XXI EBEM
BARREIRAS
XXI ENCONTRO BAIANO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA
13 a 16 de agosto de 2025
ISSN 2175-1668

Investigando pavimentações do plano por polígonos regulares: uma atividade construída e desenvolvida por uma turma de licenciandos

Hellen Nunes Rocha
Universidade Estadual de Feira de Santana
Feira de Santana, BA – Brasil
https://orcid.org/0009-0007-5065-7413
hellrochaa@gmail.com

Ludmila Araújo da Silva Teixeira
Universidade Estadual de Feira de Santana
Feira de Santana, BA – Brasil
https://orcid.org/0009-0007-9792-4208
millateixeira871@gmail.com

Mariana Ferreira de Jesus
Universidade Estadual de Feira de Santana
Feira de Santana, BA – Brasil
https://orcid.org/0009-0006-5777-5896
marianaferreiradejesus05@gmail.com

Rosemeire de Fatima Batistela
Universidade Estadual de Feira de Santana
Feira de Santana, BA – Brasil
https://orcid.org/0000-0003-2779-7251
rosebatistela@uefs.br

Recebido • 04/04/2025
Aprovado • 05/06/2025
Publicado • 08/08/2025

Relato de Experiência

Resumo:
Este relato descreve uma atividade de investigação que foi elaborada e desenvolvida pela turma da disciplina de Instrumentalização para o Ensino da Matemática IV-M (60h) - Geometria do semestre 2024.1 da Universidade Estadual de Feira de Santana e realizada no Colégio Estadual de Tempo Integral Professora Ana Angélica Vergne de Morais no dia 18 de julho de 2024 para uma sala do 9º ano. A proposta objetivou conduzir os alunos a compreenderem o conceito de pavimentações do plano por polígonos regulares, além disso, trabalhar conceitos geométricos por meio da construção de bases caleidoscópicas e posterior visualização das respectivas pavimentações nos caleidoscópios. Esta experiência mostrou-se significativa, principalmente, pela potencialidade percebida para estimular o raciocínio lógico, incentivar o levantamento e questionamento de hipóteses, além da atração visual das pavimentações visualizadas nos caleidoscópios.

Palavras-chaves: Pavimentações. Polígonos. Ladrilhamento. Caleidoscópio. Atividade de investigação.

1 Introdução

A componente curricular EXA 381 - Instrumentalização para o Ensino de Matemática IV- M (60h) - Geometria[1] (INEM IV-M) do quarto

[1] Ementa: "Deve-se objetivar através dessa atividade a (re) colocação da geometria nos currículos da Educação Básica. Para tanto, estará constantemente sendo alimentada pelas dificuldades encontradas nas relações entre a Educação Básica e esse saber matemático. Na perspectiva da interdisciplinaridade, é válido ressaltar que os alunos estarão fazendo a recontextualização pedagógica de todas as disciplinas de caráter geométrico, estudo que se iniciou no 1º semestre. É nesse momento que se terá a oportunidade de discutir formas simplificadas de inserção nos Anos Finais do Ensino Fundamental e no Ensino Médio de situações-problemas que são trabalhadas nas disciplinas de LET 602 Sistema Geométrico de Representação, EXA 374 Geometria Analítica, EXA 375 Geometria Euclidiana Plana e EXA 380 Geometria Euclidiana Espacial. Esta disciplina deverá oferecer ao discente a oportunidade de trabalhar com a Geometria de forma dinâmica. A prática deve ser pensada a partir da análise e produção de material curricular e didático na perspectiva da Educação Matemática Crítica." (Uefs, 2028, p. 40).

Anais do XXI Encontro Baiano de Educação Matemática
v. 1, n. 21, p. 1-8, 2025

semestre da grade curricular do curso de Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual de Feira de Santana (UEFS), conforme entendemos, preza por oferecer oportunidades de trabalhar com a Geometria de forma dinâmica, analisando práticas, produzindo e analisando material curricular. O trabalho com caleidoscópios no ensino de geometria tem sido desenvolvido com estudantes desta disciplina, conforme explicitado em Santos e Batistela (2013), Batistela e Santos (2013), Oliveira (2014), Nascimento e Batistela (2021), entre outros.

