



X ENCONTRO MINEIRO DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA
Diálogo e Alteridade: a potência da horizontalidade entre
escola e universidade
Montes Claros – Minas Gerais
Outubro/novembro de 2024

INTERVENÇÃO DIDÁTICA: EXPLORANDO ERROS NO PROCESSO DE ENSINO APRENDIZAGEM

Telma Cristina Pimenta de Freitas¹

Ana Luísa Reis Silva de Sena²

RESUMO

Os erros matemáticos estão presentes no cotidiano dos estudantes, desde os anos iniciais até o ensino superior. Por meio deles é possível que os docentes realizem diagnósticos das dificuldades apresentadas por cada um dos alunos e desenvolvam metodologias de ensino apropriadas. Este trabalho tem como principal objetivo considerar a análise de erros como metodologia de ensino e aprendizagem e propor uma atividade pedagógica para desconstruir um erro muito comum entre os estudantes de matemática. Através de processo de análise de extensa bibliografia verifica-se como a análise de erros é profícua e como existem distintas maneiras através das quais os docentes podem analisar os erros que seus discentes cometem, com a finalidade de aperfeiçoar o ensino matemático e torná-lo mais ameno e prazeroso. Não basta apontar o erro, é necessário desconstruí-lo para que o estudante organize novamente seu pensamento sobre as premissas e operações corretas. Nesse sentido, o trabalho apresenta uma atividade que pretende desconstruir um erro recorrente, qual seja, que a raiz da soma dos quadrados é igual à soma dos quadrados das raízes. Mostra-se a diferença entre as duas operações, de forma analítica e gráfica, desconstruindo a concepção errônea do aluno. A atividade foi aplicada a alguns alunos do primeiro semestre de um curso de Licenciatura em matemática. Conclui-se que a análise de erros permite metodologias diversificadas e dinâmicas, promove ampla compreensão da estrutura do ensino e outro sentido para a correção de processos avaliativos.

Palavras-chave: Análise de erros. Ensino reflexivo. Educação Matemática.

INTRODUÇÃO

O erro é parte integrante de qualquer processo de ensino e aprendizagem. Esta frase seria facilmente aceita por quaisquer educadores e impregna até mesmo o senso comum.

Mas como colocar o erro, no caso das tarefas escolares, a serviço dos processos de aprendizagem? Como destilar do erro a essência que forja a incorreção, a falta, a falha? Não seria o destilar dessa essência a descoberta

¹ Doutora / docente da Universidade do Estado de Minas Gerais (UEMG). telma.freitas@uemg.br.

² Graduanda / discente da Universidade do Estado de Minas Gerais (UEMG). ana.1395295@discente.uemg.br

mesma do raciocínio que engendra o erro e muitas vezes o perpetua? O que perpetua o erro?

No caso da matemática alguns erros são particularmente recorrentes. Qualquer educador que tenha ministrado os chamados “conteúdos básicos” na formação básica ou mesmo superior provavelmente se viu diante da errônea simplificação: $\sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{a^2} + \sqrt{b^2} = a + b$, os alunos sequer tecem normalmente a consideração de que a e b deveriam ser necessariamente positivos para prescindirem do módulo.

Claro esteja que o errôneo “corte” se apoia na equivocada afirmação que a raiz da soma dos quadrados é a soma dos quadrados das raízes. Podemos supor tratar-se de uma generalização excessiva. Provavelmente o aluno tem em mente que $\sqrt{a^2 \cdot b^2} = \sqrt{a^2} \cdot \sqrt{b^2} = a \cdot b$ no caso de a e b positivos. Com base nesse saber comete um excesso de generalização.

Neste trabalho propomos uma atividade com base geométrica que desconstrói essa generalização, mostrando que a raiz da soma dos quadrados não é a soma dos quadrados das raízes. A atividade é aplicada a seis alunos de um curso de licenciatura em matemática. Nosso objetivo, para além ilustrar quão profícua é a análise de erros.

Com base em uma extensa revisão bibliográfica, propomos que o erro seja, além de identificado, resinificado como por exemplo através da atividade proposta neste trabalho.

FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA E REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

A análise de erros se configura como método de pesquisa e de ensino e aprendizagem. Sobretudo no último caso, o erro deve abandonar o lugar de mero instrumento avaliador do desempenho dos alunos e passar a ser, senão protagonista, ao menos importante coadjuvante no processo de aprendizagem.

