

XX ENCONTRO BAIANO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

IX FÓRUM BAIANO DAS LICENCIATURAS EM MATEMÁTICA

01 A 04 DE AGOSTO DE 2023
PAULO AFONSO - BA

GEOMETRIA DESCRITIVA E GEOGEBRA 3D: UMA PRÁTICA PARA DESENVOLVIMENTO DA VISUALIZAÇÃO

Eixo Temático: (Formação de professores que ensinam Matemática)

Lucas Lima Ferreira. Universidade do Estado da Bahia.
novolucasferreira@hotmail.com;

RESUMO

Neste artigo, apresentamos parte de um Trabalho de Conclusão de Curso (TCC) cujo objetivo foi investigar se a prática em construir e projetar por meio do Software Geogebra 3D objetos bidimensionais (2D) e tridimensionais (3D) em planos, pode contribuir para o desenvolvimento da Visualização. É uma pesquisa bibliográfica, pré-experimental e qualitativa. Sendo que, com a revisão de literatura buscamos entender o fenômeno da Visualização, a importância da aprendizagem da Geometria Descritiva e os benefícios da utilização de Softwares de Geometria Dinâmica em aulas de Geometria. O trecho exposto nesse recorte tem como principal referencial teórico os trabalhos de Angel Gutierrez no que diz respeito a uma caracterização para a Visualização. Assim, para responder nossa questão de pesquisa recorreremos a uma atividade de investigação aplicada em três etapas com alunos da licenciatura em matemática do Campus II da Universidade do Estado da Bahia. A partir das análises dos dados coletados detectamos indícios de desenvolvimento nas Habilidades de Visualização dos participantes. Esses ganhos são importantes, visto que, como a Visualização é um dos tipos de raciocínios que compõe o Pensamento Matemático, concluímos que este também foi aprimorado.

Palavras-chave: Geometria Descritiva. Geogebra 3D. Visualização. Pensamento Matemático.

INTRODUÇÃO

Este recorte apresenta nossa linha de pesquisa que é motivada pelos seguintes pontos norteadores, adquiridos através de nossas vivências ao longo da licenciatura: o uso do Geogebra 3D como ferramenta de auxílio ao estudante de Geometria Espacial (GE) em transpor enunciados de questões, a percepção de que os conhecimentos da Geometria Descritiva (GD) contribuem com a capacidade de “imaginar” objetos geométricos no espaço e por fim, o desejo de juntar esses dois recursos - Geogebra 3D e



GD - numa prática que aprimore a Visualização.

Assim, realizamos leituras nos estudos antecedentes acerca do tema e vimos em Palles e Silva (2012, p.2) que “um dos principais problemas encontrados no ensino de geometria é a dificuldade de Visualização”, neste mesmo sentido, Gutierrez (1991, p.44, tradução nossa) afirma que “a percepção visual é um elemento importante em inúmeras atividades da vida, não apenas aquelas relacionadas ao aprendizado ou à geometria”. A partir dessas colocações fortificamos nossas ideias acerca da relevância do tema.

Além disso, a revisão bibliográfica confirmou nossas percepções acerca da GD, pois Montenegro (2015) enfatiza que “a Geometria Descritiva se presta para desenvolver a habilidade de imaginar objetos ou projetos no espaço”.

Com relação à utilização do Geogebra 3D, Oliveira (2021, p.9) afirma que numa pesquisa no âmbito da pós-graduação no PPGEMAT/UFRGS encontrou contribuições do Geogebra para o desenvolvimento de algumas Habilidades de Visualização postas por Gutierrez. Concomitantemente Lima, Lins e Perreira (2018) indicam que esse tipo de aplicativo, referindo-se ao Geogebra, torna as aulas mais dinâmicas e interativas.

Para entender o fenômeno da Visualização nos debruçamos sobre os trabalhos de Angel Gutierrez, em específico seu título *Visualization in 3-Dimensional Geometry: In Search of a Framework*, onde ele afirma que a Visualização é uma das bases da cognição humana e, além disso, apresenta que um dos elementos integradores da Visualização, a saber: as Habilidades de Visualização, *pode ser adquirido e desenvolvido*. Isso nos inquietou, pois pensamos em qual seria o papel do professor de matemática nesse contexto de possibilidades de desenvolvimento da Visualização?