No primeiro semestre do ano letivo de 2024, entre outras atividades desenvolvidas em INEM IV-M, vivenciamos2 uma experiência em que enquanto licenciandos vivenciamos a proposta utilizando a ferramenta Polypad3 e a construção das bases pelo método proposto por Murari (1999)4. A proposta desenvolvida na escola utiliza o kit de polígonos regulares proposto por Santos (2006) e a construção das bases a partir de uma região triangular, que possibilita trabalhar com conceitos e propriedades geométricas. O delineamento da atividade investigativa foi realizado por toda a turma de maneira conjunta e dialogada.

Assim, sob a supervisão da professora de INEM IV-M, os 14 licenciandos em Matemática, desenvolveram a atividade com 23 alunos, em uma turma do 9º ano do Colégio Professora Ana Angélica Vergne de Morais. Cada licenciando5 ficou responsável por conduzir a proposta com os alunos organizados em grupos com três ou quatro integrantes. A turma foi escolhida devido ao fato de uma das licenciandas já estar realizando atividades de estágio nesta sala.

Esta experiência foi considerada significativa por ter sido uma produção coletiva que em sua elaboração e desenvolvimento demandou uma gestão dinâmica em que todos os envolvidos podiam opinar, bem como, pela situação vivenciada que necessitou de ajustes, porém nosso planejamento nos passava segurança em realizar mudanças.

2 Pavimentações do plano por polígonos regulares

De acordo com Santos (2014), pavimentação ou ladrilhamento "consiste em revestir um determinado plano com estruturas geométricas, ladrilhos, de maneira que não sobrem espaços vazios

[2] Importante informar que a exigência do evento, que diz da obrigatoriedade de todos os autores e coautores estarem inscritos no evento, impediu que uma das autoras fosse incluída. Trata-se da estudante Micaele Silva Ferreira.
[3] Acesso em: https://polypad.amplify.com/p.
[4] O método proposto por Murari (1999): "as linha(s) de simetria de uma pavimentação que é (são) também linha(s) de simetria de um ou mais polígonos distintos (configurações monoedrais ou poliedrais, conforme o caso) dessa pavimentação, formarão "redes" de triângulos congruentes com os mesmos padrões de segmentos de reta formados em cada triângulo da tal rede. Tais segmentos podem ser provenientes dos lados dos polígonos que compõem a configuração, isto é, conterão segmentos (múltiplos) de lados (um ou mais) de polígonos que formam a pavimentação ou parte das linhas de simetria da pavimentação. Descobrindo, numa porção da pavimentação, triângulos eqüiláteros (para configurações: (3,3,3,3,3,3), (3,12,12), (4,6,12), (3,4,6,4), (6,6,6) e (3,6,3,6)) e isósceles (para configurações: (4,4,4,4) e (4,8,8)), formados pelas linhas de simetrias das redes, teremos, então, reveladas as bases para pavimentações do plano. (Murari, 1999, p.131).
[5] Neste texto utilizaremos a expressão "alunos" para nos referir aos estudantes da Educação Básica e "licenciandos" para estudantes da Licenciatura em Matemática da Universidade Estadual de Feira de Santana.

Anais do XXI Encontro Baiano de Educação Matemática
v. 1, n. 21, p. 1-8, 2025

e nenhuma estrutura sobreponha às outras." (Santos, 2014, p. 15). Para mais, o ladrilhamento é constantemente utilizado em diversas aplicações do dia a dia, a exemplo da arquitetura, do design de interiores, da pavimentação, da arte, da estamparia de tecidos, dentre outros.

O livro Matemática na Prática – módulo I: Desafio Geométrico traz a contextualização sobre ladrilhamento por meio da cantiga popular *"Se essa rua fosse minha..."*, apresentando um desafio proposto pela própria canção: ladrilhar uma rua inteira com pedrinhas de brilhantes. Os autores expõem que se estivéssemos diante desse mesmo cenário retratado na cantiga em 4.000 a.C., esse desafio já estaria resolvido a uma vez que civilizações como os egípcios, árabes e outros povos, já naquela época, possuíam um amplo conhecimento geométrico e utilizavam o ladrilhamento na construção dos seus templos, castelos e obras de arte. Seus padrões impressionantes são admirados até os dias de hoje.

