da adição que envolvem números negativos uma vez que os alunos podem identificar padrões a partir da manipulação de materiais concretos.

Tendo em vista que trabalhar operações com números inteiros em sala de aula é cercado por dificuldades, devido, dentre outras coisas, ao nível de abstração acerca da compreensão de um número negativo, aprender por meio de materiais manipuláveis pode estimular a aprendizagem do aluno. Nessa sequência didática, os alunos devem ser estimulados a investigar problemas, construindo conhecimento acerca do conteúdo explorado por meio de discussões, tentativas, exemplos, contra-exemplos, identificação

XX ENCONTRO BAIANO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA
IX FÓRUM BAIANO DAS LICENCIATURAS EM MATEMÁTICA

01 A 04 DE AGOSTO DE 2023
PAULO AFONSO - BA

de padrões, dentre outras coisas. Espera-se que a partir da socialização dos resultados obtidos, os alunos possam formular afirmações que contenham verdades matemáticas. Espera-se também que os alunos possam refletir acerca do processo de desenvolvimento de um modelo matemático para ser aplicado na solução de um problema.

REFERÊNCIAS

ANTUNES, Danielle Morais da Silva; OLIVEIRA, Antônio Carlos Bispo de; ARAÚJO, Maria de Lourdes Haywanon Santos; GRILO, Marcos; GRILO, Jaqueline de Souza Pereira. Uso de grafos na análise do impacto da volta às aulas: uma tarefa investigativa para a Educação Básica. **Educação Matemática em Revista**, v. 26, n. 70, p. 62-75, 2021.

BYBEE, Rodger W.; TAYLOR, Joseph A.; GARDNER, April; SCOTTER, Pamela Van; POWELL, Janet Carlson; WESTBROOK, Anne; LANDES, Nancy. The BSCS 5E instructional model: Origins and effectiveness. **Colorado Springs, Co: BSCS**, v. 5, n. 88-98, 2006.

CAMPBELL, Stephen R.; ZAZKIS, Rina (Ed). Learning and teaching number theory: Research in cognition and instruction. In: CAMPBELL, Stephen R; ZAZKIS, Rina (Ed.). **Toward Number Theory as a conceptual field**. Westport, CT: Ablex, 2002.

LAESER, G. . Epistemologia Dos Números Relativos. **Boletim GEPEM**, [S. l.], n. 57, 2010. Disponível em: < <https://periodicos.ufrj.br/index.php/gepem/article/view/302> >. Acesso em: 16 mai. 2023.

CAHIT, Ibrahim. Cordial Graphs: A weaker version of graceful and harmonious graphs. **Ars Combinatoria**, vol. 23, pp. 201-207, 1987.

MARIANO, Adolfo César Souza; MATOS, Fábio Alexandre. **O Ensino de Números Inteiros no Ensino Fundamental**. 2013. 19 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Mestrado)- Mestrado Profissional em Matemática Em Rede Nacional (PROFMAT), Universidade Federal de São João del-Rei , São João Del-Rei, 2013.

NOVELLO, Tanise Paula; SILVEIRA, Daniel da Silva; LUZ, Vanessa Silva da; COPELLO, Gláucia Brasil; LAURINO, Débora Pereira. Material Concreto: Uma Estratégia Pedagógica Para Trabalhar Conceitos Matemáticos. In: **IX Congresso Nacional de Educação – EDUCERE, III Encontro Sul Brasileiro de Psicopedagogia**. Rio Grande do Sul. 2009. Disponível em: < <https://repositorio.furg.br/bitstream/handle/1/1014/material%20concreto.pdf?sequence=1> > Acesso em: ago. 2017.

XX ENCONTRO BAIANO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA
IX FÓRUM BAIANO DAS LICENCIATURAS EM MATEMÁTICA

01 A 04 DE AGOSTO DE 2023
PAULO AFONSO - BA

PIRES, C. M. C; CURTI, E; CAMPOS, M. M. Transformando a prática das aulas de matemática. **São Paulo: PROEM**, 2001.

RESENDE, Marilene Ribeiro. **Re-significando a disciplina Teoria dos Números na formação do professor de Matemática na Licenciatura**. 2007. 281 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo-SP, São Paulo, 2007.

SANTANA, L. R., GRILO, M. Uma estratégia de ensino de grafos baseada em letras de músicas. In: Encontro Baiano de Educação Matemática, XVIII., 2019, Ilhéus. **Encontro Baiano de Educação Matemática: A sala de aula de Matemática e suas vertentes**, Ilhéus, BA, 2019.

TEIXEIRA, L. R. M. Aprendizagem operatória de números inteiro: obstáculos de dificuldades. **Pro-Posições**, Campinas, SP, v. 4, n. 1, p. 60–72, 2016.

VAN DE WALLE, John A. **Matemática no Ensino Fundamental: formação de professores e aplicação em sala de aula**. 6. ed. Porto Alegre: Artmed, 2009.

ZABALA, A. **A prática educativa: como ensinar**. Porto Alegre: ArtMed, 1998.