Com isso, decidimos investigar se a prática em construir e projetar, por meio do Geogebra 3D objetos 2D e 3D em planos, poderia contribuir para o desenvolvimento da Visualização. Essa investigação se desenvolveu em busca de responder a seguinte

XX ENCONTRO BAIANO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

IX FÓRUM BAIANO DAS LICENCIATURAS EM MATEMÁTICA

01 A 04 DE AGOSTO DE 2023
PAULO AFONSO - BA

questão de pesquisa: em que medida a utilização do Geogebra 3D, para construir e projetar objetos 2D e 3D em planos, contribui para o desenvolvimento da Visualização?

A seguir apresentamos a teoria que fundamenta nosso trabalho, posteriormente a metodologia adotada. E logo após, tratamos da atividade que construímos e aplicamos, junto às análises dos dados coletados. Por fim, encerramos com as considerações finais.

VISUALIZAÇÃO: UMA ATIVIDADE COGNITIVA

Em busca de entendermos o fenômeno da Visualização, nos debruçamos sobre o artigo de Angel Gutierrez, intitulado *Visualization in 3-Dimensional Geometry: In Search of a Framework*, publicado em 1996 a partir da Universidade de Valência.

Essa publicação nos chamou a atenção porque o autor traça além de suas próprias conclusões, um panorama teórico com resultados de estudos realizados por pesquisadores importantes nesse campo de atuação, tais como: Hoffer, Bishop, Yakimanskaya, Kosslyn, Presmeg, Dreyfus e outros mais. As informações encontradas nos possibilitam ter uma visão ampliada do assunto, principalmente porque a Visualização é objeto de estudo de diversos campos do conhecimento.

Gutierrez *et al.* (1996, p.9, tradução nossa) define Visualização em matemática como sendo “um tipo de atividade de raciocínio baseada no uso de elementos visuais ou espaciais, mentais ou físicos, realizados para resolver problemas ou provar propriedades”. Para ele a Visualização é integrada por quatro elementos principais, são eles: as Imagens Mentais, as Representações Externas, os Processos de Visualização e as Habilidades de Visualização (GUTIERREZ *et al.* 1996, p.9, tradução nossa).

A Imagem Mental é o elemento central da Visualização, Gutierrez afirma que: o elemento central em todas as concepções de percepção visual são as Imagens Mentais, ou seja, as representações mentais que as pessoas podem fazer de objetos físicos,



relacionamentos, conceitos e etc... [...] (Gutierrez, 1991, p.44, tradução nossa).

Com relação às Representações Externas, trata-se de: qualquer tipo de representação verbal ou gráfica de conceitos ou propriedades, incluindo fotos, desenhos, diagramas, etc., que ajudam a criar ou transformar Imagens Mentais e a fazer raciocínio visual (GUTIERREZ *et al.* 1996, p.10, tradução nossa).

Já os Processos de Visualização configuram-se como ações mentais ou físicas onde as Imagens Mentais estão envolvidas. E a respeito das Habilidades de Visualização, Gutierrez *et al.* (1996, p.10, tradução nossa) chama a atenção para o seguinte “os indivíduos devem adquirir e aprimorar um conjunto de Habilidades de Visualização para realizar os Processos necessários com Imagens Mentais específicas”.

Em suma, ao acessarmos o objeto matemático através de alguma de suas representações, se essa, está em nossa mente, então trata-se de uma Imagem Mental. Mas, se a representação está em um meio físico, então é uma Representação Externa do objeto (FERREIRA, 2022, p.35). O acesso às Representações Externas poderá se dá através da visão ocular, da audição - pois as Representações Externas são também postas verbalmente - ou através da Percepção Cinestésica (FERREIRA, 2022, p.35).

Registre-se que, a criação de Imagens Mentais está associada ao acesso do indivíduo as Representações Externas, isto é, a partir do nosso acesso a um objeto matemático através de alguma de suas Representações Externas forma-se em nossa cognição uma Imagem Mental daquele objeto. Assim, quanto mais diversificado for o acesso as Representações Externas, mais rico será o repertório de Imagens Mentais.

Podemos considerar que os Processos de Visualização são responsáveis por movimentar as Imagens Mentais e que as Habilidades de Visualização agem como “nutrientes” que fortificam os Processos, a fins de que eles se tornem eficientes e



dinâmicos na tarefa de movimentação das Imagens Mentais (FERREIRA, 2022, p.36).

