

Explorando produtos notáveis por composição de áreas de retângulos com sinal: Uma abordagem pedagógica inovadora

Resumo:

Este texto apresenta resultados parciais de uma pesquisa em desenvolvimento, que investiga o ensino de produtos notáveis por meio de áreas de retângulos com sinal. Busca estabelecer uma representação geométrica inovadora para os produtos notáveis, possibilitando aos estudantes nesse processo a criação de hipóteses, o teste e a validação de conjecturas. A pesquisa adotou uma abordagem qualitativa caráter qualitativo em que foi realizado um Estudo de Caso com estudantes da Educação Básica aplicando um novo recurso didático a fim de verificar o avanço dos estudantes quanto a sua aprendizagem sobre produtos notáveis e expressões algébricas, fomentando para os professores uma estratégia para o ensino. Os resultados e as discussões até o momento apontam que os produtos notáveis podem ser abordados de forma mais dinâmica e visual, em que diferentes abordagens e reformulações são imprescindíveis para sua compreensão.

Palavras-chaves: Áreas. Áreas de retângulos. Produtos notáveis. Materiais manipuláveis. Aprendizagem matemática.

1 Introdução

O aprendizado da matemática é indispensável, pois contribui de forma crucial para a formação da estrutura do conhecimento humano, desenvolvendo habilidades de raciocínio lógico, abstração e argumentação (Ávila, 2010). A matemática ensina a pensar de forma estruturada e lógica, ajudando a desenvolver habilidades de resolução de problemas, análise e tomada de decisões. Esse tipo de pensamento é útil não apenas na matemática, mas também em muitas outras áreas da vida. A matemática está presente em muitos aspectos do cotidiano, como finanças pessoais, compras, cálculos de tempo e distância, além de ajudar a compreender dados e informações que encontramos diariamente. Esse entendimento reforça a importância do ensino da Matemática, conforme aponta Ávila (2010).

Weberson Sousa dos Anjos

Universidade Federal do Oeste da Bahia
Barreiras, BA – Brasil

 <https://orcid.org/0000-0002-4608-4575>
✉ weberson.a0216@ufob.edu.br

Edwin Oswaldo Salinas Reyes

Universidade Federal do Oeste da Bahia
Barreiras, BA – Brasil

 <https://orcid.org/0009-0005-4367-2522>
✉ edwin.reyes@ufob.edu.br

Ana Maria Porto Nascimento

Universidade Federal do Oeste da Bahia
Barreiras, BA – Brasil

 <https://orcid.org/0000-0002-7640-9617>
✉ ana.nascimento@ufob.edu.br

Recebido • 04/04/2025
Aprovado • 05/06/2025
Publicado • 08/08/2025

Comunicação Científica

Enquanto educadores, é muito comum ouvirmos: Para que tanta Matemática professor? Para que serve tudo isso? Onde vou usar esse conteúdo na minha vida? Perguntas como essas nem sempre possuem respostas curtas ou imediatas que justifiquem o ensino da Matemática. Entretanto, para além do exposto no parágrafo anterior, Ávila (2010) expõe que o ensino da Matemática se justifica ainda pelos elementos enriquecedores do pensamento matemático na formação intelectual do Estudante, seja pela exatidão do pensamento demonstrativo que ela exhibe, seja pelo exercício criativo da intuição, da imaginação e dos raciocínios por indução e analogia.

Ao longo da história da Matemática, muitos estudiosos pesquisadores se debruçaram sobre livros, artigos, relatos, pesquisas, etc, para entender como o sujeito aprende matemática. Esse processo investigativo resultou no desenvolvimento de diversas teorias e metodologias de ensino, que vão desde abordagens tradicionais, focadas na memorização e repetição, até metodologias mais modernas e interativas, que valorizam a compreensão conceitual e a aplicação prática (Fiorentini e Miorim, 1990).