O ladrilhamento, principalmente por ladrilhos retangulares, é comum no revestimento de superfícies por azulejos ou pisos. A disposição sistemática das peças permite cobrir o plano contínua e uniformemente sem deixar áreas expostas ou sobreposições. Contudo, o processo sistemático de dispor uma quantidade finita de ladrilhos não se restringe aos de quatro lados. Esse recobrimento pode ser estendido a ladrilhos cujos tamanhos dos lados sejam congruentes e o número de lados sejam três e seis, como os hexágonos regulares, o qual possui lados e ângulos congruentes. Também pode-se ladrilhar reunindo sistematicamente outros polígonos distintos combinados. Para além de contextos de usabilidade do ladrilhamento com pisos, azulejos, na natureza etc, o conceito de pavimentação é rico e complexo do ponto de vista matemático, envolve a soma dos ângulos ao redor de um vértice e a simetria dos polígonos e da pavimentação.

Um dos aspectos fascinantes do trabalho com pavimentações diz das inúmeras maneiras de cobrir um plano integralmente. Destacamos que, a construção das bases para visualização de pavimentações possibilita o trabalho com conceitos e propriedades fundamentais da geometria e podem ser uma oportunidade de trabalhar com régua e compasso.

Os ladrilhos explorados na atividade são os ladrilhamentos que chamamos de bem-comportados. Isto significa que devem obedecer a três condições ou às regras de bom comportamento, sendo eles: Não haver lacunas ou sobreposições entre eles; A soma dos ângulos internos ao redor de um vértice deve ser 360º; O mesmo arranjo/configuração dos polígonos ao redor do vértice. É válido destacar que também foi trabalhado com os alunos os casos em que os ladrilhamentos não obedecem a algum desses critérios, e por conta disso, não é possível pavimentar um plano completamente. Trabalhar os casos que ocorriam e não ocorriam a pavimentação completa são essenciais para o desenvolvimento da proposta, dessa forma, podemos contemplar a seguinte habilidade da Base Nacional Comum Curricular (BNCC):

> **(EF07MA27)** Calcular medidas de ângulos internos de polígonos regulares, sem o uso de fórmulas, e estabelecer relações entre ângulos internos e externos de polígonos, preferencialmente vinculadas à construção de mosaicos e de ladrilhamentos. (Brasil, 2018, p. 309).

Anais do XXI Encontro Baiano de Educação Matemática
v. 1, n. 21, p. 1-8, 2025

Diante do exposto acima, a atividade a que nos referimos neste relato explora o conceito de pavimentação, por meio da manipulação de polígonos regulares recortados em papel cartão, investigando as condições necessárias para ladrilhar um plano sem deixar espaço ou sobreposição. Para a visualização de algumas pavimentações utilizamos caleidoscópios educacionais de três espelhos, modificado para o trabalho em grupo, um dos instrumentos do conjunto explicitado por Batistela (2005).

3 A tarefa e seu desenvolvimento no 9º ano

A atividade foi desenvolvida em duas horas aula (100 minutos) e dividida em duas partes, uma que se concentra em levar os alunos a conceituar pavimentação do plano por polígonos regulares, por meio da exploração da junção de polígonos - recortados em papel - ao redor de um vértice e soma dos ângulos dos polígonos arranjados, passando pelo exemplo da configuração (5, 5, 10) que não pavimenta o plano, mas cuja soma dos ângulos ao redor do vértice totaliza 360º e, por um exemplo sobre a ordem dos polígonos ao redor do vértice nas pavimentações (3,6,3,6) e (3,3,6,6). Na outra parte os alunos seguiam instruções para desenhar e colorir regiões triangulares, que, quando colocadas no interior dos caleidoscópios com três espelhos permitem a visualização de alguma pavimentação 1-uniforme.6 As duas partes são conectadas por meio de um questionamento sobre a possibilidade de visualização da pavimentação (3,6,3,6) no caleidoscópio. A seguir os polígonos que compõem o kit polígonos (Figura 1).

