

Fração, mostra a tua cara

Fractions, show your true colors

Nilza Eigenheer Bertoni¹ • Ana Lúcia Braz Dias²

Resumo: Apresentamos ideias fundamentais de proposta didática para o ensino de frações baseada em pesquisa desenvolvimental. A fundamentação teórica faz crítica ao uso excessivo de modelos geométricos, com difícil transposição para a realidade. Em contrapartida, encontramos apoio teórico na Educação Matemática Realista e na pesquisa desenvolvimental de Freudenthal. Como parte dos procedimentos de pesquisa, propusemos aos alunos situações-problema realistas envolvendo objetos reais inteiros e partes especiais deles, e deixamos que desenvolvessem estratégias de solução, por meio de reflexões e discussões. Como resultados, vimos surgir o uso de conceitos e estratégias com significado; números fracionários expressando quantidades e sendo colocados de modo lógico na reta numérica, com múltiplas representações para cada um; e compreensão informal da densidade desse conjunto de números na reta.

Palavras-chave: Frações. Modelos. Realidade. Números.

Abstract: We present fundamental ideas for a proposal for teaching fractions. The theoretical foundation focuses on the critique of the overemphasized use of geometric models, which are commonly found but difficult to correspond into reality. In contrast, we find theoretical support in Realistic Mathematics Education and Freudenthal's developmental research. As part of the research procedures, we proposed to students realistic problem situations involving real whole objects and special parts of them, allowing students to develop solution strategies through reflection and discussion. We observed the emergence of meaningful concepts and strategies; fractions expressing quantities and being logically placed on the number line, with multiple representations for each; and informal understanding of the density of this set of numbers on the number line.

Keywords: Fractions. Representations. Reality. Numbers.

1 Exposição e justificativa da problemática

A problemática central abordada neste trabalho é a desconexão entre o ensino de frações e a realidade concreta dos estudantes, o que impede a construção significativa do conceito de fração como número. Apesar de avanços teóricos e novas propostas, a didática das frações continua a ser implementada de maneira abstrata e distante da vida prática dos alunos. Isso gera uma lacuna entre o conhecimento formal e o conhecimento informal que os alunos já possuem, causando frustrações tanto para os professores quanto para os próprios estudantes. O trabalho critica o uso excessivo de modelos geométricos abstratos e figuras como círculos e retângulos, que têm pouca correspondência com a realidade cotidiana dos alunos. Esse método, amplamente adotado em livros didáticos (por exemplo, Dante; Viana, 2021; Ripoll; Simas;

¹ Universidade de Brasília — Brasília (DF), Brasil. ✉ nilza.bertoni@gmail.com
<https://orcid.org/0000-0002-4191-9457>. <http://lattes.cnpq.br/4105817769609625>.

² Central Michigan University • Mount Pleasant, MI — Estados Unidos da América • ✉ dias1al@cmich.edu • ORCID [0000-0003-0674-0758](https://orcid.org/0000-0003-0674-0758).

Bortolossi; Giraldo *et al.*, 2016; Silveira, 2021), não facilita a compreensão das frações como quantidades numéricas, limitando-se a exercícios repetitivos e operações simbólicas que desconsideram a essência numérica das frações.

2 Referencial teórico

O trabalho encontra apoio teórico na Educação Matemática Realista (EMR), particularmente nos princípios defendidos por Hans Freudenthal (1981, 2002). A EMR sugere que o ensino da matemática deve estar vinculado a situações do mundo real, facilitando a construção de significados pelos alunos ao utilizar suas próprias experiências e interpretações da realidade. Freudenthal enfatiza a importância de que os estudantes sejam participantes ativos no processo de aprendizagem, desenvolvendo conceitos matemáticos a partir da exploração de problemas realistas e da interação com o ambiente ao seu redor.