Muitas destas investigações e debates fundamentam-se no fato de que o aproveitamento dos estudantes da educação básica em matemática em avaliações nacionais como o Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB), o Programa Internacional de Avaliação de Estudantes (PISA) e a Prova Brasil, está aquém das metas estabelecidas. Nos trabalhos de Fiorentini e Miorim (1990), Lorenzato (2006) e Smole e Diniz (2007) encontram-se discussões sobre esses resultados e a proposição de estratégias pedagógicas para o ensino da matemática na educação básica. Tais autores protagonizam relatos e estratégias pedagógicas para o ensino da matemática na educação básica, trazendo resultados significativos e práticos para o professor que ensina matemática.

Alguns desses resultados significativos, indicam que as estratégias didático pedagógicas como uso de jogos e de Tecnologias Digitais da Informação e Comunicação (TDICs) em sala de aula fomentam nos estudantes, momentos de criatividade, aprendizado e motivação para estudar matemática. Neste contexto alguns autores apontam a importância do uso de materiais didáticos, que de acordo com Lorenzato (2006), é descrito como qualquer instrumento útil ao processo de ensino-aprendizagem. Material didático (MD) pode ser um giz, uma calculadora, um filme, um livro, um quebra-cabeça, um jogo, uma embalagem, uma transparência, entre outros.

Esta pesquisa centra-se em estudar um material didático manipulável físico específico, o qual poderá possibilitar ao estudante o entendimento de propriedades matemáticas oportunizando a interação de forma prática e sensorial com conceitos abstratos. Esse MD físico é denotado por material manipulável e será utilizado neste estudo para representar áreas de retângulos com sinal.

Nesse sentido, apresentamos um novo recurso pedagógico associado às áreas de retângulos com sinal a qual fornece uma nova alternativa para explicar o conceito de fatoração envolvendo produtos notáveis por meio da manipulação de materiais possibilitando aos estudantes relacionarem conceitos algébricos abstratos a figuras geométricas, o que abre espaço para explorar hipóteses, fazer e testar conjecturas as quais poderão ser validadas dentre outras maneiras pela construção geométrica.

Sendo assim, o objetivo geral deste trabalho se evidencia em desenvolver um novo recurso pedagógico alicerçado na representação geométrica para explicar os conceitos de produtos notáveis. E para isso, buscamos apresentar uma revisão teórica dos produtos notáveis e suas propriedades algébricas, aplicando esse recurso em uma sala de aula de escola da educação básica de modo a analisar sua eficácia em comparação com métodos tradicionais.

2 Metodologia

Esta pesquisa possui caráter qualitativo e, conforme Fiorentini (1994), busca compreender as especificidades educacionais a partir da interação entre os sujeitos e o contexto em que estão inseridos. Conduzida pelo professor-pesquisador, trata-se de uma pesquisa de campo realizada com 12 estudantes da primeira série do Ensino Médio, com o objetivo de investigar como o uso de materiais manipuláveis pode facilitar a compreensão de produtos notáveis.

Para isso, foram confeccionados retângulos sinalizados, onde diferentes áreas representavam valores positivos e negativos, permitindo a visualização simultânea das operações algébricas envolvidas. Segundo Grando (2000), materiais manipuláveis ampliam as possibilidades de aprendizagem ao tornar conceitos abstratos mais concretos e acessíveis.

Isso vai a encontro ao que afirma Lorenzato (2006) que os materiais manipuláveis são ferramentas fundamentais no ensino da matemática, pois permitem que os estudantes construam o conhecimento de maneira ativa, explorando conceitos por meio da experimentação e visualização.

Nossa abordagem também encontra respaldo na teoria de registros de representação semiótica de Duval (2003), que aponta a necessidade de múltiplas representações para a aprendizagem efetiva da matemática.

O trabalho foi desenvolvido em um colégio da rede estadual de educação do estado do Tocantins na cidade de Combinado com uma turma de 1º ano do Ensino Médio. A cidade com pouco mais de 4.800 habitantes possui 3 colégios estaduais, mas apenas um oferece o ensino médio.