O dicionário online Priberam define erro como “ato ou efeito de errar; engano ou equívoco; má compreensão. Falha ou engano que demonstra falta dos conhecimentos ou dos cuidados considerados básicos.” A partir dessa definição, podemos perceber que, o erro pode surgir de enganos nos passos de uma determinada resolução ou de uma falta de conhecimento necessário para chegar à

solução correta. Além disso, a má compreensão pode resultar das dificuldades que o aluno tem ao interpretar um problema, o que pode influenciar a maneira como ele desenvolve e conclui sua resposta.

No caso da matemática, avaliar a produção escrita dos alunos pode revelar tanto o que o aluno não sabe, quanto o que ele já assimilou. Por meio dos raciocínios errôneos que o estudante estabelece, pode-se proceder a uma análise para determinar qual a lógica empreendida pelo estudante, e se essa lógica é oriunda de senso comum, de estratégias válidas em outros contextos, etc.

Os trabalhos com análises de erros são profícuos e variados. No Brasil, a referência paradigmática é Helena Noronha Cury. Cury (2008) apresenta em um capítulo do seu livro, intitulado “Análise de erros: O que podemos aprender com as respostas dos alunos”, as ideias dos precursores dos estudos com erros. Desde Thorndike (1874 - 1958), no final do século XIX a primeira metade do século XX até Borasi (1958) que no final do século XX e nos tempos atuais apresenta várias alternativas para o uso de erros, temos uma intrigante e fascinante história que a autora apresenta em linhas gerais.

O que nos interessa aqui é que, no final do século XX e nas duas primeiras décadas deste século, a análise de erros pode ser vista como estratégia de diagnóstico e caráter reparador, mas não só. Hoje se levam em conta, na análise de erros, a cultura e o pertencimento de classe dos estudantes, a importância do erro na construção do conhecimento, como o erro deve ser, após identificado, ressignificado.

Destacamos com esse propósito os artigos de Jesus e Júnior Santos (2020), Torre (2007), Capelin e Nogueira (2013), dentre outros. Nestes trabalhos a análise de erros é efetivada de diversas formas, levando professores a reconstruírem seu próprio conhecimento. Não obstante os diversos enfoques e as diferentes nuances, todos os trabalhos convergem para a ideia de que é preciso desconstruir o raciocínio errôneo para que se venha formar o raciocínio correto.

Cury diz que “É necessário elaborar intervenções didáticas que desestabilizem as certezas, levando o estudante a um questionamento sobre suas respostas.” (Cury, 2007, p. 82).

Acreditando com Cury que as intervenções didáticas são necessárias, apresentamos a seguir uma atividade que pretende desconstruir um erro recorrente

de matemática básica. O propósito do trabalho é mais que apresentar a atividade, é ilustrar como a prodigalidade da análise de erros pode nos ajudar nos processos de ensino e aprendizagem.

De qualquer forma, o erro não pode ser visto como fracasso, seja pelo aluno ou pelo professor.

METODOLOGIA E APRESENTAÇÃO DA ATIVIDADE

Acreditando com Brousseau (1983) que:

O erro não é somente o efeito da ignorância, da incerteza, do acaso, como se acredita nas teorias empiristas ou behavioristas da aprendizagem, mas o efeito de um conhecimento anterior, que tinha seu interesse, seu sucesso, mas que agora se revela falso, ou simplesmente inadequado. Os erros deste tipo não são instáveis e imprevisíveis, eles são constituídos em obstáculos (Brousseau, 1983, p.171).

Pretendemos ver o erro como obstáculo didático. No texto em questão, aparece o conceito de obstáculo epistemológico, que seria formas de pensar cristalizado, o que dificultaria o avanço da ciência e a inauguração do novo. Contudo, nos deteremos no conceito de obstáculo didático (Pais, 2001). Para o autor, a noção de obstáculo não deve ser limitada apenas à ideia epistemológica. Ele destaca que os obstáculos didáticos consistem em conhecimentos que estão relativamente estabilizados no plano intelectual e que podem dificultar o progresso da aprendizagem no contexto escolar.

