ESTRUTURAS DE GENERALIZAÇÃO EM SEQUÊNCIAS ALGÉBRICAS: INVESTIGANDO LICENCIANDOS EM MATEMÁTICA

Eixo temático: Ensino e aprendizagem de matemática no ensino superior

Aguinaldo Souza de Jesus. Universidade do Estado da Bahia.
aguinaldo.s.j.0.7@hotmail.com;
Flavia Miranda Silva. Universidade do Estado da Bahia,
flaviamiranda414@gmail.com;
Rodrigo Santos de Lima. Universidade do Estado da Bahia,
rodrigosantosdelima99@gmail.com;
Grace Dórea Santos Baqueiro. Universidade do Estado da Bahia,
gbaqueiro@uneb.br.

RESUMO

Socializamos aqui os resultados de uma investigação caracterizada por como qualitativa e descritiva, cujo objetivo foi o analisar uma atividade envolvendo generalização de sequências algébricas, realizada por discentes do Programa Afirmativa, da Universidade do Estado da Bahia, *Campus* II, que, após estudarem textos voltados principalmente a caracterizadores do pensamento algébrico, e motivados em saber quais etapas da estrutura de generalização de sequências algébricas proposta por Radford, seriam reveladas por graduandos de um curso de licenciatura em matemática, elaboraram e aplicaram-lhes uma sequência didática envolvendo padrões matemáticos, a qual serviu de instrumento de coleta de dados, subsequentemente explorados por meio da técnica do emparelhamento. A interpretação dos dados revelou que, das quatro duplas participantes, apenas uma conseguiu atingir as seis etapas. Além disso, notamos sua potencialidade para o ensino e aprendizagem da álgebra, pois incentiva o estudo por meio de sequências que visam levar os alunos a pensar genericamente.

Palavras-chave: Generalização. Sequências algébricas. Pensamento algébrico. Álgebra.

INTRODUÇÃO

Elaboramos este artigo no âmbito do Programa Afirmativa, da Pró-reitoria de Ações Afirmativas (PROAF) da Universidade do Estado da Bahia (UNEB), *Campus* II. Participaram três estudantes de licenciatura em matemática dessa instituição, em projeto de iniciação científica que visa “garimpar” e analisar as contribuições de autores de dissertações e teses defendidas de 2011 a 2022 sobre o ensino e aprendizagem de álgebra entre alunos cegos.

Iniciamos com a leitura e discussão de textos de Fiorentini, Miorim e Miguel (1993) e de Fiorentini, Fernandes e Cristóvão (2005) versando principalmente sobre concepções de álgebra e de educação algébrica. Os autores explicam que o pensamento algébrico pode ser desenvolvido gradativamente antes mesmo da disponibilidade de uma linguagem algébrica simbólica e apontam outros caracterizadores do pensamento algébrico, por exemplo quando o aluno percebe e tentar expressar regularidades e desenvolver algum processo de generalização.

Vale e Pimentel (2005) destacam que estabelecer conexões entre os padrões e a álgebra requer trabalhar com atividades envolvendo situações generalizadoras baseadas em padrões. Consideram fundamentais os padrões matemáticos na resolução de problemas e no trabalho investigativo, sendo de suma importância desenvolver tal capacidade nos alunos, começando por atividades de reconhecimento de padrões que aos poucos evoluam a tarefas mais complexas. A Base Nacional Comum Curricular advoga "investigar relações entre números expressos em tabelas para representá-los no plano cartesiano, identificando padrões e criando conjecturas para generalizar e expressar algebricamente essa generalização" (BRASIL, 2018). Para melhor apreender a importância da generalização de padrões no ensino e aprendizagem de álgebra, estudamos um artigo de Radford (2021) que discute brevemente o pensamento algébrico e esboça resultados que o autor obteve sobre generalização de sequências, propondo uma *estrutura de generalização de sequências algébricas*.