O colégio estadual Joaquim de Sena e Silva onde foi realizado a pesquisa possui 8 turmas, sendo duas turmas de primeiro ano, três turmas de segundo ano e três turmas de terceiro ano. O colégio atende 198 estudantes cuja faixa etária varia de 15 a 21 anos. Esta promove uma gestão democrática, envolvendo a participação de todos nas tomadas de decisões, pois compreende os valores presentes no processo educacional. A turma escolhida para o trabalho foi a do 1º ano composta por 12 estudantes.

De início, foi explicado aos estudantes a importância da matemática para a evolução humana e que em meio a tanto avanço tecnológico existe sempre a presença de números e códigos matemáticos, isto é, acreditamos que a matemática não é uma ciência simples, pronta e acabada, ela está em constante aperfeiçoamento e aberta a novas descobertas e invenções, fazendo um paralelo com Lakatos (1976) em que argumenta que a matemática é um campo em constante evolução, desenvolvendo-se por meio de conjecturas e refutações, e não como um corpo de verdades imutáveis.

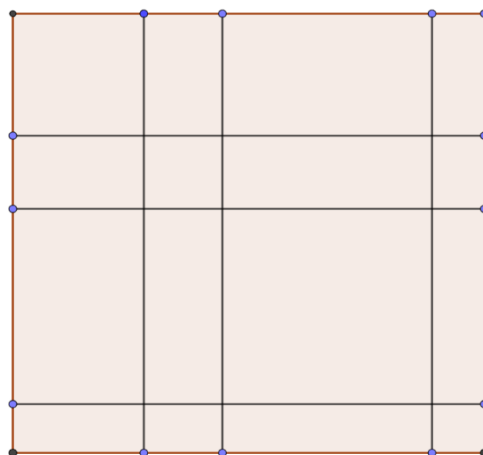
Depois disso foi aplicada uma atividade diagnóstica aos estudantes afim de identificar as habilidades e conhecimentos prévios, bem como suas dificuldades e necessidades de aprendizagem em relação ao conceito de produtos notáveis.

Entendemos que a avaliação diagnóstica é uma ferramenta essencial para identificar as potencialidades e dificuldades dos estudantes, sendo fundamental para o planejamento e a execução de práticas pedagógicas que promovam a aprendizagem de todos." (Brasil, 2018, p. 56). A partir desta atividade foram planejadas as ações e ajustadas as estratégias de ensino para a realidade dos estudantes. Posteriormente a realização da atividade diagnóstica, as etapas foram: Introdução teórica, demonstração, prática guiada, exploração independente e discussão e reflexão.

Em seguida confeccionados os materiais necessários à aplicação do recurso como cartolinas dupla face cores verde e cinza, tesouras de cortar papel, régua de poliestireno ou madeira e caneta preta para cada participante.

A confecção dos quadrados e retângulos com sinal deram-se em sala de aula sob orientação do professor pesquisador. Primeiramente, foi desenhado no software de geometria dinâmica *geogebra* os quadrados e retângulos com medidas e áreas de corte para facilitar a visualização pelos estudantes como mostra a figura 1 abaixo.

Figura 1- Quadrado subdividido em retângulos e quadrados

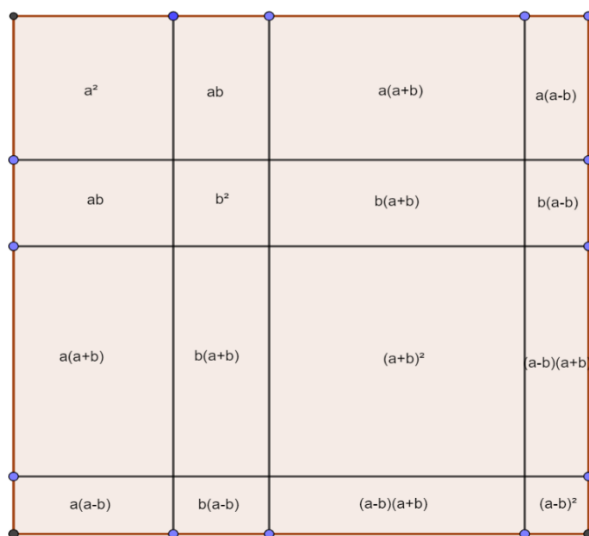


Fonte: Diário do Pesquisador, 2024

Após mostrar aos estudantes a construção deste quadrado e das divisões por meio de retas perpendiculares no software, foi solicitado que eles recortassem de uma cartolina de medida 40cm x 50cm um quadrado de lado 18cm.