A seguir descrevemos uma parte das Habilidades de Visualização postas por Gutierrez (1996), sendo que, algumas dessas Habilidades ele próprio as identifica e outras ele traz baseado em autores notáveis no campo de estudo da Visualização.

Habilidades por Mcgee (1979, *apud* Gutierrez, 1996, p.8, tradução nossa): capacidade de visualizar uma configuração em que haja movimento em suas partes; capacidade de compreender movimentos imaginários em três dimensões e manipular objetos na imaginação. Hoffer (1977, *apud* Gutierrez, 1996, p.9, tradução nossa) descreve que uma importante Habilidade é a Memória Visual, que serve para lembrar de Imagens Mentais e objetos que não são mais vistos.

Habilidades identificadas por Gutierrez *et al.* (1996, p.10, tradução nossa): constância perceptiva, isto é, a capacidade de reconhecer que algumas propriedades de um objeto (real ou em um Imagem Mental) são independentes de tamanho, cor, textura ou posição, e permanecer sem confusão quando um objeto ou imagem é percebido em diferentes orientações; percepção de relações espaciais, como sendo a capacidade de relacionar objetos e Imagens Mentais entre si, ou simultaneamente consigo mesmo.

O Kosslyn (1980, *apud* Gutierrez, 1996, p.8, tradução nossa) identifica tais Habilidades: gerar uma Imagem Mental a partir de alguma informação; inspecionar uma Imagem Mental para observar sua posição ou a presença de partes, ou elementos. Bishop (1983, *apud* Gutierrez, 1996, p.7, tradução nossa) aponta a Habilidade de processamento visual da informação, isto é, tradução de relações abstratas e dados não figurativos em termos visuais, a manipulação e extrapolação de imagens visuais e a transformação de uma imagem visual em outra.

METODOLOGIA

XX ENCONTRO BAIANO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

IX FÓRUM BAIANO DAS LICENCIATURAS EM MATEMÁTICA

01 A 04 DE AGOSTO DE 2023
PAULO AFONSO - BA

Nesse tópico caracterizaremos a pesquisa, apresentaremos o percurso seguido e os procedimentos metodológicos que adotamos para cumprir o objetivo deste trabalho.

CARACTERIZAÇÃO DA PESQUISA

Nossa pesquisa é bibliográfica com respeito ao delineamento técnico desenvolvido, qualitativa porque o objeto de estudo, neste caso, a Visualização, não tende a quantificação por trata-se de um fenômeno cognitivo. E como participamos de todo o processo, desde percepções geradas por vivências até a formatação de nossa hipótese, a ação e participação são características marcantes em nosso trabalho.

Quanto aos objetivos é pré-experimental, visto que, agimos sobre o objeto de estudo através de formas de controle sobre as variáveis que poderiam influenciá-lo, testando nossa hipótese e observando quais modificações poderiam ocorrer. Sendo, segundo Gil (2002, p.49) “o pesquisador um agente ativo nesse processo”.

PROCEDIMENTOS METODOLÓGICOS

Além da revisão bibliográfica, elaboramos problemas envolvendo objetos geométricos, aplicados com a estrutura seguinte: 1ª etapa - foi solicitado aos participantes a solução de três problemas com recursos: papel e lápis; 2ª etapa - foi realizada uma oficina onde os respondentes estiveram envolvidos em construções no Geogebra 3D que mesclou conhecimentos das Geometrias Plana, Espacial e Descritiva, sob a mediação do investigador; 3ª etapa - solicitamos que, os participantes modificassem as soluções por eles colocadas na 1ª etapa, caso a participação na oficina oferecesse alguma mudança em suas ideias.

Para possibilitar as análises, em todas as etapas, fizemos gravações em áudio e recolhemos todos os registros tanto escritos como em desenhos. Os dados foram analisados seguindo a técnica do emparelhamento que, conforme Lorenzato (2006,

XX ENCONTRO BAIANO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

IX FÓRUM BAIANO DAS LICENCIATURAS EM MATEMÁTICA

01 A 04 DE AGOSTO DE 2023
PAULO AFONSO - BA

p.138,139) “consiste em analisar as informações a partir de um modelo teórico prévio. Isso pode ser feito por intermédio de um emparelhamento ou associação entre o quadro teórico e o material empírico, verificando se há correspondência entre eles”.