Isso nos motivou a realizar uma pesquisa cujo objetivo foi o de analisar uma atividade envolvendo generalização de sequências algébricas, buscando responder a seguinte questão norteadora: Quais são as etapas da estrutura de generalização de sequências algébricas proposta por Radford (2021) reveladas por graduandos de um curso de licenciatura em matemática ao resolverem uma sequência didática envolvendo padrões matemáticos? Para tal, elaboramos e aplicamos uma atividade, a qual serviu de instrumento de coleta de dados, subsequentemente explorados por meio da técnica do emparelhamento,

ESTRUTURA DE GENERALIZAÇÃO DE SEQUÊNCIAS ALGÉBRICAS

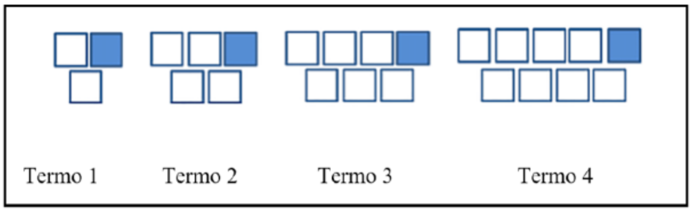
Radford (2021, p. 177) expõe que:

> [...] a generalização de sequências é um dos contextos que têm sido mais cuidadosamente explorados nas investigações no campo da álgebra inicial. [...]

> Normalmente, se apresenta aos estudantes um número finito de termos de uma sequência figural (ou seja, uma sequência constituída de "figuras" compostas de objetos como círculos ou quadrados) ou numérica (ou seja, uma sequência composta de números) e solicita-se a eles que encontrem o valor dos termos seguintes, termos remotos e até mesmo o termo geral (o *termo n*) da sequência.

Buscando observar como alunos de sete e oito anos desenvolviam o processo de generalização, aplicou-lhes uma sequência figural (Figura 1).

Figura 1 – Característica comum entre os termos dados



Fonte: Radford (2021, p. 177)

Explicando ser comum que, diante de sequências figurais, os alunos tendam a deter-se nas quantidades, Radford (2021, p. 177-178) associa esse fato a uma propensão à *recursividade*, ou seja:

> [...] eles têm uma relação de "recorrência" na qual, para encontrar o próximo termo, é necessário conhecer o anterior. Em geral, os jovens estudantes não necessariamente declaram verbalmente a relação de recorrência. A relação de recorrência aparece à consciência através da contagem dos termos e da atividade perceptiva [...].

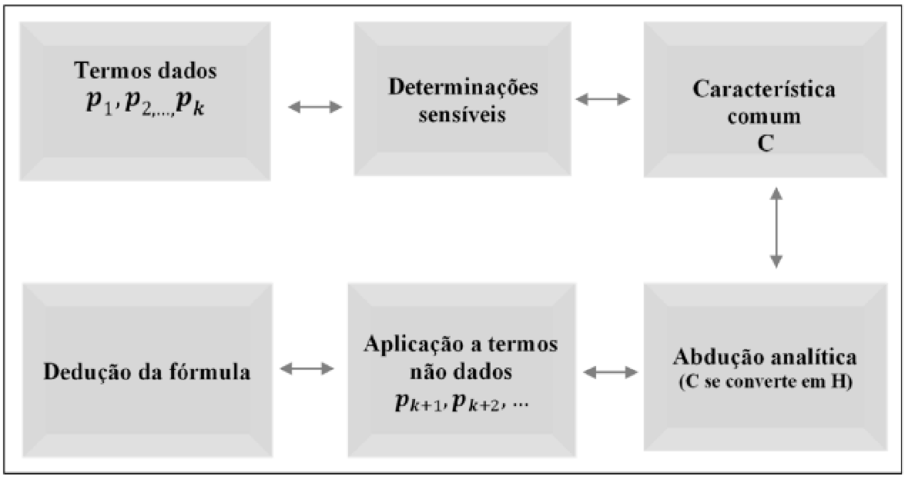
A relação de recorrência impede que o aluno se expresse algebricamente, ao deixar de considerar a organização espacial dos termos e a *relação da quantidade com a posição*, atendo-se ao que Stacey (1989) denomina "generalização próxima": aquela usada para denotar uma questão que pode ser resolvida passo a passo desenhando ou contando. Para mudar tal percepção, é preciso que o aluno comece observando cuidadosamente os termos da sequência para poder então identificar padrões tais como o aumento ou diminuição dos sucessivos valores ou a repetição de determinado padrão de figuras. Em seguida, pode tentar encontrar uma expressão algébrica que modele a sequência com base nos padrões observados.