Figura 1 - Kit polígonos

Fonte: elaborado pela turma de INEM IV-M.

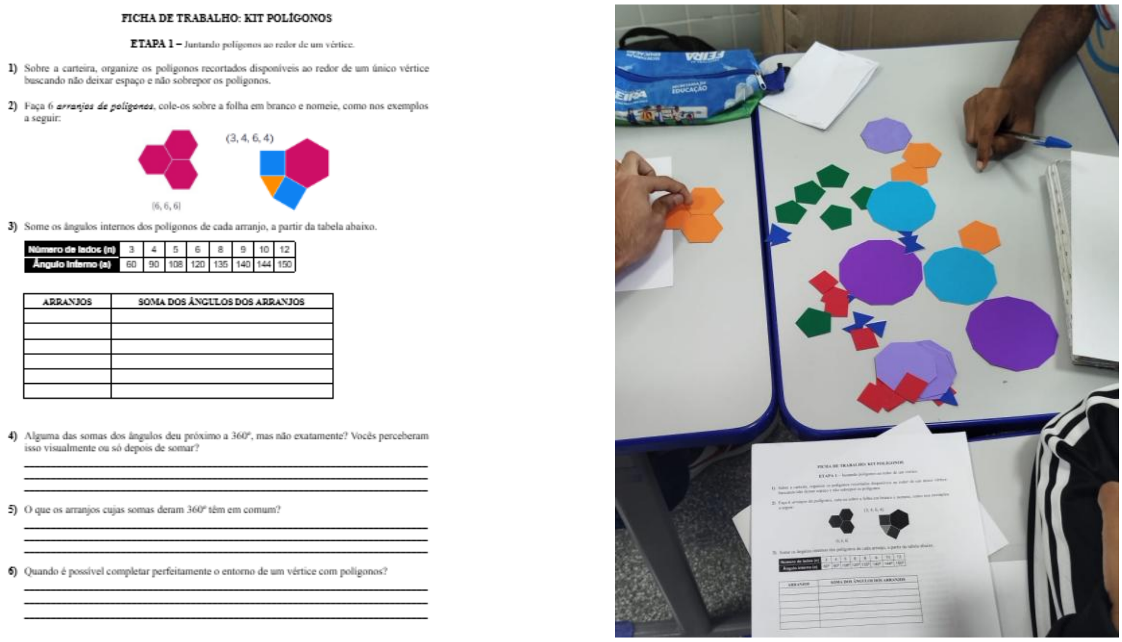
A ficha de trabalho foi composta por três etapas. Na Etapa 1 (Figura 2), o foco está em juntar polígonos ao redor de um vértice. Com isso, primeiro os alunos organizaram os polígonos recortados sobre a carteira ao redor de um único vértice, sem sobrepor ou deixar espaços entre eles.

---

[6] As pavimentações 1-uniforme caracterizam-se por apresentarem, em cada vértice da pavimentação, a mesma disposição dos polígonos, ou seja, a sequência de polígonos ao redor de cada vértice é a mesma em todos os vértices do plano. Essas pavimentações seguem regras específicas, como a soma dos ângulos internos ao redor de cada vértice ser igual a 360°, e são classificadas em 11 tipos distintos no plano euclidiano.

Anais do XXI Encontro Baiano de Educação Matemática
v. 1, n. 21, p. 1-8, 2025

Figura 2 - Ficha 1 e desenvolvimento da atividade na escola



FICHA DE TRABALHO: KIT POLÍGONOS

ETAPA 1 – Juntando polígonos ao redor de um vértice.

1) Sobre a carteira, organize os polígonos recortados disponíveis ao redor de um único vértice buscando não deixar espaço e não sobrepor os polígonos.

2) Faça 6 ***arranjos de polígonos***, cole-os sobre a folha em branco e nomeie, como nos exemplos a seguir:

3) Some os ângulos internos dos polígonos de cada arranjo, a partir da tabela abaixo.

