# O USO DE MODELAGEM MATEMÁTICA PARA O ENSINO DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS ATRAVÉS DO PROBLEMA DE FLAMBAGEM EM COLUNAS

**Eixo Temático: Modelagem Matemática, Resolução de Problemas e Investigação Matemática;**

Marcela Jesus Silva.Universidade Estadual de Feira de Santana.
marcelajesussilva20@gmail.com
Geraldo José Belmonte dos Santos.Universidade Estadual de Feira de Santana.
belmonte@uefs.br

**RESUMO**
Sabemos que o processo de aprendizagem é mais efetivo quando o que se aprende possui algum significado para o aprendente, o que pode ser alcançado com uma adequada contextualização de fenômenos do mundo real. Este trabalho foi produzido a partir do programa de Iniciação Científica da Universidade Estadual de Feira de Santana, tendo como foco apresentar a importância da modelagem matemática no ensino de equações diferenciais ordinárias (EDO), usando o problema de flambagem de colunas como contexto para o alcance de aprendizagem significativa de conhecimentos matemáticos. Este estudo enquadra-se no método qualitativo, utilizando como objeto de estudo um problema de engenharia estrutural relacionado ao comportamento mecânico de colunas de edificações, o qual está presente no nosso dia-a-dia. Neste estudo de caso, observamos que os conceitos matemáticos de equações diferenciais ordinárias podem ser melhor explicados e compreendidos quando analisados a partir do modelo matemático de representação do problema de flambagem de estruturas.

**Palavras-chave:** Contextualização. Modelagem matemática. Equações diferenciais ordinárias. Flambagem em colunas.

## 1. INTRODUÇÃO

A Matemática e outras áreas de conhecimento como Biologia, Física, Química, Lìnguas, Sociologia, Filosofia etc, são necessárias para que as pessoas possam traduzir e

entender adequadamente os fenômenos e acontecimentos do mundo à sua volta. No entanto, em cada uma dessas áreas, e na Matemática em particular, houve a necessidade de se desenvolver uma estrutura de conhecimento e linguagem próprias que dificultam a assimilação dos conhecimentos necessários, principalmente para os não especialistas, gerando problemas de aprendizagem, retenção e abandono escolar com elevado custo para o país. Não obstante os problemas relacionados à condição socioeconômica do estudante, o déficit de infraestrutura nas escolas e a falta de estímulos e condições de trabalho do corpo docente, existe uma constante demanda sobre os professores, nas diversas áreas de ensino, para melhorar seu processo de ensino-aprendizagem, com cobranças de mais contextualização e aplicação prática dos assuntos que são abordados em sala de aula (MAFFI et al., 2019).

Para algumas áreas de ensino a vinculação entre o que é ensinado e a realidade prática é muito mais direta e significativa, já em Matemática, quando imersa em si mesma, distancia-se das aplicações práticas relacionadas aos conceitos estudados em sala de aula, tornando difícil o processo ensino-aprendizagem nos cursos de Licenciatura e até mesmo nos cursos de cálculo e álgebra linear dos anos iniciais das Engenharias. Nesses casos, deve-se recorrer a metodologias de ensino e a implementação de didáticas diversificadas que sejam desafiadoras e motivadoras para os alunos, gerando desta forma aprendizagens significativas.

Segundo Bassanezi (2002), a modelagem matemática consiste, essencialmente, na arte de transformar situações da realidade em problemas matemáticos cujas soluções devem ser interpretadas na linguagem usual. A utilização da modelagem como recurso didático é um facilitador da aprendizagem dos estudantes, visto que possuirão uma aplicação direta na realidade dos assuntos abordados. Barbosa (2001) entende a modelagem como um ambiente de aprendizagem no qual os alunos são convidados a indagar e/ou investigar, por meio da matemática, situações da realidade nas quais está inserido e até mesmo vivencia.