É natural que nos primeiros contatos com sequências o aluno lance mão da recursividade, mas é desejável que desenvolva a capacidade de fazer, segundo Stacey (1989), *generalizações distantes*: aquelas que vão além do limite prático razoável da abordagem passo a passo, podendo até mesmo vir a iniciar um processo de *generalização algébrica*, que se baseia:

> [...] na capacidade de perceber uma regularidade em alguns elementos de um conjunto S e ser capaz de usá-la para construir uma expressão direta de qualquer termo de S. Em outras palavras, a generalização algébrica de um padrão se baseia na identificação de uma regularidade local que é depois generalizada a todos os termos da sequência e que serve de garantia para a construção da expressão dos elementos da sequência que permanecem para além do campo perceptivo. (RADFORD, 2006, p. 5)

Estudando a generalização de sequências, Radford (2021) propôs uma estrutura de generalização algébrica de sequências algébricas em seis etapas (Figura 2).

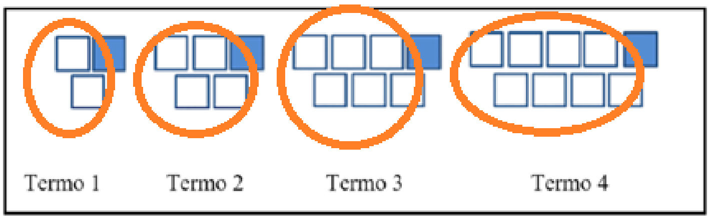
Figura 2 – Estrutura de generalização de sequências algébricas



Fonte: Radford (2021, p. 177)

Inicialmente apresentam-se os termos iniciais de uma sequência aos alunos, que de forma perceptiva e conceitual vão estabelecendo *determinações sensíveis*. No caso de sequências figurais, as determinações sensíveis podem consistir tanto na atenção voltada às quantidades quanto à forma dos termos. Essa atenção levará à descoberta de alguma *característica comum* entre os termos. Na sequência apresentada na Figura 3, a característica comum é a quantidade de quadrados brancos em cada linha ser igual ao número do termo ou, de forma equivalente, a quantidade de quadrados brancos ser igual ao dobro do número do termo.

Figura 3 – Característica comum entre os termos dados



Fonte: Elaborado pelos autores.

A partir do momento em que a característica comum é generalizada a outros termos não presentes na sequência, tem-se a etapa que Radford (2021, p. 180), fundamentado em Peirce, denomina *abdução*, a qual “permite gerar um procedimento, mas não uma expressão direta; em outras palavras, uma fórmula”. Na fase de abdução, os alunos aplicam as regularidades notadas nos termos iniciais a termos não dados da sequência.

O estudante também pode deduzir uma expressão algébrica aplicável a qualquer termo da sequência, o que constitui a sexta etapa da estrutura de generalização de sequências algébricas, denotada por Radford (2021) por *dedução de fórmula*. Em nosso caso, a observação feita (Figura 3) nos leva a perceber que podíamos desenhar a figura ou calcular a quantidade de quadrados para termos em qualquer posição. O termo 25, por exemplo, seria $2{\times}25{+}1$ (em que $2{\times}25$ é referente aos quadrados brancos e a expressão “$+1$” refere-se ao quadrado azul), deduzindo-se daí a fórmula $2{\times}n{+}1$ onde n representa o número do termo da sequência.

A estrutura proposta por Radford (2021), embora siga uma ordem, não é condicionada a apenas um sentido, pois, havendo chegado a determinada etapa, o educando pode fazer o sentido inverso e passar a notar informações pertinentes à etapa anterior.

PERCURSO DA PESQUISA

Inicialmente, propôs-se aos monitores do projeto Afirmativa que buscassem compreender a estrutura da generalização algébrica de sequências proposta por Radford (2021). Posteriormente, empreenderam uma pesquisa por atividades inspiradoras em que cada parte da estrutura de generalização tivesse o potencial de ser alcançada, de modo a podermos adaptar tais atividades a nossos objetivos de pesquisa.