Assim, nas análises dos dados coletados, aplicamos a técnica do emparelhamento relacionando as estratégias utilizadas na solução das questões às Habilidades descritas por Gutierrez. Emparelhamos também as estratégias e soluções da 1ª e 3ª etapas entre si, a fins de observarmos as possíveis diferenças.

ATIVIDADE DE INVESTIGAÇÃO

Participaram da atividade investigativa 7 (sete) alunos da licenciatura em matemática da Universidade do Estado da Bahia que já haviam cursado o componente GD e estavam ou já haviam cursado o componente GE. A aplicação da atividade se deu no Laboratório 1 de Informática do Campus II.

Dividimos o grupo em duas duplas e um trio, e pedimos que registrassem em áudio todo e qualquer tipo de conversa que tivessem, pois a nossa ideia é que pudéssemos na hora das análises, identificarmos os caminhos e estratégias utilizados para solução da questão. Nomeamos os 7 (sete) participantes de A, B, C, D, E, F e G com o propósito de manter o anonimato com relação as suas respostas.

Uma das configurações construídas na oficina foi: sejam no espaço dois segmentos distintos AB e CD com mesma medida, eles se interceptam em seus respectivos pontos médios. Projetamos ambos simultaneamente nos três planos de projeção, de maneira a responder: as projeções de AB e CD estão em verdadeira grandeza pelo menos em dois planos de projeção simultaneamente? Se as projeções de AB e CD no plano horizontal e no plano de perfil forem um único, o plano que contém essas projeções é oblíquo em relação ao plano de projeção vertical?

XX ENCONTRO BAIANO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

IX FÓRUM BAIANO DAS LICENCIATURAS EM MATEMÁTICA

01 A 04 DE AGOSTO DE 2023
PAULO AFONSO - BA

ANÁLISE DOS DADOS COLETADOS

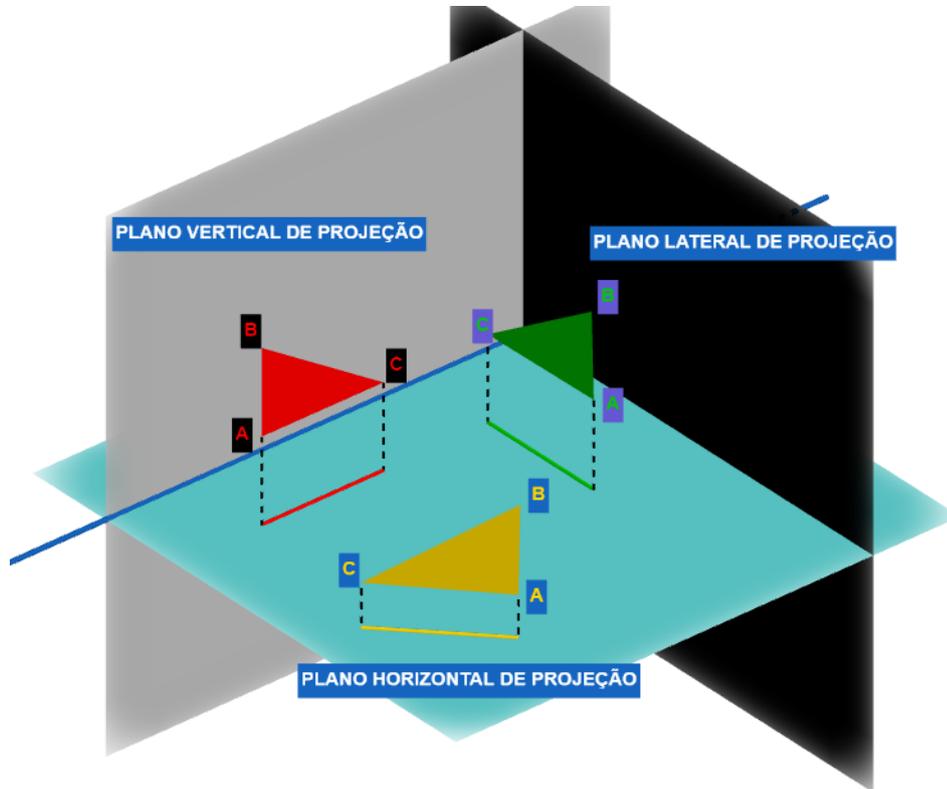
Salientamos que as questões foram oferecidas apenas em forma de texto, para que eles tentassem “ver mentalmente” cada enunciado. Apresentamos uma delas a seguir. Seja um triângulo qualquer ABC no espaço, projeta-se ABC nos planos de projeção, comente as situações postas: item a - a projeção de ABC no plano horizontal é um segmento; item b - a projeção de ABC no plano horizontal é um triângulo congruente a ABC ; item c - a projeção de ABC no plano horizontal é um triângulo que não é congruente a ABC .

