DANDO SIGNIFICADO ÀS DEMONSTRAÇÕES NA FORMAÇÃO INICIAL DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA

Eixo Temático: Ensino e Aprendizagem de Matemática no Ensino Superior

Lúcio dos Santos Roza. Universidade Estadual de Feira de Santana.
lucioroza10@gmail.com
Carlos Henrique da Silva Soares. Universidade Estadual de Feira de Santana.
henriquecarlos.7k@gmail.com

RESUMO
Nesse estudo discutimos o tema demonstrações matemáticas, propondo o uso da História da Matemática como forma de dar significado ao estudo das demonstrações em cursos de Licenciatura em Matemática. Apresentamos e fundamentamos nossa compreensão de que re-demonstrar resultados matemáticos é uma forma de elucidar tais entendimentos, além de ser uma forma de produzir matemática, propondo um reforço da confiança nos resultados, na estrutura e na coerência da própria Matemática. Compreendemos que na formação do professor, a atividade de re-demonstrar é importante e evidenciamos a pertinência de serem utilizadas na formação visando a aprendizagem dos licenciando em cursos de formação de professores de matemática.

Palavras-chave: Demonstrações Matemáticas. História da Matemática. Ensino Superior.

INTRODUÇÃO

A discussão sobre o papel de realizar e entender demonstrações em cursos de formação de professores de matemática parece não ser nova. Como o futuro professor poderá dar significado às demonstrações matemáticas, se estas se dispõem somente enquanto formulações algébricas sem expor relações e correlações históricas? Terá consequência importante compreender as demonstrações de uma perspectiva histórica?

Ao que tudo indica esses dois eixos de discussão – a formação de professores com somente um viés algébrico sobre as demonstrações e a História da Matemática como recurso para compreender as demonstrações e os seus percursos – tem ganhado espaço e tem-se produzido análises conjuntas a seu respeito.

Esse texto busca realizar a abordagem da História da Matemática enquanto recurso didático para dar sentido e significado as duas demonstrações da irracionalidade de $\sqrt{2}$, entendendo que, a História da Matemática nos possibilita entender a origem do problema e o que foi gerado a partir disso. Pois, conforme explica Caraça (1984) a Matemática se utiliza de 2 regras, a compatibilidade lógica e o princípio da economia: a primeira busca apreender um princípio geral para a construção progressiva que ocorre por meio de conceitos, e as afirmações sobre esses conceitos não podem passar por desacordos, pois, caso contrário, a Matemática iria se subdividir em caminhos, dando fim a compatibilidade; e o outro princípio busca que a introdução das novas leis ocorra com o menor dispêndio possível de energia mental.

A utilização da História da Matemática segundo Schubring (1997, *apud* CHAQUIAM, 2017, p.17) pode adotar uma abordagem direta ou indireta, a primeira ocorre por meio da introdução de elementos históricos na sala de aula por meio de textos originais ou de biografias de matemáticos ilustres, e a segunda envolve apresentar uma análise dos problemas, dos fatos e das demonstrações envolvidas no momento de decisão.

Ainda de acordo com Schubring (1997, *apud* CHAQUIAM, 2017, p.17), utilizar a abordagem indireta na formação de professores pode contribuir para uma melhor orientação dos processos pedagógicos, pois o professor é incentivado a desenvolver um pensamento crítico sobre a própria prática. Além do mais, a abordagem oportuniza compreender o desenvolvimento da matemática não de forma continuísta e cumulativa, mas como uma construção humana, que possui fases alternadas de continuidade e rupturas, permitindo ao professor uma visão ampla e significativa do que o conteúdo que está sendo ensinado.

A Matemática presente no Ensino Superior é carregada de uma linguagem extremamente econômica e formalista, sendo disposta nas palavras de Silva (1997, p. 141) como "um paraíso de símbolos, numa linguagem sincopada e extremamente formalizada, que fala sobre conjuntos, conjuntos de conjuntos, infinitos e vazios, implicações e equivalências, cálculo dos predicados, conceitos desconhecidos de nossos conterrâneos do final do século passado". Com isso, entende-se que a Matemática se estabeleceu na virada do século XIX numa perspectiva algébrica, desvinculada das noções geométricas que já não sustentavam o rigor pretendido.

Dessa forma, a análise aqui pretendida busca então dar à luz de como poderia realizar essa abordagem no Ensino Superior, privilegiando a lógica da produção matemática, utilizando-se da História da Matemática em uma abordagem indireta, visando produzir significado nas demonstrações.