Elaboramos então uma sequência inspirada em uma atividade proposta por Narciso e Carneiro (2021). Antes de a aplicarmos a uma turma do primeiro semestre de licenciatura em matemática da UNEB, *Campus* II, realizamos um “laboratório” para verificar se a sequência atendia a nossos anseios. Essa etapa contou com a colaboração de três voluntários, que inicialmente não demonstraram dificuldade em compreender o enunciado. Sentiram dificuldades, porém, nos itens que levariam à abdução analítica, fazendo-nos perceber que não havíamos identificado os termos da sequência figural, o que teria facilitado a observação da relação entre as grandezas envolvidas. No mais, não foi percebida a carência de outros elementos na atividade nessa etapa.

Oito alunos se dispuseram a participar da pesquisa, os quais foram organizados em duplas (D1 a D4) para resolverem a sequência sem interferência dos pesquisadores. Um dos alunos se ausentou da sala no meio da atividade, sem retornar. (A designação original das duplas, no entanto, será mantida neste relato.) Depois solicitamos que os sete remanescentes respondessem individualmente a um formulário *online*, em que informaram idade, semestre que cursavam, tipo de instituição (pública ou privada) que frequentaram na educação básica, contato prévio ou não com atividades envolvendo generalização de padrões e opinião quanto ao grau de dificuldade na atividade proposta.

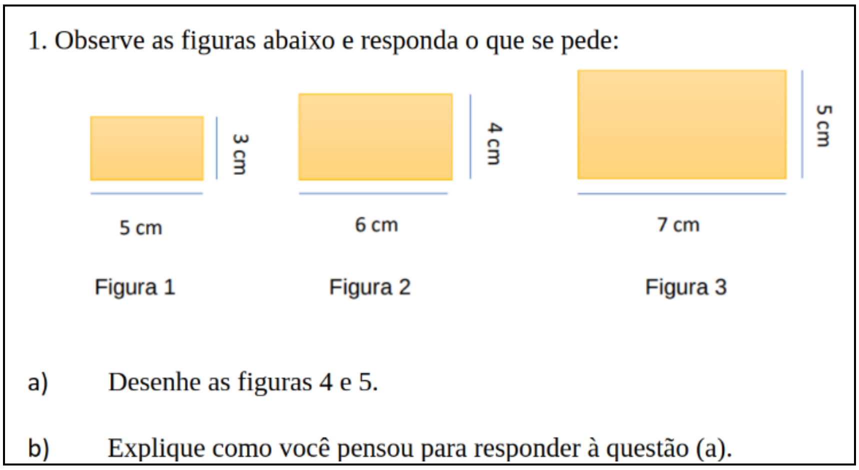
Para análise dos dados, utilizamos a técnica do emparelhamento, que segundo Laville e Dionne (1999) consiste em associar os dados recolhidos a um modelo teórico, com a finalidade de compará-los. Assim, tomando como modelo a *estrutura de generalização de sequências algébricas* (Figura 2), verificamos nas soluções obtidas pelas duplas quais etapas foram alcançadas, descrevendo-as, o que nos levou a caracterizar a pesquisa como sendo qualitativa e descritiva.

DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

Os sete alunos que concluíram a sequência tinham de 17 a 20 anos de idade. Cinco cursavam o primeiro semestre e dois o terceiro. Apenas um fez todo o ensino básico em escola privada. A relação com a matemática no ensino básico foi informada como “excelente” por mais da metade dos respondentes, como “boa” por dois e como “boa” no fundamental II e “péssima” no ensino médio por um dos alunos. Seis tiveram contato com atividades envolvendo generalização de padrões matemáticos antes de participarem da pesquisa.

Iniciamos a análise da sequência verificando nos itens *a* e *b* as *determinações sensíveis* em relação aos termos dados (Figura 4).

Figura 4 – Itens *a* e *b* da sequência de atividades


1. Observe as figuras abaixo e responda o que se pede:

a) Desenhe as figuras 4 e 5.

b) Explique como você pensou para responder à questão (a).

Fonte: Elaborado pelos autores

Uma determinação sensível desejável seria a de associarem a medida dos lados com o número da figura. No entanto, as duplas se detiveram na relação de recorrência, pois precisavam da figura anterior para determinar a seguinte, a exemplo de D2, que respondeu: “Analisamos que a cada figura, cada lado foi aumentando 1 cm”.

Os itens *c* e *d*, por sua vez, visaram iniciar um processo que levasse as duplas à busca da *característica comum* entre os valores das medidas dos lados e do perímetro da figura (Figura 5).