Em seguida, foi indicado que para a construção das retas perpendiculares os 18cm fossem divididos em quatro seguimentos respectivamente iguais a 5cm, 3cm, 5cm + 3cm, 5cm – 3cm. Com as divisões e a determinação dos quadrados e retângulos, os estudantes escreveram no centro de cada um deles sua área trocando os valores numéricos pelas letras a e b ficando o resultado como o descrito na figura 1 abaixo.

Figura 2 - Quadrado subdividido em quadrados e retângulos com marcações



Fonte: Diário do Pesquisador, 2024

Para a construção pelos Estudantes, tomamos $a = 5$ e $b = 3$. Após as marcações na cartolina como indicadas na imagem acima, os quadrados e retângulos foram recortados e agrupados como indica a figura 3, onde as inscrições presentes na imagem após o desmembramento das partes foram transcritas para o lado oposto de cor vermelha da cartolina para representar a “área de sinal”.

Figura 3 - Distribuição de forma organizada do material concreto



Em resumo, seja a, b dois números reais positivos tais que $a > b > 0$. Observe-se que $a + b > 0$, $a - b > 0$ e $b - a < 0$. Por outro lado, a área de um retângulo é definida como o produto de sua base ($B > 0$) pela sua altura ($H > 0$). Matematicamente, a fórmula para calcular a área A de um retângulo é dada por $A = BH > 0$. Implicitamente, a área de um retângulo é definida de forma que seja um valor maior que zero, pois é dado como o produto de dois números positivos. No entanto, podemos definir a área com sinal de um retângulo, atribuindo um sinal (+ ou -) na área do retângulo em relação ao sinal de sua base e sua altura, isto é, A ou H podem ser dois números reais quaisquer diferentes de zero, desta forma, o sinal da área do retângulo com base $|B|$ e altura $|H|$ fica inteiramente determinado pelo sinal do número real BH , onde $| \cdot |$ é a função valor absoluto.

3 Resultados e discussões

Os resultados se mostraram promissores e dialogam com nossas expectativas. Como explicitado anteriormente, os estudantes foram submetidos a uma avaliação diagnóstica contendo sete perguntas objetivas, sendo quatro delas múltipla escolha com quatro alternativas e três questões com alternativas a e b (verdadeiro ou falso). A figura 4 abaixo mostra um recorte de duas questões da avaliação para análise.

Figura 4 - Avaliação diagnóstica

Prova de Múltipla Escolha - Produtos Notáveis (Primeira Prova)

Escolha a opção correta para cada questão. Justifique a sua resposta.