DEMONSTRAR E RE-DEMONSTRAR: A BUSCA PELO RIGOR

A princípio, poderíamos conjecturar que basta provar uma determinada relação uma única vez e tudo já esteja entendido e todas as relações satisfeitas. Contudo, o ato de re-demonstrar[1] o mesmo resultado expõe o seu entendimento, assim como o das estruturas matemáticas ali envolvidas que explicitam outras propriedades e por aquele que lhe escreve.

Por vezes na graduação do licenciado em matemática, os professores e os livros demonstram coisas. Porém, não dizem o que entendem por "demonstrar". Tem-se que aprender. Vê-se o que o professor faz, e, então, faz-se a mesma coisa (BICUDO,2002). O que nos parece remeter ao que Batistela, Bicudo e Lazari (2020) afirmam acerca da adjetivação da beleza de uma demonstração, conceituando como algo esclarecedor, permeando uma iluminação sob o aspecto da verdade ali apreendida. E quando o aluno não é iluminado pela clarificação do ato de demonstrar aquele resultado é justamente pela falta de sentido que não lhe foi capaz de atribuir, não existindo a atribuição da beleza.

A concepção do que seria esse demonstrar é indissociável de como a lógica define como "demonstração". O sistema formal que necessita de uma linguagem, especificando seus símbolos e as expressões formadas por uma sequência de símbolos finitos. Posterior a isso, temos os axiomas, que é uma fórmula da linguagem do sistema, e por fim, as regras de inferências, que nos permite às possibilidades sob certas condições obter a fórmula que chamamos de conclusão da regra, ou seja, uma conclusão é algo que pode ser inferido pelas outras regras. (BICUDO, 2002).

[1] Re-demonstrar aqui é entendido conforme exposto por Batistela, Bicudo e Lazari (2020, p. 206) como sendo "[...] teoremas cujas demonstrações são conhecidas bem como a estrutura delas. Uma vez conhecidas a estrutura e a mensagem estabelecida pelo teorema, realiza-se um exercício de criação de outra(s) sequência(s) de fórmula que expressam o mesmo resultado". Ou seja, a concepção a respeito do re-demonstrar é entendida como o ato de debruçar-se sobre o resultado estudado, refazendo-o e buscando a compreensão acerca das ideias e argumentos essenciais ali contidos.

Contudo, as concepções acerca do rigor matemático foram construídas ao longo da história, tendo a passagem de um rigor que era a priori geométrico, para um rigor que perpassa a álgebra, um rigor algébrico.

A mudança de rigor também se relaciona com as mudanças no uso e entendimento da Lógica pelos matemáticos, assim como as modificações na Lógica desde Aristóteles. Lima (2010, p. 65) pondera que:

> Faz-se necessário um reconhecimento a Aristóteles: verificar se uma dada argumentação é válida, detectar falácias, utilizando classificação de palavras e de proposições, é uma tarefa homérica. Além disso, através da linguagem corrente, construir uma obra sobre lógica, o Organon, constantemente manuseada do século IV a.C. até o fim do século XIX, é tarefa de deuses.

A lógica de Aristóteles foi pensada na forma quantificador - sujeito - cópula[2] - predicado, e com isso, poucas eram as sentenças que poderiam ser expostas nesse formato. Pires (1991, p.28) expõe que "[...] a lógica de Aristóteles não conseguia sustentar proposições como "Sócrates é mortal", exceto, traduzindo-a como "Todo Sócrates é mortal", que afirma algo sobre a totalidade de Sócrates, sendo hoje um absurdo". Mesmo com essas ponderações, o principal problema de Aristóteles e de seus seguidores foi de não pensar que o termo sujeito ou o termo predicado, poderiam ser conjuntos vazios, pressupondo assim, uma necessidade implícita de existência desses termos. (PIRES, 1991)

Então, o conceito de proposição para Aristóteles:

> [...] consiste numa articulação lógica sustentada pela substância; nela, como suporte de predicação, combinam-se um termo-sujeito, acerca do qual se afirma, e um termo-predicado, que afirma algo do termo-sujeito. (PIRES, 1991, p.26)

Ou seja, existe uma relação de dependência entre os termos sujeito e predicado. Além de que, a forma lógica dos argumentos eram em termos de silogismos, que segundo Lima (2010, p.57) " Um silogismo é a inferência de uma proposição a partir de duas outras chamadas premissas", que ao serem postas na forma quantificador - sujeito - cópula - predicado, gera uma limitação de argumentos válidos[3]. O grande salto na Lógica, nas