Número de lados (n)	3	4	5	6	8	9	10	12
Ângulo interno (a)	60	90	108	120	135	140	144	150

ARRANJOS	SOMA DOS ÂNGULOS DOS ARRANJOS

4) Alguma das somas dos ângulos deu próximo a 360°, mas não exatamente? Vocês perceberam isso visualmente ou só depois de somar?

____
____
____

5) O que os arranjos cujas somas deram 360° têm em comum?

____
____
____

6) Quando é possível completar perfeitamente o entorno de um vértice com polígonos?

____
____
____

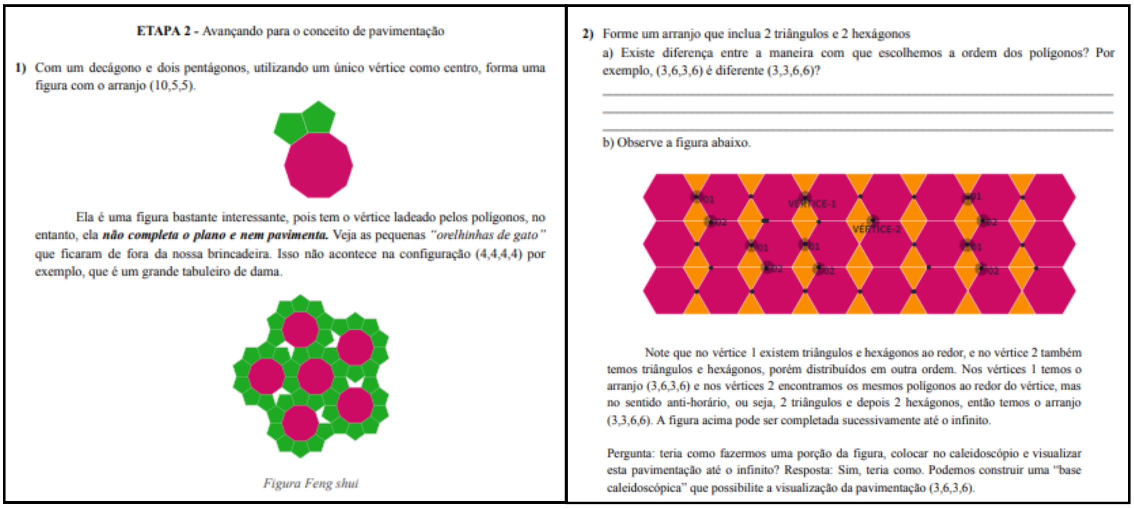
Fonte: elaborado pela turma de INEM IV-M.

Em seguida, a criação de seis arranjos diferentes de polígonos, colando-os em uma folha em branco e nomeando cada um dos arranjos. Após isso, o cálculo da soma dos ângulos internos dos polígonos de cada arranjo utilizando uma tabela fornecida na atividade com os valores de ângulos para cada tipo de polígono. Eles analisaram se alguma soma ultrapassava de 360° ou não chegava a 360º, além disso, refletiram sobre o que os arranjos com soma exata de 360° têm em comum. Por fim, determinaram as condições necessárias para completar o entorno de um vértice perfeitamente com os polígonos. Houve demora dos estudantes na realização da soma dos ângulos dos arranjos. Numa próxima oportunidade, recomendamos que os alunos utilizem calculadoras para realizar os cálculos, uma vez que, em nosso entendimento, o tempo despendido com as operações comprometeu a atividade, na medida em que ajustamos passando da Etapa 1 para a Etapa 3.

A respeito da Etapa 2 (Figura 3) não foi possível de ser desenvolvida com os alunos pois, ante o tempo que nos restou após a realização da Etapa 1, optamos por iniciarmos o trabalho com a construção das bases que envolvia os caleidoscópios. Nessa etapa, os alunos utilizariam um decágono e dois pentágonos para formar o arranjo (5,5,10), destaca-se que é importante que os alunos observem que estes polígonos não pavimentam o plano completamente, embora a soma dos ângulos dos pentágonos e do decágono totalize 360º. Em seguida, deveriam criar um novo arranjo com dois triângulos e dois hexágonos e discutem se a ordem dos polígonos ao redor do vértice influencia o resultado, comparando arranjos como (3,6,3,6) e (3,3,6,6). Nessa etapa, explora-se a possibilidade de pavimentar o plano com padrões que podem ser replicados infinitamente, como o arranjo (3,6,3,6), e discute-se a visualização desses padrões com auxílio de um caleidoscópio.