Nessa perspectiva não adiante apenas apontar o erro, mas desconstruí-lo para o estudante organize novamente seu pensamento. Apresentamos então uma atividade que pretende desconstruir um erro recorrente, qual seja, que a raiz da soma dos quadrados é igual à soma dos quadrados das raízes. Este erro, bastante conhecido dos professores de matemática, parece trazer na sua gênese uma generalização excessiva, ou falsa generalização, para usar o termo de alguns autores. O aluno generaliza o que utiliza no caso da multiplicação, operando uma generalização indevida. Nesse sentido, temos:

Objetivo da atividade: Demonstrar que $\sqrt{a^2 + b^2}$ é diferente de $\sqrt{a^2} + \sqrt{b^2}$

Por meio, de uma análise geométrica utilizando Teorema de Pitágoras, pretende-se mostrar a diferença entre a raiz da soma dos quadrados e a soma dos quadrados da raiz.

A atividade consiste da confecção de dois desenhos, cujos passos são descritos a seguir:

Desenho 1

1) Construa um quadrado de lado $a + b$, onde os segmentos a e b se alternem;



2) Ligue os 4 pontos que separam a e b formando um quadrado inscrito no primeiro. Denomine c o lado do quadrado inscrito.

3) Denomine de A , a área total do quadrado maior.

4) Observe que temos 4 triângulos iguais de lados a, b, c . Denomine A' a soma das áreas dos 4 triângulos.

5) Observe que $A - A' = c^2$.

6) Observe também que as áreas dos dois quadrados são diferentes, ou seja, $(a + b)^2 \neq c^2$ o que implica $a + b \neq c$, pois $a > 0$, $b > 0$ e $c > 0$.

Desenho 2

1) Construa um quadrado de lado $a + b$ igual ao quadrado do item 1 do desenho 1;

2) Forme no interior desse quadrado dois quadrados: um de lado a e outro de lado b , de forma que restem dois retângulos de lado a e b ;

3) Denomine de A a área total do quadrado maior;

4) Observe que os dois retângulos correspondem aos 4 triângulos do desenho 1. Denomine A' a soma das áreas dos 2 retângulos;

5) Observe que $A - A' = a^2 + b^2$;

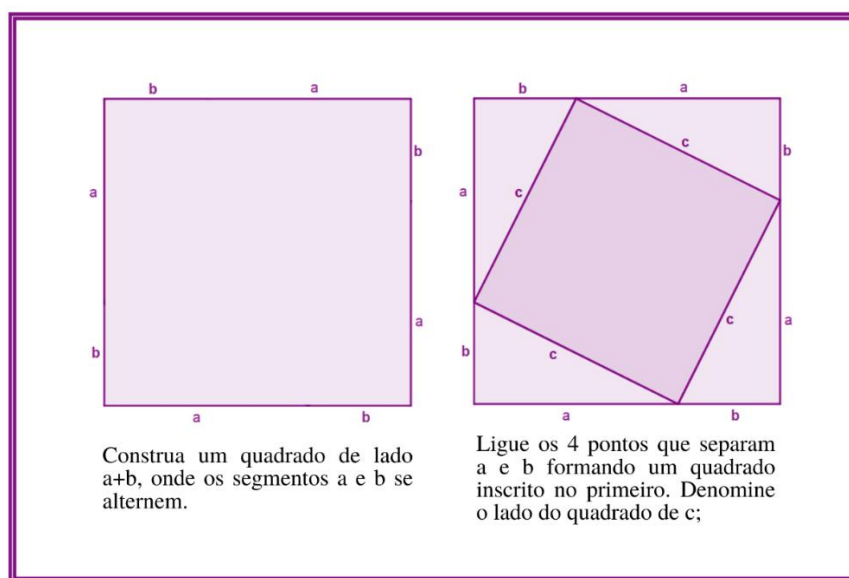
6) Comparando os resultados dos passos 5 de ambos os desenhos temos $a^2 + b^2 = c^2$, o que implica $c = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Temos, por conseguinte, que $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ e $c \neq a + b$, logo

$$\sqrt{a^2 + b^2} \neq \sqrt{a^2} + \sqrt{b^2}$$

Para facilitar a construção pelo leitor apresentamos nas figuras 1 e 2 a construção dos quadrados descritos no desenho 01 e no desenho 02.