A dupla CD, em registro escrito, respondeu na 1ª etapa o seguinte a respeito do item a da questão 1: “a informação não é verdadeira, pois não se sabe ao certo como esse triângulo está disposto, se este estiver paralelo ao plano vertical ou ao de perfil aí sim sua projeção sobre o plano horizontal será um segmento”.

Analisando a resposta dada, nota-se que conseguiram visualizar que o paralelismo do triângulo ABC em relação aos planos lateral (PL) e vertical (PV) faz com que sua projeção seja um segmento no plano horizontal (PH), no entanto, não identificaram que existe a possibilidade de que o triângulo ABC esteja oblíquo em relação ao PL e PV e mesmo assim esteja perpendicular em relação ao PH, sendo essa perpendicularidade o fator que generaliza a condição para que sua projeção seja um segmento no PH (FERREIRA, 2022, p.69).

A seguir, destacamos na Figura 1 três possíveis posições que ABC pode assumir no espaço. Temos em vermelho ABC paralelo ao PV, em verde ABC paralelo ao PL e em amarelo ABC oblíquo ao PV e PL, no entanto, em todos os casos, ABC está perpendicular ao PH. Nessas condições suas projeções serão sempre um segmento no PH.

Figura 1 – Triângulo ABC e suas projeções no PH



Fonte: Própria autoria. Construção via Geogebra 3D

O respondente C na 3ª etapa reformulou sua resposta em relação ao item a da questão 1: “vou manter minha resposta, mas vou *acrescentar* a questão do plano que contém ABC , em vez de argumentar que o plano que contém o triângulo deveria ser paralelo ao PV e PL, eu deveria ter argumentado que o plano que contém ABC deveria ser perpendicular ao PH, para que a projeção fosse um segmento”.

Comparando as respostas, observamos em sua reformulação na 3ª etapa, o surgimento de novas Imagens Mentais, isso se verifica quando ele passa a conceber a existência de um plano que contém ABC , fato não ocorrido na 1ª etapa. Inclusive, ele percebeu a existência de uma nova relação na situação proposta, ele diz que seria melhor ter associado ao fato da projeção de ABC ser um segmento, a perpendicularidade

XX ENCONTRO BAIANO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA
IX FÓRUM BAIANO DAS LICENCIATURAS EM MATEMÁTICA

01 A 04 DE AGOSTO DE 2023
PAULO AFONSO - BA

do plano que contém ABC em relação ao PH.

Através da comparação entre as respostas, evidenciam-se indícios de ganhos em suas Habilidades de Visualização, isto porque ele visualizou uma generalização para o caso em que a projeção de ABC no PH é um segmento, fato que não ocorreu na 1ª etapa da pesquisa. Assim, ele conseguiu melhorar as Habilidades postas por Kosslyn (1980, *apud* Gutierrez, 1996, p.8, tradução nossa) na medida em que gerou Imagens Mentais mais completas com relação à configuração geométrica posta no enunciado da questão.

Apoiados em Gutierrez *et al.* (1996, p.10, tradução nossa) afirmamos que o participante melhorou sua percepção de relações e posições espaciais uma vez que foi capaz de inspecionar melhor as novas Imagens Mentais que criou e dentro disso, passou a relacionar a posição de ABC com relação aos planos de projeção com a posição do plano que contém ABC em relação aos planos de projeção. Observando de maneira mais geral quais possibilidades poderiam ser levadas em conta para que a afirmação posta no enunciado fosse verdadeira e, além disso, encontrou a solução que generaliza a condição que deveria ser cumprida por ABC , veja que ele diz: “deveria ser perpendicular ao PH”.

Salientamos que, o participante C criou Imagens Mentais relacionadas aos enunciados. Como cada enunciado é composto por partes mais elementares que o todo, por exemplo: espaço, triângulo e planos de projeção, comparando-os com o enunciado inteiro, essas partes “menores” são mais simples de se visualizar. Evidencia-se então, a Habilidade de memória visual, que serve para lembrarmos-nos de Imagens Mentais de objetos que não estão sendo vistos, mas que já estão formadas, conforme aponta Hoffer (1977, *apud* Gutierrez, 1996, p.9, tradução nossa).