Anais do XXI Encontro Baiano de Educação Matemática
v. 1, n. 21, p. 1-8, 2025

Figura 3 - Ficha de trabalho, etapa 2.



ETAPA 2 - Avançando para o conceito de pavimentação

1) Com um decágono e dois pentágonos, utilizando um único vértice como centro, forma uma figura com o arranjo (10,5,5).

Ela é uma figura bastante interessante, pois tem o vértice ladeado pelos polígonos, no entanto, ela ***não completa o plano e nem pavimenta.*** Veja as pequenas *"orelhinhas de gato"* que ficaram de fora da nossa brincadeira. Isso não acontece na configuração (4,4,4,4) por exemplo, que é um grande tabuleiro de dama.

Figura Feng shui

2) Forme um arranjo que inclua 2 triângulos e 2 hexágonos

a) Existe diferença entre a maneira com que escolhemos a ordem dos polígonos? Por exemplo, (3,6,3,6) é diferente (3,3,6,6)?

b) Observe a figura abaixo.

Note que no vértice 1 existem triângulos e hexágonos ao redor, e no vértice 2 também temos triângulos e hexágonos, porém distribuídos em outra ordem. Nos vértices 1 temos o arranjo (3,6,3,6) e nos vértices 2 encontramos os mesmos polígonos ao redor do vértice, mas no sentido anti-horário, ou seja, 2 triângulos e depois 2 hexágonos, então temos o arranjo (3,3,6,6). A figura acima pode ser completada sucessivamente até o infinito.

Pergunta: teria como fazermos uma porção da figura, colocar no caleidoscópio e visualizar esta pavimentação até o infinito? Resposta: Sim, teria como. Podemos construir uma "base caleidoscópica" que possibilite a visualização da pavimentação (3,6,3,6).

Fonte: elaborado pela turma de INEM IV-M.

Ademais, na Etapa 3, os alunos constroem bases para visualização no caleidoscópio (Figura 4). A base para visualização da pavimentação (3,6,3,6) deveria ser construída num triângulo equilátero de cartolina, com medidas adequadas para perfeito ajuste entre os três espelhos do caleidoscópio, por meio da união dos três pontos médios dos lados do triângulo de cartolina e colorindo-o com cores diferentes. Conforme figura abaixo:

Figura 4 - Base para visualização da pavimentação (3,6,3,6)

Fonte: elaborado pelas autoras.

A construção da base (3,4,6,4) solicita: i) Marque o ponto médio de um dos lados do triângulo e chame-o de M; ii) Utilize o transferidor, posicionando-o sobre o ponto M, alinhando-o com o lado do triângulo;; iii) A partir de M, meça e marque dois ângulos de 45° no lado do triângulo; iv) Trace uma reta pontilhada a partir de M nos dois ângulos marcados até que cada uma intercepte um dos outros dois lados do triângulo. Nomeie os pontos de interseção como A e B; v) Por meio de régua e esquadro, trace as retas perpendiculares de A e B ao primeiro lado do triângulo; vi) Una os pontos A e B, formando um retângulo dentro do triângulo original; vii) Pinte o triângulo maior de uma cor, o retângulo de outra e os dois triângulos menores com uma terceira cor; viii) Posicione a base construída entre os três espelhos e aprecie o visual obtido.

A terceira base solicita que, com o caleidoscópio isósceles retângulo, construa uma base para visualizar um tabuleiro de xadrez. A última era uma construção livre numa base de triângulo equilátero ou isósceles retângulo.

Essa atividade de investigação articula conceitos geométricos e visuais, promovendo o desenvolvimento de habilidades matemáticas por meio da investigação das propriedades dos polígonos e dos padrões que emergem de suas combinações. Por meio da construção das bases para visualização das pavimentações são trabalhados conceitos e propriedades de figuras geométricas.