[2] Cópula é o elemento de ligação entre o sujeito e o predicado.
[3] Para ver caracterização mais precisa sobre as limitações técnicas dos silogismos, leia-se Copi (1978).

próprias palavras de Lima (2010, p.65) "ocorre quando Leibniz, no século XVII, introduz o simbolismo algébrico na matemática. [...] quando alguém pronuncia "seja p uma proposição" não importando sua semântica, mas sua sintaxe, dá-se a fuga da lógica da filosofia para a matemática". Dessa forma, entende-se que ocorreu uma mudança de rigor matemático por meio da lógica, além de que, foi possível estender o conceito de proposição, deixando de ser um caso particular e passando a ser uma fórmula proposicional composta por letras proposicionais e conectivos.

As regras do que se consolidou acima definiu-se como sistema formal ou método axiomático, é utilizado no ato de demonstrar, mas de onde advém o *knowhow* para superar a essa forma copista de "aprender" a demonstrar que existe no Ensino Superior? Essa primeira "aproximação" ocorre por meio da lógica, que elucida as técnicas de demonstração e o que podemos inferir dos argumentos que temos em mãos, não existindo dúvidas daquilo que é pretendido enquanto linguagem. A utilização de argumentos visando somente a forma e não o conteúdo, atrelado a necessidade de se utilizar de argumentos verdadeiros, impõe ao matemático a necessidade de utilizar as regras de inferências de forma correta, analisando somente a dualidade (verdadeiro ou falso) no que tange às regras de inferências. Não basta seguir essas "regras", o resultado matemático cabe ser legitimado pela comunidade matemática, em direção ao entendimento de que a Matemática é uma construção.

Contudo, Bicudo (2002, p.7) expõe questionamentos a respeito de como a lógica é utilizada para moldar o rigor matemático das demonstrações, e diz que a reivindicação de que a demonstração teórica (leia-se: lógica) modela a demonstração prática (leia-se: matemática) é uma AFIRMAÇÃO DE FÉ. "DEMONSTRAÇÃO MATEMÁTICA- se não me perguntam o que é, eu sei; se me perguntam, e eu queira explicar, não sei" (BICUDO, 2002, p.8).

Bicudo é categórico ao expor que quando o matemático fala em demonstração ele está na mesma posição de Santo Agostinho em relação ao tempo "[Santo Agostinho sobre o tempo: O que é, portanto, o tempo? Caso ninguém me demande, sei; se quero explicar ao demandante, não sei]" (BICUDO, 2002, p.8).

A ruptura do fazer somente por fazer que nos motivou na busca do entender o mesmo resultado de várias perspectivas. O ato do re-demonstrar clarifica a beleza da irracionalidade da tão célebre $\sqrt{2}$. Apesar disso, a maneira na qual foi realizada as demonstrações vão no entendimento da necessidade de maior detalhamento nos argumentos utilizados mantendo a elegância e a simplicidade.

As demonstrações efetuadas nesse artigo, objetivam quebrar o demonstrar proposto pelos livros, proporcionando um fazer mais elucidativo das técnicas e argumentos utilizados no momento de re-demonstrar. Indo de encontro com o entendimento a respeito da legitimação do conhecimento matemático que ocorre por meio das demonstrações e do método axiomático que permitem a constituição de um conhecimento científico, a Matemática.

O ato de refazer a mesma demonstração pode proporcionar o reforço da confiança nos resultados ali provados, na estrutura e na coerência da própria matemática, além disso, pode promover as concepções de matemática em variadas épocas e que formaram os questionamentos no qual os matemáticos daquele período se debruçaram, tais como os gregos na busca da compatibilidade lógica entre o Teorema de Pitágoras e o problema da medida (BATISTELA; BICUDO; LAZARI, 2020).

Dessa forma, demonstrar vai muito além de fazer inferências entre as proposições, mas sim, emergir o significado que permeia a validade daquela argumentação, elucidando a técnica utilizada e seus pontos centrais da argumentação que inferem na adjetivação do belo em quem se prontifica a fazer, ler ou/e entender uma demonstração matemática.