Com relação ao ensino de frações, nosso referencial teórico é o construído pela primeira autora (Bertoni, 2008; Souza; Duarte; Carvalho, 2021). Incorporamos à discussão os chamados subconstrutos do conceito de frações, dos seminais trabalhos de Kieren (1976) e Behr *et al.* (1983), não com o intuito de adotá-los como referencial absoluto, mas para utilizar a terminologia comum e facilitar a comunicação. Assim, referimo-nos a alguns desses subconstrutos. Evocamos também o trabalho sobre frações na perspectiva da EMR (Streefland, 1991, 1993).

3 Referencial metodológico

A metodologia adotada é a da pesquisa desenvolvimental (Gravemeijer, 1994), caracterizada por um ciclo de experimentação e investigação em longo prazo, onde são realizadas intervenções na sala de aula, capacitações com professores, leituras e reflexões teóricas. Durante esse processo, a pesquisa visa não apenas o desenvolvimento de currículos, mas também a melhoria das práticas educacionais com base em uma interação constante entre teoria e prática.

Nas intervenções realizadas, foram propostos aos alunos problemas realistas envolvendo objetos do mundo real e suas partes, sem a utilização predominante de modelos geométricos abstratos. Os estudantes, através de discussões e reflexões, desenvolveram suas próprias estratégias de solução, o que promoveu uma construção significativa de conceitos fracionários, permitindo que as frações fossem compreendidas como números que expressam quantidades do mundo real.

4 Revisão da literatura

A revisão de literatura do presente trabalho destaca as críticas aos modelos geométricos tradicionais e o uso excessivo de representações visuais abstratas, como círculos e retângulos, que são frequentemente desconectadas das experiências reais dos alunos. Estudos como o de Kerslake (1986) já haviam apontado que a dependência em diagramas pode dificultar a percepção das frações como números, reforçando uma visão puramente procedimental em vez de conceitual. Outros estudos analisados na revisão (Cramer; Post; Delmas, 2002; Hamdan; Gunderson, 2017; Kaminski, 2018; Sidney; Thompson; Rivera, 2019) investigaram os efeitos de diferentes tipos de treinamento na aprendizagem de frações. Traçamos críticas aos desenhos de pesquisa e às conclusões obtidas nesses trabalhos.

De modo geral, a revisão destaca que muitas das dificuldades enfrentadas pelos alunos no aprendizado de frações são geradas pelo próprio currículo e pela didática tradicional, que tende a focar esforços em representações de fração (notação fracionária — numerador e denominador, figuras geométricas divididas em partes congruentes, com algumas delas sombreadas) e não no conceito em si como se apresenta em situações de divisão que ocorrem na realidade, nem mesmo com número, já no âmbito abstrato. Apontamos que falta o devido foco na função das frações como quantificadoras de coleções e relações numéricas da realidade.

5 Resultados

Observamos o surgimento de conceitos e estratégias com significado, frequentemente de maneira não convencional. Essas estratégias emergentes reforçam a relevância de expor os estudantes a situações concretas, em oposição ao uso excessivo de representações geométricas abstratas comumente encontradas em livros didáticos.

Uma observação interessante foi a familiaridade dos alunos com o conceito de *metade* ou *meio*, que, no contexto social, é facilmente reconhecido. A presença frequente de metades em objetos inteiros, como *um sanduíche e meio* ou *duas laranjas e meia*, trouxe à tona a ideia de frações mistas, que aparece naturalmente nas interações diárias das crianças. Essa realidade contrasta com a categorização das frações como *impróprias* nos livros didáticos, que, muitas vezes, desconsidera como as frações são percebidas fora do ambiente escolar. Ao longo do processo, os alunos não apenas aceitaram a divisão de objetos em partes, como também começaram a perceber relações importantes, como a equivalência entre diferentes frações, por exemplo, que *um meio* equivale a *dois quartos*.

Além disso, a noção de fração como quociente emergiu naturalmente. Quando

desafiados a dividir três sanduíches entre quatro alunos, os estudantes dividiram os sanduíches ao meio e, em seguida, novamente, obtendo três quartos. Esse resultado — 3 dividido por 4 sendo igual a $\frac{3}{4}$ — ilustra como a divisão pode ser explorada de forma significativa em contextos reais, facilitando a compreensão do conceito de fração como uma operação de quociente.