Figura 5 – Itens *c* e *d* da sequência de atividades

c) A partir de cada uma das figuras, preencha o quadro abaixo:

Número da figura	Valor das medidas dos lados	Valor do perímetro
1		
2		
3		
4		
5		

d) Escreva o que você observou em relação aos valores dos perímetros.

Fonte: Elaborado pelos autores

A característica comum notada foi que para descobrir o perímetro de uma figura bastava acrescentar 4 cm ao perímetro da figura anterior. Novamente, a percepção se baseou na relação de recorrência, a exemplo de D1, que respondeu: “Cada figura tem-se a aumentar 4 cm em seu perímetro”.

Os itens *e*, *f* e *g* (Figura 6) tiveram por objetivo fazer com que os alunos, se fosse o caso, abandonassem o pensamento recursivo, percebendo características comuns que os levassem à abdução analítica, que entendemos ser a descoberta de uma “regra” que permita encontrar termos não dados.

Figura 6 – Itens *e*, *f* e *g* da sequência de atividades

e) Na figura 10 qual seria o valor das medidas dos lados e do perímetro do retângulo?

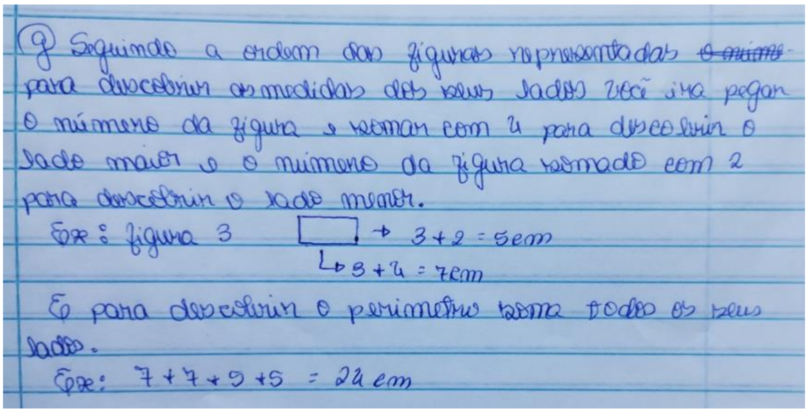
f) Na figura 25 qual seria o valor das medidas dos lados e do perímetro do retângulo?

g) Escreva como você explicaria ao seu colega como encontrar o valor das medidas dos lados e do perímetro do retângulo em uma figura qualquer.

Fonte: Elaborado pelos autores

Todas as duplas responderam corretamente os itens *e* e *f*, mas apenas D4 respondeu satisfatoriamente (Figura 7) o item *g* mostrando haver alcançado abdução analítica. Seus integrantes associaram a medida dos lados com o número da figura, expressando tal generalização em forma de expressões numéricas.

Figura 7 – Resposta da dupla D4 ao item *g*


g) Seguindo a ordem das figuras representadas ~~o mesmo~~ para descobrir as medidas dos seus lados você irá pegar o número da figura e somar com 4 para descobrir o lado maior e o número da figura somado com 2 para descobrir o lado menor.

Ex: figura 3 → 3 + 2 = 5cm

↳ 3 + 4 = 7cm

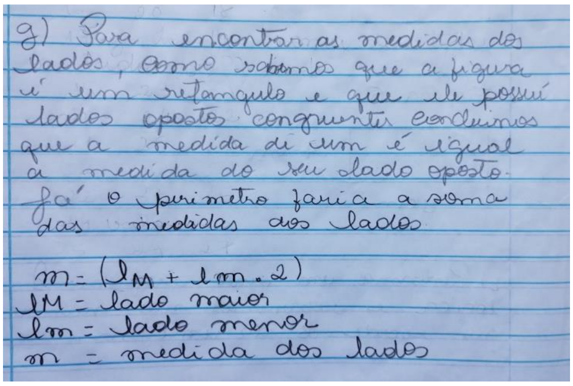
E para descobrir o perímetro soma todos os seus lados.

Ex: 7 + 7 + 5 + 5 = 24 cm

Fonte: Dados da pesquisa

As duplas D1 e D3 responderam o item *g* apresentando um conceito de como encontrar os valores das medidas dos lados de um retângulo e/ou de seu perímetro. D1, por exemplo, escreveu: “O perímetro é a soma dos lados das formas geométricas que possui lado e forma 2D”. Já D3 avançou um pouco mais, pois, além do conceito, seus integrantes tentaram escrever algebricamente como calcular a medida dos lados e o perímetro (Figura 8).