DEMONSTRAÇÃO DA IRRACIONALIDADE DE $\sqrt{2}$

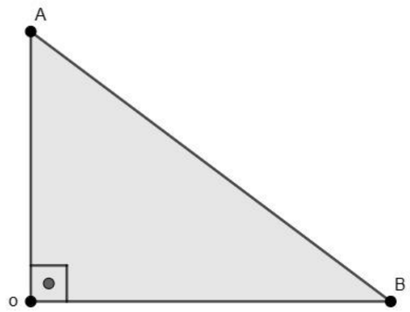
A escalada inicial dos números irracionais ocorreu na Grécia antiga, no momento em que a escola pitagórica passou a não considerar a intuição e a observação como únicas formas de procedimento na busca dos conhecimentos geométricos, (DOMINGUES, 2002). Os gregos ao se depararem com um absurdo se viram diante de um problema relacionado a como medir segmentos, ou nas palavras de Domingues:

> todos os fenômenos do universo poderiam ser explicados em termos de números inteiros (positivos – os únicos considerados por eles) e suas razões. Essa tese era compatível com a crença que alimentavam de que duas grandezas quaisquer de mesma espécie seriam sempre comensuráveis. (DOMINGUES, 2002, p.58)

Contudo, no século V a.C, o Pitagórico Hipaso de Metaponto demonstrou a falsidade dessa crença de duas grandezas serem sempre comensuráveis. Aristóteles pontuou que essa falsidade foi dada utilizando a redução ao absurdo e expressa uma demonstração, da qual a diagonal e o lado de um quadrado possuem medidas incomensuráveis, sendo a demonstração realizada por Aristóteles a mesma que é realizada atualmente utilizando a paridade (DOMINGUES, 2002).

Então, a busca pela medição de segmentos levou os gregos a um problema de compatibilidade lógica, vamos a demonstração do caso.

Figura 01: Triangulo pitagórico de lado 1.



Fonte: Autoria própria.

Seja o triângulo retângulo BOA, isósceles, temos por objetivo medir o segmento $\overline{AB}$, tomando como medida o segmento $\overline{OA}$ ou $\overline{OB}$. Neste caso, como o triângulo é isósceles, $\overline{OA} = \overline{OB}$.

Se essa medida existir, acarretará na existência de um número racional $r = \frac{p}{q}$, com p e q irredutíveis, de forma a gerar a relação:

$$\overline{AB} = \frac{p}{q}.\overline{OA} \rightarrow \overline{AB}^2 = \left(\frac{p}{q}\right)^2.\overline{OA}^2 \quad (1)$$

Nesse momento da Matemática grega, já se era utilizado o Teorema de Pitágoras, que nos diz que a soma dos quadrados dos catetos de um triângulo retângulo resulta no quadrado da sua hipotenusa. E com isso os gregos buscando manter a compatibilidade lógica da Matemática, relacionaram a Equação (1) com o Teorema de Pitágoras.

Desse modo, a Figura 01 goza das propriedades pitagóricas, ou seja, $\overline{AB}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{OB}^2$, e como o triângulo é isóscele, tem-se que $\overline{OA} = \overline{OB}$, resultando em:

$$\overline{AB}^2 = \overline{OA}^2 + \overline{OA}^2 \rightarrow \overline{AB}^2 = 2\,\overline{OA}^2 \quad (2)$$

Note que as Equações 1 e 2 possuem o mesmo termo $\overline{AB}^2$, permitindo igualar as equações.

$$\left(\frac{p}{q}\right)^2 .\overline{OA}^2 = 2\,\overline{OA}^2 \rightarrow \left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2 \quad (3)$$

Ao verificarmos a compatibilidade lógica existente entre a medida $\overline{AB}$ e o Teorema de Pitágoras, e sua resultante a Equação 3, encontramos o que Caraça (1984, p.50) intitula de "monstro aritmético".

Por meio da Equação 3, tem-se que $\frac{p^2}{q^2} = 2 \rightarrow p^2 = 2q^2$, e utilizando o teorema que nos diz que se p^2 é par, então p é par. A sua demonstração pode ser realizada utilizando o método da contra positiva, mostrando que se p é ímpar, então p^2 é ímpar. Sendo p ímpar, ele pode ser escrito como $p = 2k + 1$, para algum $k \in Z$, e elevando-o ao quadrado, tem-se que: $p^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$, ou seja, p^2 é ímpar.