Outro ponto fundamental da pesquisa foi a inserção das frações na reta numérica. Embora o conceito de medida ou distância fosse inicialmente estranho para os alunos mais jovens, foi possível construir analogias com a posição dos números naturais na reta. Os alunos posicionaram as frações na reta de maneira lógica, compreendendo que números fracionários possuem múltiplas representações e que estas correspondem ao mesmo ponto na reta. Ao longo do processo, os alunos perceberam que a reta numérica vai se preenchendo com frações, gerando um entendimento intuitivo da densidade dos números racionais. Também perceberam que tem frações à direita do 1 na reta numérica e não apenas no intervalo entre zero e um, o que naturalmente dissolve a ideia de que frações não podem ser maiores que um, ou outras dificuldades documentadas na literatura com as chamadas *frações impróprias*. Os resultados reforçaram a ideia de que algumas dificuldades encontradas pelos alunos são desnecessariamente produzidas pela própria didática e currículo utilizados na escola.

6 Considerações e conclusão

A pesquisa, além de fornecer subsídios a nossa proposta de ensino de frações, já explicitada em publicações anteriores, por outro lado nos levou a ajustes e recuos necessários. Reduzimos o uso do material manipulável criado no projeto *Brincar, Pensar e Fazer* (Bertoni, 1994). Eram tiras divididas que correspondiam aos meios, quartos e oitavos etc., usados para atividades e jogos. Atraíam como jogos, mas as equivalências refletiam pouco na aprendizagem matemática. Na implementação de materiais didáticos manipuláveis e ilustrações inicialmente utilizados, as tiras fracionárias, embora atraentes para os alunos em atividades lúdicas, não contribuíam de maneira significativa para a compreensão conceitual das frações. O uso desses modelos se mostrou limitado a um único exemplo da realidade e não conseguiu estabelecer a conexão desejada entre o conceito de frações e seu uso prático no cotidiano.

Esse processo de ajustes reflete a própria essência da pesquisa desenvolvimental, que é orientada por ciclos de ação, reflexão e aprendizagem. Cada iteração nos permitiu aprender com os resultados obtidos em sala de aula, ajustando tanto as propostas pedagógicas quanto os materiais didáticos para melhor atender às necessidades dos alunos. O caráter contínuo da pesquisa desenvolvimental favorece o aperfeiçoamento a longo prazo, com ajustes graduais que

informam novas propostas de ensino e currículo, promovendo um alinhamento cada vez mais eficaz entre teoria e prática no ensino de frações.

Além disso, a análise crítica da literatura revelou que, embora inúmeros estudos tenham sido realizados, pouco progresso foi feito em termos de mudanças reais no ensino de frações. Muitos trabalhos ainda ignoram resultados de pesquisas anteriores, optando por uma abordagem tendenciosa (*cherry-picking*) que impede um avanço coerente e integrado do conhecimento sobre educação matemática. Essa fragmentação resulta em propostas didáticas que carecem de alinhamento e consistência, além de uma forte influência de políticas editoriais e da racionalidade instrumental das agências de fomento, que frequentemente ditam os rumos da pesquisa educacional.

A presente pesquisa respondeu aos objetivos estabelecidos, que envolvem a promoção de uma compreensão significativa do conceito de fração, partindo de situações realistas e conectando as frações ao cotidiano dos alunos, dentro dos princípios da Educação Matemática Realista (EMR). Os resultados obtidos indicam que o uso de problemas contextualizados, baseados em objetos e situações do mundo real, favoreceu a construção de estratégias de solução por parte dos estudantes, aproximando-os de uma compreensão mais profunda e conceitual das frações. A exploração de frações como números, com múltiplas representações, especialmente através da reta numérica, reforçou a densidade dos números racionais e desafiou a visão limitada das frações como existentes apenas no intervalo de zero a um.