Figura 8 – Resposta da dupla D3 ao item *g*


g) Para encontrar as medidas dos lados, como sabemos que a figura é um retângulo e que ele possui lados opostos congruentes concluímos que a medida de um é igual a medida do seu lado oposto. Já o perímetro faria a soma das medidas dos lados

m = (lM + lm . 2)

lM = lado maior

lm = lado menor

m = medida dos lados

Fonte: Dados da pesquisa

As respostas de D1 e D3 nos fizeram conjecturar que não houve abdução analítica, levando-nos a duas reflexões: (1) possivelmente, o modo como formulamos a pergunta do item *g* criou certa ambiguidade, pois admitiu um tipo de interpretação que fugia do objetivo desse item; (2) houve dificuldade dos integrantes de D3 em expressar algebricamente o que estavam pensando. Ao escreverem $m = (l_M + l_m.2)$, acreditamos estarem se referindo ao cálculo do perímetro, apesar de afirmarem que *m* seria a medida dos lados e de não colocarem o número 2 multiplicando l_M.

Já D2 respondeu o item *g* da seguinte forma: "Utilizando o conceito de progressão aritmética, ou seja, uma progressão aritmética é uma sequência numérica em que cada termo, a partir do segundo, é igual à soma do termo anterior, com uma constante *r*". Apesar da resposta correta, consideramos que não houve abdução analítica, pois o fato de usarem uma fórmula pronta retira dos alunos a oportunidade de desenvolverem um processo de generalização.

Por fim, no item *h* (Figura 9) pretendíamos que as duplas atingissem a última etapa da estrutura de Radford (2021): a *dedução da fórmula*.

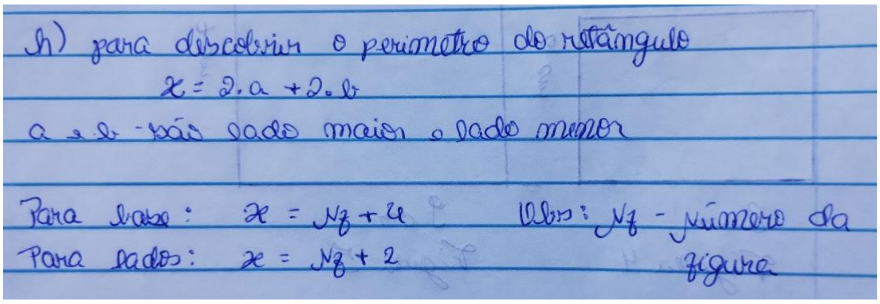
Figura 9 – Item *h* da sequência de atividades

h) Encontre uma **expressão algébrica** para determinar as medidas dos lados e para calcular o perímetro em uma figura qualquer e para calcular o perímetro do retângulo em uma figura qualquer.

Fonte: Elaborado pelos autores

D3 não respondeu este item D2 escreveu as fórmulas de PA: $a_n=a_1+(n–1)\cdot 1$ (para cálculo das medidas dos lados) e $a_n=a_1+(n–1)\cdot 4$ (para cálculo do perímetro). D1 escreveu: "Não entendi sobre o termo de expressão algébrica". Esse resultado mostra que essas duplas não conseguiram deduzir uma fórmula. Apenas D4 expressou algebricamente tanto a medida do perímetro quanto a dos lados (Figura 10).

Figura 10 – Resposta da dupla D4 ao item *h*



Fonte: Dados da pesquisa

Notamos aqui também uma dificuldade de D4 para expressar algebricamente a generalização distante, pois seus integrantes utilizaram a variável x para representar grandezas diferentes: a medida do lado menor ($x= N_f +2$), a do lado maior ($x= N_f +4$) e também a do perímetro ($x=2\cdot a+2\cdot b$). Tal fato demonstra que o ideal seria o uso de apenas duas variáveis, por exemplo $p=2\cdot(x+2)+2\cdot(x+4)$, onde p representa o valor da medida do perímetro, x o valor do número da figura, $(x+2)$ a medida do lado menor e $(x+4)$ a medida do lado maior. Consideramos, assim, que D4 deduziu uma fórmula, mas não soube expressá-la corretamente. Analisando o desempenho por dupla, percebemos que apenas D4 passou por todas as etapas da estrutura de generalização de sequências algébricas (Figura 2) proposta por Radford (2021).