Dessa forma, é possível reescrever p como $2k$ para algum $k \in Z$. Então $(2k)^2 = 2q^2 \rightarrow 4k^2 = 2q^2 \rightarrow 2k^2 = q^2$, resultando em q^2 ser par e consequente q é par pelo teorema já provado anteriormente. Como p é par e q é par, temos uma contradição, pois se eles forem ambos pares, o racional $\frac{p}{q}$ não seria irredutível.

Portanto, ao destrinchar esse "monstro", entende-se que não é possível medir o segmento $\overline{AB}$, tomando como medida o segmento $\overline{OA}$, em outras palavras, o número associado ao segmento $\overline{AB}$ é dito irracional. E temos assim a primeira demonstração da irracionalidade de $\sqrt{2}$ por meio da paridade.

Note que, de forma algébrica, a busca pretendida era de um número tal qual multiplicado por ele mesmo que resulte em 2, isto é, $x.x = 2$, sendo x um número que era considerado como sendo racional. Hoje já é sabido que esse x é dado por $\sqrt{2}$, um número irracional.

OUTRA DEMONSTRAÇÃO PARA A IRRACIONALIDADE DE $\sqrt{2}$

A Teoria dos Conjuntos na sua axiomatização proposta no sistema *Zermelo-Fraenkel* (ZF) utilizou de 11 axiomas, dentre eles, o *Axioma da Escolha*, que é extremamente controverso, pois alguns matemáticos dizem que o mesmo não é intuitivo. O *Axioma da Escolha* é formulado no sistema ZF da seguinte maneira: dada uma coleção não vazia de conjuntos não vazios dois a dois disjuntos, existe um conjunto (um conjunto-escolha) que contém exatamente um elemento de cada conjunto da coleção dada. Isto é, podemos criar um novo conjunto por meio de outros conjuntos por meio de uma função escolha que não está previamente determinada. (IZAR; TADINI, 1998)

Dentre algumas das consequências do *Axioma da Escolha*, tem-se o Princípio da Boa Ordem (PBO) ou Teorema da Boa ordem, que é evitado sempre que possível pelos matemáticos. O PBO nos diz que todo subconjunto não vazio A de números naturais possui um elemento mínimo, isto é, existe $n_0 \in A$, tal que $n_0 \leq n$, para todo $n \in A$**.** Evitar esse Teorema leva os matemáticos a ter que fazer a seguinte formulação:

> [...] quando um teorema é demonstrado usando o Axioma da Escolha, a ordem é demonstrar o Axioma da Escolha usando o teorema como hipótese; desta forma fica comprovado que seu uso era inevitável, pois o Teorema nada mais é que uma formulação equivalente do Axioma da Escolha. (IZAR; TADINI, 1998, p.51)

Dessa maneira, o *Axioma da Escolha* e suas equivalências são usadas somente na ausência de quaisquer alternativas, e sempre demonstrando que o seu uso é inevitável. O *Axioma da Escolha* pode ser utilizado para demonstrar o PBO. Um é derivável do outro, isto é, se no sistema de axiomas colocarmos o PBO enquanto axioma, teríamos então o lema da escolha, e vice-versa. (GUERRERIO, 2012; MARQUES, 2013)

Sendo assim, em conformidade as palavras de Izar e Tardini (1998, p.51) “[...] o Axioma da Escolha está para a Matemática assim como o 5º Postulado de Euclides está para a Geometria”.

Após entendimento desse caráter controverso do PBO, será realizada a demonstração da irracionalidade de $\sqrt{2}$ utilizando como ideia central o mesmo princípio, utilizando como método de demonstração, a redução a um absurdo.

Suponha que $\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$ e seja $S = \{a \in \mathbb{N}: a\sqrt{2} \in \mathbb{Z}\} \neq \emptyset$. Pelo PBO, existe $m = \min(S)$, em particular $m\sqrt{2} = n \rightarrow \frac{n}{m} = \sqrt{2}$. Tomemos a seguinte relação:

$$\sqrt{2}(\sqrt{2} - 1) = 2 - \sqrt{2}$$

E com isso reescrevemos $\sqrt{2}$ como sendo $\sqrt{2} = \frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$ e substituindo $\sqrt{2} = \frac{n}{m}$, temos que:

$$\sqrt{2} = \frac{2-\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} = \frac{2-\frac{n}{m}}{\frac{n}{m}-1} = \frac{\frac{2m-n}{m}}{\frac{n-m}{m}} = \frac{2m-n}{n-m}$$

Como $1 < \sqrt{2} < 2 \Leftrightarrow 1 < \frac{n}{m} < 2 \Leftrightarrow m < n < 2m \Leftrightarrow 0 < n - m < m$. Entretanto, $(n-m)\sqrt{2} = 2m - n \in \mathbb{Z}$. Daí $n - m \in S$. O que se configura como um absurdo, pois $n - m \in S$, mas $n - m < m = \min(S)$. Portanto, $S = \emptyset$ e segue que $\sqrt{2}$ é irracional.