1. Qual é o resultado do produto notável $(a + b)^2$?

(a) $a^2 + b^2$

(c) $a^2 + 2ab + b^2$

(b) $a^2 + ab + b^2$

(d) $a^2 - 2ab + b^2$

2. Qual é o resultado do produto notável $(a - b)^2$?

(a) $a^2 - b^2$

(c) $a^2 - ab + b^2$

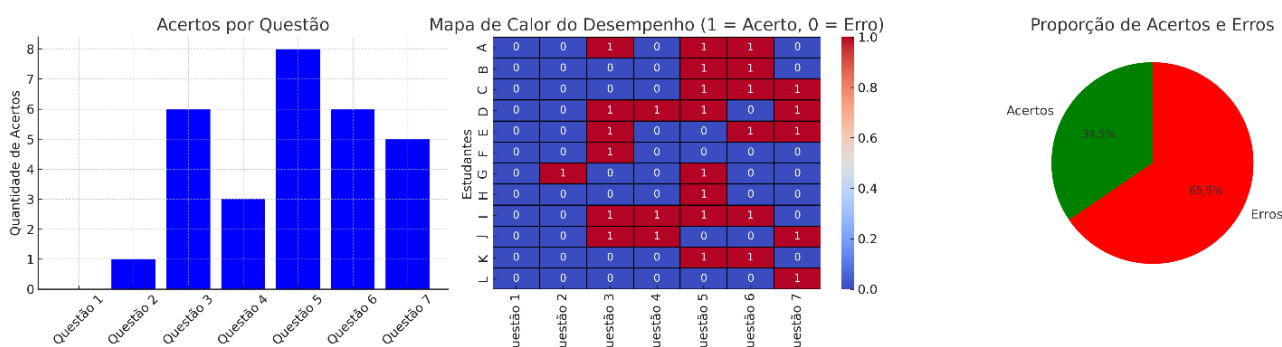
(b) $a^2 - 2ab + b^2$

(d) $a^2 + 2ab + b^2$

Fonte: Diário do Pesquisador, 2024

As questões com mais erros foram a de número 1 e número 2. A figura 5 abaixo mostra os resultados da avaliação diagnóstica em três perspectivas distintas.

Figura 5 - Análise gráfica da avaliação diagnóstica



Por meio da análise do gráfico de calor (Heatmap), observamos que na questão 1 não houve acertos, e por meio de uma análise mais detalhada notamos que 10 estudantes marcaram a opção $a^2 + b^2$ e 2 marcaram $a^2 + ab + b^2$. Já na questão 2, apenas 1 acertou e 8 estudantes marcaram $a^2 - b^2$ como solução.

Verificamos assim que os estudantes não tinham conhecimento sobre manipulações algébricas como propriedade distributiva da multiplicação e potenciação para abrir alguns produtos notáveis como $(a + b)^2$ e $(a - b)^2$ cometendo um erro muito comum que é sugerir como solução respectivamente $a^2 + b^2$ e $a^2 - b^2$.

A questão 5 foi a que teve mais acertos, sendo 8 respostas corretas e 4 incorretas. Vale registrar algumas falas dos estudantes durante a entrega da avaliação diagnóstica como a do Estudante B, D, F e K:

Estudante B: Misericórdia professor! Está parecendo prova de português... Só tem letras.

Estudante K: Acho que errei todas! Não sei fazer isso não.

Estudante F: Fui pela regra dos sinais.

Estudante D: Muito complicado! Parecia língua maia.

Sobre já terem estudado produtos notáveis no ensino fundamental, alguns estudantes afirmaram: “Se estudei, não me lembro”, “Não vi isso não professor”, “Nunca estudei isso na minha vida!” Como mencionado anteriormente, esse desconhecimento do conteúdo evitou uma “cola” por saber o resultado previamente.

Após a aplicação da atividade diagnóstica, houve a introdução teórica do conteúdo, demonstração e prática guiada com o recurso didático criado e em seguida a exploração independente e discussão e reflexão. As discussões geraram reflexões e asseguraram a criação de hipóteses e descobertas diversas sobre a representação dos produtos notáveis.