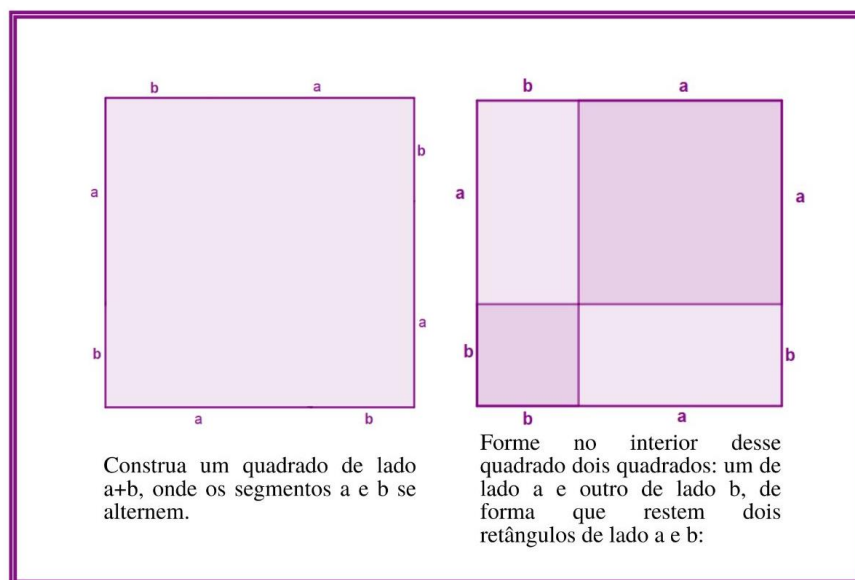
Figura 1: Ilustração do Desenho 01 produzido no GeoGebra



Fonte: Autoria Própria (2024)

Ao completar o desenho, concluímos que o quadrado inscrito, com lado c , resulta da interseção dos segmentos a e b ao longo dos lados do quadrado maior. Essa construção demonstra como elementos geométricos simples podem gerar novas formas, destacando a relação entre as dimensões originais a e b e a nova medida c .

Figura 2: Ilustração do Desenho 02 produzido no GeoGebra



Fonte: Autoria Própria (2024)

Neste processo, ao construir um quadrado de lado $a + b$ e dividi-lo em dois quadrados menores (um de lado a e outro de lado b), formam-se ainda dois retângulos com lados a e b . Essa construção ilustra a decomposição geométrica de áreas, destacando a relação entre os quadrados e os retângulos formados. Essa análise é fundamental para compreender a soma das áreas e como diferentes figuras geométricas podem se complementar dentro de uma mesma estrutura.

RESULTADOS E DISCUSSÕES

A atividade foi apresentada e executada por seis alunos de um curso de Licenciatura em Matemática. No desenvolvimento da atividade pedagógica proposta, ficou evidente que a análise de erros serve como uma poderosa ferramenta para compreender as dificuldades dos estudantes em relação ao conceito de raiz quadrada e soma de quadrados. A aplicação do Teorema de Pitágoras, tanto de forma analítica quanto gráfica, foi crucial para desconstruir o erro comum de que a raiz da soma dos quadrados é igual à soma das raízes quadradas individuais. Essa abordagem permitiu que os alunos visualizassem claramente a diferença entre as duas operações, promovendo uma reorganização de suas concepções matemáticas.

Durante a implementação da atividade, observou-se que muitos alunos inicialmente apresentaram resistência ao processo de desconstrução, visto que o erro já estava enraizado em suas práticas. No entanto, à medida que a análise avançava e os conceitos eram explorados de forma mais profunda, os estudantes começaram a reconhecer a importância de revisar suas premissas. Essa mudança de perspectiva foi facilitada pela combinação de explicações teóricas e representações gráficas, que permitiram uma compreensão mais concreta das operações matemáticas envolvidas.

Outro ponto relevante discutido durante a atividade foi o papel do erro como elemento essencial no processo de aprendizagem. Em vez de ser visto como um obstáculo, o erro foi tratado como uma oportunidade de reflexão e aprofundamento do conhecimento. Esse paradigma mostrou-se eficaz para engajar os estudantes em um processo de aprendizagem mais ativo e consciente, onde a correção de erros não é apenas mecânica, mas sim uma parte integral do desenvolvimento do raciocínio matemático.

Além disso, a análise de erros permitiu identificar padrões de dificuldades comuns entre os estudantes, o que proporcionou aos docentes uma visão mais clara das lacunas de entendimento que precisam ser abordadas. Esse diagnóstico mais preciso possibilita o desenvolvimento de intervenções pedagógicas mais direcionadas e eficazes, que atendam às necessidades específicas de cada grupo de alunos.