4 Considerações finais

No que se refere à nossa formação como professores, a experiência vivenciada revelou a importância do planejamento ao mesmo tempo em que a realização de ajustes pode-se tornar uma necessidade, em detrimento da não cumprimento do objetivo da atividade. O desafio de despertar o interesse dos alunos e envolvê-los na atividade esteve presente desde a elaboração da proposta. A atividade investigativa mostrou-se adequada ao trabalho com ladrilhamento, pois conduz os alunos ao entendimento e envolve o trabalho com conceitos geométricos fundamentais. A construção do conceito de pavimentação do plano por meio de polígonos regulares e a exploração de visuais de algumas pavimentações por meio dos caleidoscópios, e o desafio de construção de bases mostrou-se favorável para o despertar da criatividade e da percepção espacial.

No entanto, apesar do bom desenvolvimento da atividade, os licenciandos destacaram que o tempo limitado representou um desafio significativo. O caráter interativo e a profundidade dos conceitos exigiram mais tempo do que o disponível, o que exigiu um ajuste. De forma geral, os licenciandos reconheceram que a atividade foi bem-sucedida e reforçam a importância de iniciativas pedagógicas que integram teoria e prática no ensino da matemática e de práticas pedagógicas exploratórias que busquem tornar a matemática mais acessível.

Referências

BATISTELA, R. F. **Um Kit de Espelhos Planos para o Ensino de Geometria**. 2005. 134 p. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2005.

BATISTELA, R. F.; SANTOS, M. R. A matemática possível de ser trabalhada com a utilização de espelhos planos, espelhos articulados e caleidoscópios. In: XI ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 11., 2013, Curitiba. **Anais...** Curitiba: UFPR, 2013. p. 1-14.

BRASIL. Ministério da Educação. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília, 2018.

DIAS, C. C.; SAMPAIO, J. C. V. **Desafio geométrico:** Módulo I. Cuiabá, MT: Central de Texto, 2010. (Matem@tica na pr@tica. Curso de especialização para professores do ensino médio de matemática). Disponível em:https://www.dm.ufscar.br/~sampaio/DesafioGeometricoModuloI.pdf. Acesso em: 12/03/2025

Anais do XXI Encontro Baiano de Educação Matemática
v. 1, n. 21, p. 1-8, 2025

MURARI, C. **Ensino-aprendizagem de geometria nas 7ª e 8ª séries via caleidoscópios**. 1999. Tese (Doutorado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 1999.

NASCIMENTO, T. L.; BATISTELA, R. F. A visão de futuros professores acerca do desenvolvimento de uma atividade de ensino de geometria utilizando caleidoscópios. **Em Teia | Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana**, [S. l.], v. 12, n. 4, 2021. DOI: 10.51359/2177-9309.2021.248809.

OLIVEIRA, L. S. **Ensino de polígonos regulares por meio de caleidoscópios numa escola rural do município de Coração de Maria/BA**. 2014. 28 f. Trabalho de Conclusão de Curso (Graduação em Licenciatura em Matemática) – Universidade Estadual de Feira de Santana, Feira de Santana, 2014.

SANTOS, L. S. **Ladrilhamento no Plano: Uma Proposta de Atividade para o Ensino Médio**. 2014. 64 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) – Universidade Estadual do Sudoeste da Bahia, Vitória da Conquista, 2014.

SANTOS, M. R. **Pavimentações do plano: um estudo com professores de Matemática e Arte**. 2006. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, 2006.

SANTOS, M. R.; BATISTELA, R. F. O uso dos caleidoscópios em cursos de licenciatura em matemática: possibilidades investigativas. In: XI ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 11., 2013, Curitiba. **Anais...** Curitiba: UFPR, 2013. p. 1-12.

UNIVERSIDADE ESTADUAL DE FEIRA DE SANTANA. **Projeto pedagógico do curso de Licenciatura em Matemática**. Feira de Santana, BA: UEFS, 2018.