Figura 6 - Estudantes tendo o primeiro contato com o material manipulável



Fonte: Diário do Pesquisador, 2024

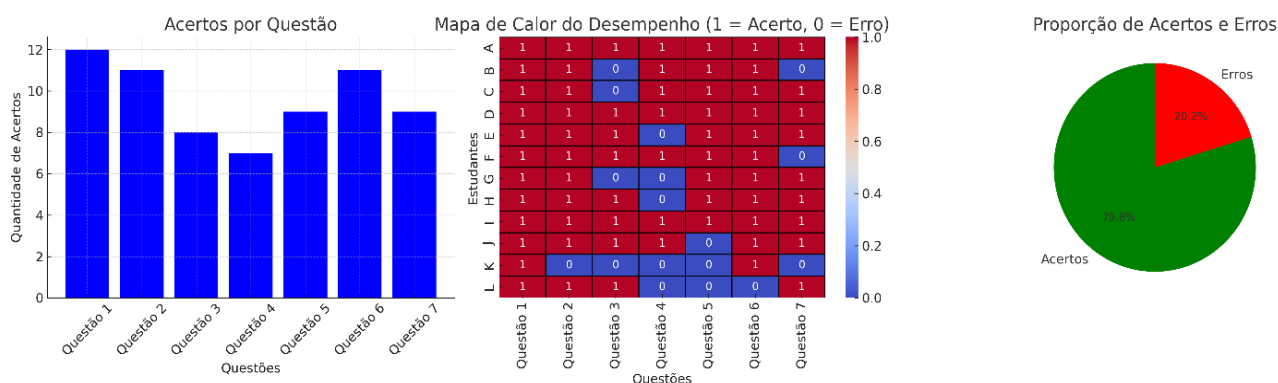
Figura 7 - Estudantes no processo de construção com material manipulável



Fonte: Diário do Pesquisador, 2024

Por fim, a mesma avaliação objetiva foi administrada e uma avaliação formativa discursiva foi proposta aos estudantes. Os resultados da segunda aplicação da avaliação objetiva estão na figura 8 a seguir:

Figura 8 - Resultados da Avaliação após aplicação do recurso didático



Fonte: Diário do Pesquisador, 2024

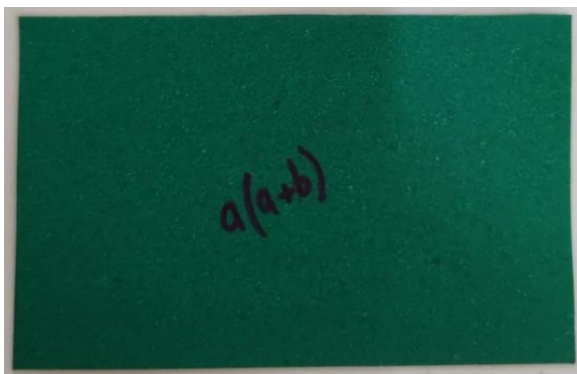
Vale ressaltar que na segunda aplicação da avaliação, os estudantes a resolveram com o intermédio do recurso didático. Os resultados foram muito satisfatórios chegando a 79,8% de acertos, sendo 100% de acerto na questão 1 e 91,6% de acerto na questão 2. De maneira geral os resultados foram positivos.

O estudante K, em especial, permaneceu com baixo desempenho mesmo após a intervenção. Isso chamou a atenção por destoar dos demais resultados, indicando que podem haver fatores externos interferindo em sua aprendizagem, como dificuldades cognitivas, emocionais ou falta de engajamento. Para aprofundar essa análise, seriam necessárias outras estratégias avaliativas e acompanhamento pedagógico individualizado.

Os estudantes obtiveram êxito na resolução partindo de um retângulo de área $a(a + b)$ e subtraindo deste outro retângulo de área igual a $b(a + b)$, isto é, $(a - b)(a + b) = a(a + b) - b(a + b)$, respeitando dois critérios:

- i. **Para somar duas áreas colocamos os retângulos de cores iguais de forma adjacente a outro;**
- ii. **Para subtrair áreas utilizamos as áreas com sinal, isto é, a cor cinza sobreposta a cor verde em cada caso.**

Figura 9 - Retângulo de área $a(a+b)$



Fonte: Diário do Pesquisador, 2024

Figura 10 - Retângulo de área $a(a+b)$ sobreposto por $-[b(a+b)]$



Fonte: Diário do Pesquisador, 2024

Evidenciou-se com esses exemplos, a exploração, questionamentos e construção conhecimento de forma colaborativa, investigando cada situação, criando hipóteses e validando conjecturas. Por meio disso, entende-se a matemática como uma ciência repleta de descobertas e que as descobertas surgem dessas indagações em procurar resolver problemas buscando diversos caminhos e representações para soluções. Assim, compreender a matemática envolve a conversão entre diferentes registros de representação semiótica, fazendo um paralelo com a teoria de Raymond Duval (2003).