Essas percepções se tornaram possíveis devido à leitura e entendimento acerca da teoria abordada como base de nossa pesquisa, de maneira que foram essenciais.

XX ENCONTRO BAIANO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

IX FÓRUM BAIANO DAS LICENCIATURAS EM MATEMÁTICA

01 A 04 DE AGOSTO DE 2023
PAULO AFONSO - BA

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nosso trabalho teve como objetivo geral investigar se a prática em construir e projetar, por meio do Software Geogebra 3D, objetos bidimensionais (2D) e tridimensionais (3D) em planos, poderia contribuir para o desenvolvimento da Visualização. Assim, investimos sobre nosso objeto de estudo e aplicamos a atividade investigativa, colhendo ao final, indícios de melhoramento nas Habilidades de Visualização dos participantes.

Sendo assim, acreditamos que os dados obtidos em nossas análises nos permitem responder nossa questão de pesquisa, o qual é a seguinte: em que medida a utilização do Geogebra 3D, para construir e projetar objetos bidimensionais (2D) e tridimensionais (3D) em planos, contribui para o desenvolvimento da Visualização?

Após a aplicação e análises das atividades, afirmamos que a utilização do Geogebra 3D para realizar nossa prática contribui com o desenvolvimento da Visualização dos participantes, na medida em que, percebemos indícios de melhoramento da atividade de gerar Imagens Mentais e com isso ampliar o repertório de Imagens Mentais, além de potencializar a capacidade de inspeção dessas Imagens. Observamos também a ampliação do campo de Visualização, ou seja, os respondentes passaram a “ver mentalmente” as situações postas nos enunciados mais globalmente.

Logo, como vimos na fundamentação teórica, o desenvolvimento das Habilidades de Visualização incide diretamente no aprimoramento da Visualização, que por sua vez constitui-se como um dos tipos de raciocínios que compõem o pensamento matemático, com isso, conclui-se que este também foi beneficiado.

Advertimos que a prática proposta é algo a ser realizado com mediação, no sentido de que, o diálogo entre o mediador e os alunos a respeito dos conhecimentos das Geometrias Plana, Espacial e Descritiva que estão envolvidos é essencial.

XX ENCONTRO BAIANO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA
IX FÓRUM BAIANO DAS LICENCIATURAS EM MATEMÁTICA

01 A 04 DE AGOSTO DE 2023
PAULO AFONSO - BA

Portanto, consideramos os estudos que realizamos como um compromisso da Educação Matemática, pois está posto uma oportunidade para o professor de matemática em suas aulas, de ser um facilitador de avanços nas atividades cognitivas dos alunos.

REFERÊNCIAS

- FERREIRA, L.L. **Geometria Descritiva e Geogebra 3D: uma prática para desenvolvimento da Visualização**. p.1-85. Universidade do Estado da Bahia. Alagoinhas-BA, 2022.
- GIL, A. C. **Como elaborar projetos de pesquisa**. Atlas, São Paulo, 2002. v.4.
- GUTIERREZ, A. **Procesos y habilidades en visualización espacial**. In: **Memorias del 3 er Congreso Internacional sobre Investigación Matemática: Geometría**. 1991. p.44–59.
- GUTIÉRREZ, A. et al. **Visualization in 3-dimensional geometry: In search of a framework**. In: THE PROGRAM. Pme Conference. 1996. v. 1, p.3–19.
- LIMA, M. L. da S.; LINS, A. F.; PEREIRA, P. S. **Provas e demonstrações matemáticas e o aplicativo geogebra: incentivo à visualização de alunos do 2º ano do ensino médio**. VIDYA,2018. v. 38, n. 1, p.199–221.
- LORENZATO, S. **Investigação em educação matemática percursos teóricos e metodológicos**. Autores associados, 2006.
- MONTENEGRO, G. **Geometria Descritiva**. São Paulo: Blucher, 2015.
- OLIVEIRA, D. V. **Visualização espacial no ensino fundamental: rotações no Geogebra**. 2021.
- PALLES, C.; SILVA, M. J. F. da. **Visualização em geometria dinâmica**. Encontro de Produção Discente PUCSP/Cruzeiro do Sul, v. 1, n. 1, 2012.