Referências

BEHR, Merlyn; LESH, Richard; POST, Thomas; SILVER, Edward. Rational number concepts. In: LESH, Richard; LANDAU, Marsha. (Ed.). *Acquisition of mathematics concepts and processes*. New York: Academic Press, 1983, p. 91-125.

BERTONI, Nilza Eigenheer. A construção do conhecimento sobre número fracionário. *Bolema*, v. 21, n. 31, p. 209-237, 2008.

BERTONI, Nilza Eigenheer. *Brincar, pensar, fazer: 3ª e 4ª séries*. Apostilas fotocopiadas, 1994.

CRAMER, Kathleen A.; POST, Thomas R.; DELMAS, Robert C. Initial fraction learning by fourth- and fifth-grade students: a comparison of the effects of using commercial curricula with the effects of using the rational number project curriculum. *Journal for Research in Mathematics Education*, v. 33, n. 2, p. 111-144, 2002.

DANTE, Luiz Roberto; VIANA, Fernando. *Ápis mais: Matemática: 4º ano*. São Paulo: Ática, 2021.

FREUDENTHAL, Hans. Major problems of mathematics education. *Educational Studies in*

Mathematics, v. 12, n. 2, p. 133-150, 1981.

FREUDENTHAL, Hans. *Revisiting mathematics education: China lectures*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 2002.

GRAVEMEIJER, Koeno. Educational development and developmental research in mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education*, v. 25, n. 5, p. 443-471, 1994.

HAMDAN, Noora; GUNDERSON, Elizabeth A. The number line is a critical spatial-numerical representation: evidence from a fraction intervention. *Developmental Psychology*, v. 53, n. 3, p. 587, 2017.

KAMINSKI, Jennifer A. Effects of representation on discrimination and recognition of fractions. *Proceedings of the 40th Annual Meeting of the Cognitive Science Society*. Madison, 2018, p. 1-6

KERSLAKE, Daphne. *Fractions: Children's strategies and errors. A report of the strategies and errors in secondary mathematics project*. Windsor: Berkshire, 1986.

KIEREN, Thomas E. On the mathematical, cognitive, and instructional foundations of rational numbers. In: LESH, Richard A.; BRADBARD, David A. (Ed.). *Number and measurement: papers from a research workshop: The Georgia Center for the Study of Learning and Teaching Mathematics*, 1976, p. 101-144.

RIPOLL, Cydara Cavedon; SIMAS, Fabio Luiz Borges; BORTOLOSSI, Humberto José; GIRALDO, Victor Augusto; REZENDE, Wanderley; QUINTANEIRO, Wellerson. *Frações no Ensino Fundamental*, v. 1. Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2016.

SIDNEY, Pooja G.; THOMPSON, Clarissa A.; RIVERA, Ferdinand D. Number lines, but not area models, support children's accuracy and conceptual models of fraction division. *Contemporary Educational Psychology*, v. 58, p. 288-298, 2019.

SILVEIRA, Ênio. *Coleção desafio matemática 4º ano: Manual do Professor*. São Paulo: Moderna, 2021.

SOUZA, Mônica Menezes; DUARTE, Aparecida Rodrigues Silva; CARVALHO, Rosalia Policarpo Fagundes de. A objetivação de saberes em projetos coordenados por Nilza Bertoni nas décadas 1980 e 1990. In: *Anais do XIX Seminário Temático Internacional*. 2021, p. 1-2.

STREEFLAND, Leen. *Fractions in realistic mathematics education: a paradigm of developmental research*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1991.

STREEFLAND, Leen. Fractions: a realistic approach. In: CARPENTER, Thomas P.; FENNEMA, Elizabeth. (Ed.). *Rational numbers: an integration of research*. Mahwah: Routledge, 1993, p. 289-325.

VAN DEN HEUVEL-PANHUIZEN, Marja. Reform under attack: forty years of working on better mathematics education thrown on the scrapheap? No way! *Proceedings of the 33rd Annual Conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia*. Fremantle, 2010. p. 1-25.