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Aplicar a sequência foi para nós uma experiência produtiva. Percebemos como as atividades envolvendo padrões são importantes, ao trazerem muitas possibilidades de resposta. Como aponta Radford (2021), a aplicação de atividades como esta constitui um encontro que nos permite entrar em contato com outras vozes e perspectivas,

> (...) não para benefício pessoal, mas para a criação de uma obra (uma ideia) comum. Trata-se de um encontro com outras vozes e perspectivas através do qual os estudantes e a professora se implicam em comparações, distinções e tomadas de posição com respeito ao saber, o qual gera novas ideias ao longo do caminho, enquanto todos se constituem como subjetividades. (RADFORD, 2021, p. 192)

Nosso esforço em elaborar a sequência não foi portanto em vão, mesmo que os objetivos tenham sido apenas parcialmente satisfeitos, já que no item *g* a pergunta deu margem a duas interpretações, desviando duas duplas do foco principal que era a *abdução analítica* e consequentemente da *dedução da fórmula*. Observamos que a *estrutura de generalização algébrica das sequências* tem potencialidade para o ensino e aprendizagem de álgebra, pois incentiva o estudo por meio de sequências que visam levar os alunos a "pensar genericamente, perceber regularidades e explicitar essas regularidades através de estruturas ou expressões matemáticas, pensar analiticamente, estabelecer relações entre grandezas variáveis" (FIORENTINI; MIORIM; MIGUEL, 1993, p. 87). Além disso, essa estrutura de generalização pode constituir ferramenta útil para se acompanhar o desenvolvimento dos discentes durante a resolução da sequência, possibilitando ao docente perceber como os alunos estão pensando e, caso seja necessário, buscar alternativas para auxiliá-los no processo de generalização.

REFERÊNCIAS

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**: educação é a base. Brasília, MEC; CONSED; UNDIME, 2018.

FIORENTINI, D.; MIORIM, M.A; MIGUEL, A. A contribuição para repensar... a educação algébrica elementar. **Pro-posições**, v. 4, n. 1, p. 78-91, 1993.

FIORENTINI, D.; FERNANDES, F.L.P.; CRISTOVÃO, E.M. Um estudo das potencialidades pedagógicas das investigações matemáticas no desenvolvimento do pensamento algébrico. In: SEMINÁRIO LUSO-BRASILEIRO DE INVESTIGAÇÕES MATEMÁTICAS NO CURRÍCULO E NA FORMAÇÃO DO PROFESSOR. Lisboa, 2005. **Anais...** Lisboa: Universidade de Lisboa, 2005.

LAVILLE, C.; DIONNE, J. **A construção do saber**: manual de metodologia de pesquisa em ciências humanas. Tradução de Heloísa Monteiro e Francisco Settineri. Belo Horizonte: UFMG, 1999.

NARCISO, A.L.C; CARNEIRO, R.F. **Sequência didática para o ensino de álgebra nos anos iniciais do ensino fundamental**. Juiz de Fora: [s.n.], 2021.

RADFORD, L. Algebraic thinking and the generalization of patterns: a semiotic perspective. In: ALATORRE, S.; CORTINA, J.L.; SÁIZ, M.; MÉNDEZ, A. (Eds.). **Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, North American Chapter**. Mérida: Universidad Pedagógica Nacional, 2006. v. 1, p. 2-21.

RADFORD, L. O ensino-aprendizagem da álgebra na teoria da objetivação. In: MORETTI, V.; RADFORD, L. (Eds.). **Pensamento algébrico nos anos iniciais**: diálogos e complementaridades entre a teoria da objetivação e a teoria histórico-cultural. São Paulo: Livraria da Física, 2021. p. 171-195.

STACEY, K. Finding and using patterns in linear generalising problems. **Educational Studies in Mathematics**, v. 20, n. 2, p. 147-164, 1989.

VALE, I.; PIMENTEL, T. Padrões: um tema transversal no currículo. **Educação e Matemática**, Lisboa, v. 85, p. 14-20, 2005.