A modelagem matemática por ser a representação de um aspecto da realidade possibilita dar sentido aos conhecimentos ensinados, levando o aluno a compreender a

sua importância e como aplicá-lo no mundo que o cerca, nas diversas questões sociais, ambientais, econômicas, tecnológicas, políticas, de saúde, do dia-a-dia e no exercício profissional. Tal ferramentas possibilita estimular a curiosidade e consequente receptividade dos estudantes, de forma a gerar uma aprendizagem significativa e interativa, e não apenas a aprendizagem dos conteúdos mecanizados em forma de fragmentos isolados. A aprendizagem realizada por meio da modelagem facilita a combinação dos aspectos lúdicos da matemática com seu potencial de aplicações (BASSANEZI, 2002; VALADARES et al., 2000).

Através da modelagem matemática, os estudantes são encorajados a desenvolverem habilidades de análise, abstração e resolução de problemas, enquanto aplicam conceitos e técnicas matemáticas para descrever fenômenos do mundo real. As atividades de Modelagem, nesta perspectiva, podem ser conduzidas de forma que, por meio da Matemática, o aluno identifique outras formas de ver o mundo em que vive, ampliando seu espectro de possibilidades de ação e interação na sociedade (SILVA; KATO, 2012).

Nesse contexto, as equações diferenciais desempenham um papel fundamental, pois fornecem uma linguagem matemática poderosa para descrever e compreender processos dinâmicos e variações ao longo do tempo. Nessa perspectiva, o presente trabalho objetiva apresentar uma abordagem de ensino de Equação Diferencial Ordinárias de segunda ordem, usando a modelagem matemática e a contextualização a partir de um problema de Engenharia, de forma a despertar o interesse dos atuais ou futuros profissionais educacionais de Matemática.

Desta forma, aqui será discutida a solução de Equações Diferenciais Ordinárias de segunda ordem por meio da modelagem matemática de um fenômeno de instabilidade (ou flambagem) de colunas, conforme Beer et al. (2012). A flambagem em colunas possibilita o estudo de conceitos matemáticos através de um problema encontrado facilmente na realidade, já que as estruturas das edificações que compõem a paisagem urbana das nossas cidades possuem ela na sua formação. Espera-se que a partir desta abordagem seja possível apresentar de forma satisfatória uma possível

contextualização/aplicação dos conceitos matemáticos para os graduados e graduandos em matemática.

Nesse caso específico, foi possível desenvolver um modelo físico reduzido do problema, de forma a demonstrar o modo (ou forma) e carga crítica de flambagem, proporcionando a visualização e o contato direto com o problema modelado e apresentado.

## 2. REFERENCIAL TEÓRICO

### 2.1 A Modelagem Matemática em sala de aula

As aulas contextualizadas desempenham um papel fundamental no ensino e aprendizagem, pois estabelecem uma conexão significativa entre os conceitos teóricos e sua aplicação prática no mundo real. A contextualização pode ser vista como um princípio de organização curricular de qualquer disciplina, possibilitando a aproximação dos conteúdos ao cotidiano dos estudantes. Quanto maior for a relação estabelecida entre os conceitos científicos e a realidade cotidiana, maior será a assimilação e a aprendizagem sobre o mesmo, formando uma rede de ideias e conhecimentos que estão ligados entre si. Ou seja, desviando-se do ensino mecânico e fragmentado, onde os objetos do conhecimento matemático são apresentados sem qualquer relação (PINHEIRO, 2005, p.109).

Segundo Silva (2007, p. 18), contextualizar não se resume ao cotidiano, que se caracteriza como situações corriqueiras associadas ao dia-a-dia das pessoas, mas sim às problematizações e investigações do mundo, já que é de conhecimento dos educadores em Matemática que não é algo simples relacionar qualquer conceito matemático a uma situação qualquer vivenciada, requerendo definir quais aspectos devem ser considerados dentre muitos outros relacionados à natural complexidade envolvida nos fenômenos.