Por fim, conclui-se que a atividade proposta, centrada na desconstrução de um erro específico através de um procedimento analítico e geométrico, contribuiu significativamente para a melhoria da compreensão matemática dos estudantes. A análise de erros corrigiu um equívoco comum e promoveu uma maior apreciação do rigor e da lógica matemática, incentivando os alunos a adotarem uma abordagem mais crítica e reflexiva em seu aprendizado.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho a análise de erros foi explorada no seu potencial didático. A atividade proposta, de mostrar geometricamente a diferença $\sqrt{a^2 + b^2} \neq \sqrt{a^2} + \sqrt{b^2}$,

pretende desconstruir no aluno a generalização que este supostamente efetiva a partir do conhecimento do que ocorre com o produto $\sqrt{a^2 \cdot b^2} = a^2 \cdot b^2$.

Com base na revisão bibliográfica e na execução da tarefa proposta, conclui-se que a análise de erros possui um caráter extremamente profícuo no processo educacional. A análise de erros não só proporciona um entendimento mais profundo dos conceitos abordados, como também facilita a identificação de lacunas no aprendizado, permitindo uma intervenção pedagógica mais direcionada e eficaz. Além disso, este artigo tem como objetivo despertar o interesse dos professores para a adoção dessa metodologia em suas práticas pedagógicas, servindo de inspiração para a criação de novas atividades e fomentando o desenvolvimento de estudos futuros nessa área.

Acredita-se que, ao explorar esse enfoque, os professores poderão contribuir significativamente para a melhoria da qualidade do ensino, tornando-o mais dinâmico e centrado nas necessidades dos alunos. Em um próximo passo, planeja-se aplicar a atividade desenvolvida em turmas iniciais do ensino médio, com o intuito de monitorar os resultados obtidos e, assim, testar sua eficácia em um contexto real de sala de aula. Esse acompanhamento permitirá uma avaliação criteriosa da metodologia e poderá fornecer dados valiosos para ajustes e aprimoramentos futuros.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BROUSSEAU, Guy. Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. **Recherches em didactique des Mathématiques**, v4, n.2, p. 165-168, 1983. <https://revue-rdm.com/1983/les-obstacles-epistemologiques-et/>

BRUNEK, Diovana; PROCEK, Amanda Ferreira; GÓES, Anderson Roges Teixeira & CRUZ, Juliana de Melo e. Aplicação de metodologia de análise de erros na disciplina de matemática. **XIII EPREM – Encontro Paranaense de Educação Matemática**. Ponta Grossa – PR, ISSN 2175 - 2044 (2015).

CAPELIN, L.A.S., NOGUEIRA, C.M.I., Análise de erros em matemática: e se fizéssemos do erro um "meio" e não o fim: Os desafios da escola pública paranaense na perspectiva do professor. **Cadernos PDE**, Versão On-line, Paraná, 2013, p. 9.

CURY, H. N. Análise de erros em disciplinas matemáticas de cursos superiores. Porto Alegre: **Faculdade de Matemática**, PUCRS. 2008.

CURY, Helena Noronha. Análise de Erros – O que podemos aprender com os erros dos alunos. **Editora Autêntica**. Belo Horizonte/MG, 2007.

CURY, Helena Noronha. Análise de Erros e demonstrações de geometria plana: um estudo com alunos de 3º grau. Porto Alegre: **Dissertação (Mestrado em educação)** - faculdade de Educação, Universidade do Rio Grande do Sul. (1988).

CURY, Helena Noronha. Retrospectiva histórica e perspectivas atuais da análise de erros em educação matemática. **Zetetiké**, v.3, n. 4, p. 39-50, nov. 1995.
<https://periodicos.sbu.unicamp.br/ojs/index.php/zetetike/article/view/8646879>

DE JESUS, Danilo Do Nascimento; JÚNIOR, M.G.N Análise de erros no ensino de Matemática: proposta de ensino e pesquisa a partir das experiências de estágio. **Com a Palavra, o Professor**, v. 5, n. 11, p. 41–50, 2020.
https://cbeu.ufop.br/anais_files/c043f742f847f423cee42b625d0f1cc0.pdf

TORRE, Saturnino de La. Aprender com os erros: o erro como estratégia de mudanças. **Artmed**. Porto Alegre, 2007.