E é evidente que nosso recurso permite essa criação de conexões entre os campos da álgebra e geometria, permitindo aos estudantes a criação de hipóteses e possibilitando suas validações por meio de reformulações e testes.

Vale ressaltar que, a validação dos resultados encontrados pelos estudantes com o material manipulável foram realizados de forma algébrica no quadro pelo professor-pesquisador e também pelos estudantes no caderno, como foi o caso de $b(a + b) = a(a + b) - [(a - b)(a + b)]$ e $a(a + b) = ab + a^2 = b^2 + ab + (a - b)(a + b) = ab + ab + a(a - b) = a^2 + b^2 + b(a - b)$ e também $(a + b)^2 = b(a + b) + a^2 + ab = b(a - b) + b^2 + ab + a(a - b) + b(a + b) = a(a + b) + b(a + b) = a^2 + ab + ab + b^2$.

O diferencial do material está na proposta de sinalizar áreas positivas e negativas de modo bidimensional, com o uso de cartolinas dupla face coloridas. Embora já existam propostas que relacionam produtos notáveis a áreas de retângulos, a introdução do conceito de “área com sinal” oferece uma perspectiva inovadora, pois permite representar expressões algébricas que envolvem subtração diretamente no plano geométrico.

5 Considerações finais

Verificamos que, os estudantes puderam relacionar os conceitos algébricos dos produtos notáveis com sua representação geométrica por meio do manuseio de áreas de retângulos com sinal, o que abriu espaço para exploração de hipóteses já que o material manipulável aqui desenvolvido abre a possibilidade de investigar diversas soluções para um mesmo problema. Os estudantes puderam validar seus resultados geométricos por meios algébricos, fazendo assim uma conversão entre registros de representação, constituindo assim uma aprendizagem efetiva que segundo Duval (2003) ocorre quando há transições entre diferentes registros de representação, sendo o material manipulável um mediador essencial nesse processo.

Os resultados obtidos até o momento permitem afirmar o quão significativo para o ensino é o uso de materiais manipuláveis em sala de aula desde que realizado de forma planejada e com uma intencionalidade. Estes materiais fazem o estudante ver e interpretar de forma concreta dados e situações algébricas ditas abstratas presentes nas aulas de matemática da Educação Básica.

Referências

ÁVILA, G. **Ensino da Matemática: princípios e práticas**. São Paulo: Editora X, 2010.

BRASIL. **Base Nacional Comum Curricular**. Brasília: Ministério da Educação, 2018.

DUVAL, R. **Semiose e pensamento humano: registros semióticos e aprendizagens intelectuais**. Berna: Peter Lang, 2003.

FIORENTINI, D.; LORENZATO, S. **Investigação em educação matemática: percursos teóricos e metodológicos**. Campinas: Autores Associados, 2006.

FIORENTINI, D. O que é pesquisa qualitativa em educação matemática? **Bolema**, Rio Claro, v. 7, pág. 1-5, 1994.

GRANDO, R.C. **O jogo e a matemática no ensino fundamental**. Campinas: Papirus, 2000.

LAKATOS, I. **Provas e Refutações: A Lógica da Descoberta Matemática**. Cambridge: Cambridge University Press, 1976.

LORENZATO, Sergio. **O Laboratório de Ensino de Matemática na Formação de Professores**. Campinas: Autores Associados, 2006.

PASSOS, C. L. B. Materiais manipuláveis como recursos didáticos na formação de professores de matemática. In: LORENZATO, Sérgio. **Laboratório de Ensino de Matemática na formação de professores**. Campinas: Autores Associados, 2006. p. 77-92.

PÓLYA, G. **Como Resolver: Um Novo Enfoque do Método Matemático**. Princeton: Princeton University Press, 1945.

SMOLE, KS; DINIZ, M.I. **Matemática na educação infantil: formação de conceitos e desafios**. Porto Alegre: Artmed, 2007.