A matemática aplicada se constitui através da observação humana dos acontecimentos naturais, do comportamento de certas situações do ambiente que nos cerca e a sua repetição, buscando formas de entender e explicar as manifestações dos fenômenos. Através dessa observação, modelos de comportamento são definidos para

representar acontecimentos e eventos futuros, sendo formalizados por modelos matemáticos, dados por um conjunto de símbolos e relações matemáticas que representam de alguma forma o objeto estudado ou o seu comportamento sob determinados estímulos. Ou seja, a modelagem matemática se consolida através da observação e descrição de eventos e fenômenos da realidade, onde através da conservação de quantidades físicas (e.g. massa, energia, quantidade de movimento etc) de interesse do mundo que nos cerca é possível determinar leis que expressam de forma generalizada os fenômenos do mundo da forma tão precisa quanto se deseja.

De outra forma, a modelagem matemática, segundo Bassanezi (2022, p.16), consiste na arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los interpretando suas soluções na linguagem do mundo real. Nessa nova perspectiva a modelagem matemática pode ser vista como forma de ensino-aprendizagem significativa e como forma de pesquisa científica, constituindo-se numa abordagem pedagógica que busca contextualizar o ensino da matemática, envolvendo os estudantes na resolução de problemas reais e complexos. Ao utilizar a modelagem matemática, os alunos são desafiados a identificar e formular problemas, coletar dados, construir modelos matemáticos, realizar análises e interpretar os resultados obtidos, desenvolvendo, desta forma, habilidades e competências necessárias para interpretar adequadamente o mundo à sua volta.

## 2.2 O problema modelo de flambagem em colunas

O mundo em que vivemos é repleto de edificações de todos os tipos e tamanhos, desde arranha-céus imponentes até pequenas casas residenciais. Essas construções são o resultado de um esforço humano contínuo para criar espaços funcionais e seguros, adaptados às necessidades da sociedade, sendo o sistema estrutural o responsável por garantir a integridade e segurança dessas edificações. As estruturas se caracterizam por serem as partes mais resistentes de uma construção, pois são as responsáveis por absorverem e transmitirem as ações (carregamentos) até as fundações, sendo essenciais para a manutenção da segurança e da solidez de uma edificação (SOUZA; RODRIGUES, 2008, p.5). Em geral, as ações a que as estruturas estão submetidas são:

o próprio peso dos materiais usados, vento, neve, variação de temperatura, cargas de uso (e.g. pessoas e veículos), mobiliários e equipamentos, sismos, dentre outros.

A estrutura de concreto de uma edificação é o esqueleto que a sustenta e a mantém estável quando sujeita aos carregamentos. Nela temos alguns elementos tais como: lajes, vigas e colunas. Na estrutura convencional as lajes se apoiam nas vigas e as vigas se apoiam nas colunas. Nesse caso, as colunas são elementos essenciais, pois são elas que levam o carregamento da estrutura até a fundação que está apoiada no solo. Em caso de falha de uma das colunas, toda a estrutura fica comprometida, pois as mesmas funcionam como se fossem as pernas da edificação. As colunas são elementos esbeltos verticais e estão submetidas a forças axiais de compressão, se constituindo em um elemento de grande importância na construção civil em virtude de sua grande utilização em praticamente todos os tipos de construções e também pelo fato de sua falha gerar, em geral, o colapso da estrutura (SOUZA; RODRIGUES, 2008, p.47).

Os sistemas estruturais podem falhar devido às condições de carregamento a que são submetidos, sejam devido ao peso próprio e a sobrecarga durante a construção ou pelo seu uso. Nas colunas, uma das falhas é a flambagem, que se configura como uma falha repentina devido a flexão lateral, configurando-se, no caso de uma coluna reta sem imperfeições e com carregamento centrado de compressão, em um problema de instabilidade com ponto de bifurcação. O matemático Leonhard Euler (1707-1783) foi o primeiro a estudar e propor uma modelagem matemática teórico do problema de instabilidade ou flambagem em colunas, investigando o equilíbrio de uma coluna comprimida por um peso no seu topo, calculando a carga que ocasionava deflexões laterais na coluna (EULER, 1947). Ele descobriu que o efeito de flambagem só ocorreria quando a carga axial aplicada sobre uma coluna se iguala ou excede a carga crítica de flambagem, tendo definido uma equação diferencial que possibilita a modelagem deste fenômeno e o cálculo da carga de flambagem.