Percebe-se então que a forma de mostrar a irracionalidade de algum número é supor que ele seja racional e utilizar a sua suposta forma fracionária. Além disso, existem outras demonstrações para a irracionalidade de $\sqrt{2}$ utilizando o Teorema Fundamental da Aritmética ou até mesmo relações algébricas em um retângulo, a escolha pela paridade e pelo PBO ocorre pela possibilidade de se utilizar a História da Matemática parar dar significado aos contextos de cada momento.

CONCLUSÃO

O estudo teórico aqui realizado visou dar significado as demonstrações, em uma perspectiva diferente do princípio da economia e do formalismo matemático, pois, é necessário evidenciar o que precede o resultado matemático, ou seja, aquilo que foi pertinente para sua formulação, e as vezes, o porquê das escolhas realizadas, que vai de encontro a uma abordagem indireta da História da Matemática.

Utilizar a História da Matemática enquanto recurso didático possibilita então dar luz aos problemas que fizeram criar o novo, que nesse caso foi a descoberta dos números irracionais e o problema da incompatibilidade lógica. Além do uso do PBO que reafirma o caráter da matemática enquanto ciência e a compatibilidade lógica presente no sistema lógico dedutivo utilizado.

Por fim, é necessário não lançar mão das virtudes em se utilizar a História da Matemática, que propicia um significado que vai além da própria demonstração, mas que vai ao encontro do seu entendimento, reforçando a confiança matemática do licenciando em matemática.

REFERÊNCIAS

BATISTELA, Rosemeire de Fátima. **O Teorema da Incompletude de Gödel em cursos de licenciatura em Matemática**. 2017. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2017. Disponível em: <http://hdl.handle.net/11449/148797>. Acesso em 10 abr. 2023.

BATISTELA, Rosemeire de Fátima; BICUDO, Maria Aparecida Viggiani; LAZARI, Henrique. Demonstrações alternativas e re-demonstrações na produção e no ensino de matemática. **Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática**, v.13, n.2, p. 203-210, 2020.

BICUDO, Irineu. Demonstração em Matemática. **BOLEMA: Boletim de Educação Matemática,** Rio Claro, v. 15, n. 18, p. 79-90, 2002.

CARAÇA, Bento de Jesus. **Conceitos fundamentais da matemátic**a. Lisboa: Sá da Costa, 1984.p. 48-63.

CHAQUIAM, Miguel. **Ensaios temáticos: história e matemática em sala de aula**. Belém: SBEM / SBEM-PA, 2017.

COPI, Irving Marmer. **Introdução à lógica.** São Paulo: Mestre Jou, 1978.

DOMINGUES, Hygino H.. A Demonstração ao Longo dos Séculos. **BOLEMA: Boletim de Educação Matemática**, Ano 15, nº 18, p.55-67. Rio Claro: UNESP, 2002.

GUERRERIO, Gianbruno. **Scientific American Brasil.** A vanguarda da matemática: e os limites da razão. São Paulo: Duetto Editorial Ltda. Revised and updated edition. Coleção gênios da ciência, n. 8, p. 1-99, 2012.

IZAR, Sebastião Antonio; TADINI, Wilson Maurício. **Teoria Axiomática dos Conjuntos: uma introdução**. Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas, 1998.

LIMA, Arlete Cerqueira. **Logica formal: origens e aplicações.** Salvador, BA: Quarteto, 2010.

MARQUES, Diego. **Teoria dos números transcendentes**. Rio de Janeiro: SBM, 2013, p.7-19.

PIRES, João Carlos Salles. A Pressuposição da Existência na Lógica de Aristóteles. In: **Revista de Filosofia e Ciências Humanas**, Salvador, n. 2, p. 24-39, jun. 1991.

SILVA. Circe Mary Silva. No paraíso dos símbolos: surgimento da Lógica e Teoria dos Conjuntos no Brasil. In: **Filosofia, Lógica e Existência** (Luiz Carlos Bombassaro e Jayme Paviani, Org.). Caxias do Sul: EDUCS, 1997, p. 141-168.