Para o desenvolvimento da formulação do problema de flambagem e o cálculo da carga crítica $P_{cr}$, considere uma coluna prismática biapoiada $AB$ (ver Figura 1a), submetida a carga centrada de compressão $P$. Quando o valor crítico da carga $P$, ou seja,

o valor $P_{cr}$, é alcançado o sistema da coluna $AB$ deixa de ser estável e sofre, para qualquer perturbação, uma deflexão lateral (ver Figura 1b).

**Figura 1:** Colunas com as extremidades articuladas

**Fonte:** Beer et al. (2012).

Conforme apresentado por Beer et al. (2012), considerando a coluna deformada devido à flambagem, é possível usar a teoria de deflexão de vigas para o desenvolvimento da equação diferencial ordinária, também chamada de equação diferencial da linha elástica (linha centroidal deformada), a qual é dada por

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M(x)}{EI}, \tag{1}$$

onde, $M(x)$ é o momento de flexão na seção transversal da coluna no ponto $x$, $E$ é o módulo de elasticidade do material e $I$ é o momento de segunda ordem de área da secção transversal em relação ao eixo de flexão, sendo o produto $EI$ chamado de rigidez flexional (ver Figura 2). A coordenada $x$ é a distância da extremidade A da coluna até um certo ponto $Q$ de sua linha elástica e $y$ é a deflexão transversal desse ponto (Figura 2.a). Podemos visualizar uma coluna como uma viga na posição vertical submetida a uma força de compressão axial e sob flexão (deflexão lateral).

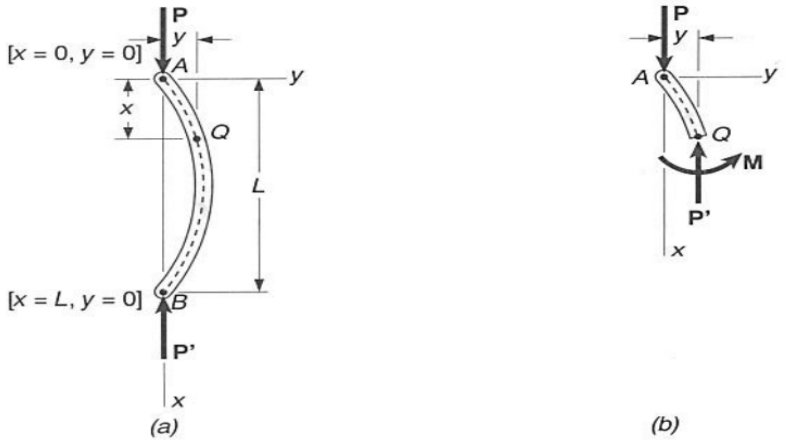
Fazendo o equilíbrio estático do trecho $AQ$ (Figura 2.b), percebemos que o momento fletor na seção $Q$ é

$$M = -P \cdot y. \tag{2}$$

Substituindo esse valor na equação (1), temos

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{M}{EL} = -\frac{P}{EL} \cdot y \quad \text{ou} \quad \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{P}{EL} \cdot y = 0 \tag{3}$$

**Figura 2:** Coluna sob flambagem com sistema de coordenadas e condições de contorno.




**Fonte:** Beer et al. (2012).

Fazendo

$$p^2 = \frac{P}{EI}, \tag{4}$$

podemos reescrever a equação (3) como

$$\frac{d^2y}{dx^2} + p^2 y = 0, \tag{5}$$

a qual representa uma equação diferencial ordinária de segunda ordem, homogênea, de coeficientes constantes. Assim, sua solução geral é dada por

$$y(x) = A \cdot sen(px) + B \cdot cos(px), \tag{6}$$

podendo ser verificada ao calcular a derivada $\frac{d^2y}{dx^2}$ e substituir na equação (5).

Aplicando as condições de contorno para os pontos $A$ e $B$ da coluna (Figura 2.a), teremos, fazendo primeiramente, $x = 0$ e $y = 0$ na equação (6), teremos $B = 0$, em seguida ao fazermos $x = L$ e $y = 0$ em equação (6), teremos

$$A \cdot sen(pL) = 0,$$

onde podemos ter duas situações para satisfazer a equação, $A = 0$ ou $sen(pL) = 0$. Na primeira condição a equação (6) será $y(x) = 0$ e a coluna terá seu eixo reto (Figura 2.a), ficando a coluna na posição primária (ou indeformada) sem flambagem. Para a segunda condição, temos $pL = n\pi$, onde $n$ é inteiro positivo. Substituindo $p = n\pi/L$ na equação (4), temos

$$P = \frac{n^2\pi^2 EI}{L^2}, \tag{7}$$

onde o menor valor possível para P será quando $n = 1$. Assim, a carga crítica é

$$P_{cr} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}. \tag{8}$$

Esta expressão é conhecida como *fórmula de Euler,* devido ao matemático Leonhard Euler (1707-1783). Ao aplicar $p = n\pi/L$ em (6), teremos para a condição $B = 0$

$$y(x) = A \cdot sen(\frac{\pi x}{L}). \tag{9}$$

Esta é a equação da linha elástica depois que ocorre o fenômeno da flambagem (Figura 2.b). Assim, o valor da deflexão máxima, $y_m = A$, fica indeterminado, pelo fato que a equação diferencial (5) é uma aproximação linear da equação diferencial real que descreve a linha elástica. Se $P < P_{cr}$, a condição $sen(pL)$ não pode ser satisfeita, e a solução dada em (9) não existe. Deve-se ter neste caso $A = 0$, e a única configuração possível para a coluna é a retilínea (Figura 1.a), considerada estável.

## 3. USO DA MODELAGEM MATEMÁTICA COMO ALTERNATIVA DIDÁTICA ATRAVÉS DO PROBLEMA DE FLAMBAGEM EM COLUNAS

A modelagem matemática utilizada no problema de flambagem de colunas possibilita o ensino/aprendizagem das equações diferenciais ordinárias, homogêneas e de coeficientes constantes, considerando a análise e aplicação dos conceitos teóricos em um problema real presente no dia-a-dia. Dado uma coluna qualquer e um peso aplicado sobre ela, o problema em questão será calcular o tamanho do peso necessário para que a coluna produza deflexão lateral repentina e sua estrutura não seja mais segura. Para analisar este problema, poderemos utilizar das equações diferenciais ordinárias, mais especificamente a equação da linha elástica que busca determinar a curva formada por uma estrutura reta e esbelta.

O domínio das técnicas associadas às equações diferenciais é essencial para graduandos em Matemática, uma vez que sua correta manipulação pode conduzi-los às

interpretações físicas adequadas em relação aos significados das equações. O entendimento da relação entre o fenômeno e o seu equacionamento matemático compõe uma visão completa da aplicação dos conceitos estudados.

O problema da flambagem é analisado através do uso da equação diferencial de segunda ordem, onde são feitas interpretações do problema para a modelagem da equação de forma que a mesma se encaixe no problema estudado de flambagem. Em conjunto com os alunos, o professor pode ser o mediador de tais análise e modelação, fomentando a aprendizagem dos alunos, incentivando que estes percebam as hipóteses que são levantadas para determinação da estrutura final. Em seguida, após a determinação da equação resultante, os alunos poderão encontrar a solução desta equação que ao final possuirá significado para eles e aplicação no mundo real.

Analisando quais as condições que interferem na estrutura desta coluna, quais condições são necessárias para a deformação ocorrer, quais condições ocasionam a sua flambagem, quais condições define o sistema como estável ou instável, os alunos terão uma aplicação clara e direta da aplicação de equações diferenciais ordinárias, levando, dessa forma, a uma compreensão mais clara para aqueles que possuem dificuldades para abstrair os conteúdos matemáticos por si só. No presente caso, pode-se relacionar o teórico e prático a partir de conceitos de engenharia civil, facilitando a compreensão para aqueles que possuem dificuldades no entendimento teórico-prático. Porém, muito exemplos de modelagem, em diferentes áreas, são usados no estudo de equações diferenciais.

Espera-se que ao expor a relevância conceitual e matemática do uso das equações diferenciais voltado à modelagem do fenômeno de flambagem de colunas, os futuros profissionais perceberão uma das possíveis aplicações do conteúdo que está sendo estudado em sala e utilizem de dinâmicas semelhantes em suas aulas, não deixando os fundamentos matemáticos não ocorrem apenas no mundo abstrato.

## 4. CONCLUSÃO

Concluímos assim, que é possível estabelecer relação entre conceitos matemáticos, que a priori apresentam-se sem contexto ou significado, com questões que estão presentes na sociedade. Desenvolvendo assim uma aprendizagem com significado e aplicações, diferenciando do método tradicional padronizado que constantemente é utilizado durante o ensino de componentes curriculares em Matemática. Em resumo, as aulas contextualizadas, especialmente aquelas que utilizam a modelagem matemática, desempenham um papel essencial no ensino da matemática, pois aproximam os conceitos teóricos da realidade dos alunos, promovendo um aprendizado mais significativo, motivador e aplicável em diferentes contextos.

Foi possível utilizar das Equações Diferenciais Ordinárias de forma objetiva e clara para modelagem e estudo de um fenômeno estrutural presente nas construções que estão presentes diariamente em nossas vidas, contribuindo assim, para comunidade acadêmica matemática.

## REFERÊNCIAS

BARBOSA, J. C. **Modelagem matemática e os professores: a questão da formação.** Bolema, Rio Claro, n.15, p. 5-23, 2001.

BASSANEZI, Rodney Carlos. **Ensino-aprendizagem com Modelagem matemática.** 3. ed. Campinas: Contexto, Agosto 2002. 386 p. ISBN 85-7244-207-3.

BEER, F. P., JOHNSTON, R. R. Jr., DEWOLF, J. T., MAZUREK, D. F. **Mechanics of Materials.** Ed. Mcgraw-Hill, 6th edition, New York, 2012.

EULER, L. **On the strength of columns.** Acad. Roy. Sci. Belles Letters Berlin Mém., v. 13, p. 252, 1759. English translation by J. A. Van den Broek, *American Journal of Physics*, v. 15, p. 315-318, 1947.

LIMA, L. M. S. **Motivação em sala de aula: A mola propulsora da aprendizagem**. In: SISTO, F. F; OLIVEIRA, G.C; FINI, L. D. T. (Org.) Leituras de psicologia para formação de professores. Rio de Janeiro: Vozes, 2000. p. 148-161.

MAFFI, C.; PREDIGER, T. L.; ROCHA FILHO, J. B.; RAMOS, M. G. **A contextualização na aprendizagem: Percepções de docentes de Ciência e Matemática.** Revista Conhecimento Online. Nova Hamburgo, v. 2, p. 77-92, 2019.

PINHEIRO, N. A. M. **Educação crítico-reflexiva para um ensino médio científico-tecnológico: a contribuição do enfoque CTS para o ensino-aprendizagem do conhecimento matemático.** 2005. 305 f. Tese (Doutorado em Educação Científica e Tecnológica) - Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, 2005.

SILVA, E. L. **Contextualização no ensino de química: ideias e proposições de um grupo de professores.** 2007. 143 f. Dissertação (Mestrado em Educação) - Faculdade de Educação, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2007.

SOUZA, Marta Francisca Suassuna Mendes; RODRIGUES, Rafael Bezerra. **Sistemas estruturais de edificações e exemplos.** UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS, [s. l.], p. 1-93, Julho 2008.

SILVA, C. da ., & KATO, L. A.. (2012). **Quais Elementos Caracterizam uma Atividade de Modelagem Matemática na Perspectiva Sociocrítica?.** Bolema: Boletim De Educação Matemática, v. 26, n. 43, p.817–838. Disponível em: <https://doi.org/10.1590/S0103-636X2012000300004>. Acesso em 07/07/2023.

VALADARES, J.A. [et.al.]. Teoria **da aprendizagem significativa: contributos do III Encontro Internacional sobre aprendizagem significativa**. Peniche, 2000, 146 p.