ISSN 2966-2699

Obstáculos didáticos e epistemológicos no ensino de Frações: insights de um curso para professores em formação

Didactical and epistemological obstacles in fraction education: insights from a course for prospective teachers

Ana Lúcia Braz Dias[1] • Tony Salvatore Sheikhnavassi[2]

Resumo: O trabalho explora os obstáculos de aprendizagem enfrentados por futuros professores ao resolver tarefas envolvendo frações, com foco em obstáculos didáticos e epistemológicos. Usando dados coletados a partir de observações em sala de aula em um curso universitário para professores em formação, o estudo examina como os alunos interagiram com conceitos de fração e as dificuldades encontradas durante o trabalho em grupo e a instrução. A análise tenta modelar as dificuldades observadas como obstáculos epistemológicos ou didáticos no âmbito da Teoria das Situações Didáticas (TSD), oferecendo explicações provisórias e observando que algumas situações não podem ser prontamente classificadas como uma ou outra. Outros conceitos da TSD, como o contrato didático, são propostos como explicações alternativas a serem exploradas em análises futuras.

Palavras-chave: Obstáculos Epistemológicos. Obstáculos Didáticos. Frações.

Abstract: This paper explores the learning obstacles faced by prospective teachers when solving fraction tasks, focusing on didactical and epistemological challenges. Using data collected from classroom observations in a university course for future teachers, the study examines how students interacted with fraction concepts and difficulties encountered during group work and instruction. The analysis tries to model observed difficulties as epistemological or didactical obstacles within the framework of the Theory of Didactical Situations (TDS), offering tentative explanations and noting that some situations cannot be readily classified as one or the other. Other concepts from TDS, such as the didactical contract, are proposed as alternative explanations to be explored in future analysis.

Keywords: Epistemological Obstacles. Didactical Obstacles. Fractions.

1 Exposição e justificativa da problemática

Este estudo aborda os obstáculos didáticos e epistemológicos que professores em formação encontram ao resolver tarefas com frações. Ele é baseado em dados coletados durante um estudo piloto que serviu de base para a futura tese de doutorado do segundo autor, sob a orientação da primeira autora, sobre contratos didáticos em salas de aula no ensino superior. O estudo piloto proporcionou a oportunidade de praticar a observação participante e analisar situações de sala de aula sob a perspectiva da Teoria das Situações Didáticas (TSD) de Brousseau (2002). Duas das aulas observadas durante o estudo piloto focaram em conceitos de frações e outra em percentagens. Este artigo se concentrará na identificação dos obstáculos de aprendizagem, particularmente obstáculos didáticos e epistemológicos, que os alunos

[1] Central Michigan University • Mount Pleasant, MI — Estados Unidos da América • ✉ dias1al@cmich.edu • ORCID 0000-0003-0674-0758.
[2] Central Michigan University • Mount Pleasant, MI — Estados Unidos da América • ✉ sheik1ts@cmich.edu • ORCID 0009-0002-1719-5783.

apresentaram ao resolver tarefas envolvendo frações. Não consideraremos os obstáculos ontogênicos neste estudo, pois eles geralmente estão relacionados a estágios de desenvolvimento em aprendizes mais jovens.

2 Metodologia

Para a coleta de dados foram utilizados dois métodos: entrevistas com os alunos e com o professor e observações não-participante. No entanto, para os fins deste artigo, focaremos exclusivamente nas notas de observação.

As notas de observação foram coletadas durante três sessões de aula de um curso para futuros professores em uma universidade na região centro-oeste dos Estados Unidos. O curso prepara professores para ensinar conceitos matemáticos relacionados a frações, decimais e porcentagens. O segundo autor observou três períodos de aula, passando todo o tempo das aulas como um observador não-participante. Durante o tempo de aula, ele fez anotações e só fez perguntas ou comentários se os considerasse significativos, o que raramente aconteceu.

O curso foi ministrado em uma sala de aula interativa, que tinha oito mesas separadas para os alunos trabalharem em grupos. Cada uma das oito mesas tinha um quadro branco para os alunos trabalharem e uma tela (monitor de computador), conectados ao computador central do professor, que podia ser usada para exibir o trabalho de outros alunos. O pesquisador sentou-se sozinho em uma mesa vaga e, durante as palestras, fez anotações sobre as interações entre o instrutor e os alunos. Aproximadamente um terço do tempo de aula foi dedicado a aula expositiva e dois terços do tempo de aula foram designados para o trabalho em grupo. Durante o trabalho em grupo, o pesquisador seguiu o instrutor pela sala de aula, tomando notas sobre os diálogos entre o instrutor e os alunos, bem como entre os próprios alunos enquanto trabalhavam nas tarefas.

As situações descritas nesta seção foram observadas durante uma aula sobre a comparação de frações. Os alunos foram divididos em sete grupos, cada um composto por até quatro alunos. O instrutor propôs atividades selecionadas do livro didático adotado pelo curso, *Mathematics for Elementary Teachers with Activities* de Sybilla Beckmann (2018). Os alunos trabalharam colaborativamente dentro de seus grupos para chegar a uma resposta coletiva. Enquanto trabalhavam, o instrutor circulava pela sala, ouvindo as discussões dos grupos e ocasionalmente interagindo com eles. Cada grupo tinha a tarefa de escrever sua resposta coletiva no quadro branco designado. Um aluno de cada grupo era responsável por apresentar a resposta do grupo para a turma.

As atividades apresentadas tinham dois objetivos principais. Um deles era fazer com que os alunos pensassem sobre frações de forma conceitual, focando no tamanho e nas propriedades dos números, em vez de apenas usar métodos mecânicos familiares. O outro objetivo estava alinhado com a abordagem do livro didático, que incentiva a aprendizagem de múltiplas maneiras de resolver problemas. Como os alunos serão professores, é importante que estejam preparados para reconhecer e entender as várias estratégias que seus alunos poderão usar.

Os dados foram analisados qualitativamente, com o objetivo de identificar os obstáculos enfrentados pelos alunos e categorizar essas dificuldades como obstáculos epistemológicos ou didáticos, de acordo com o referencial teórico da TSD. A análise dos dados buscou também identificar situações em que esses obstáculos se sobrepunham ou resistiam à categorização clara, sugerindo a necessidade de uma abordagem mais flexível e integrada.

3 Referencial teórico

O referencial teórico do estudo é a Teoria das Situações Didáticas (TSD) de Guy Brousseau, que fornece um arcabouço para entender como o ensino e a aprendizagem ocorrem pela interação entre o professor, os alunos, *milieu* e o conhecimento a ser ensinado (Brousseau, 2002). A TSD introduz diversos conceitos para modelar situações em sala de aula, entre eles os conceitos de *contrato didático*, *situações didáticas*, *situações adidáticas*, *devolução* e *institucionalização*, que são essenciais para compreender o processo de aprendizagem. Este texto foca nos *obstáculos epistemológicos* — originalmente desenvolvido por Bachelard (2002) e adaptado por Brousseau para a educação matemática — e *obstáculos didáticos*, que se originam das estratégias de ensino ou representações escolhidas para apresentar um conceito. "Falamos de obstáculos didáticos quando metáforas, representações e outros recursos instrucionais introduzidos por educadores resultam em ideias dos alunos que são inconsistentes com objetivos mais complexos de aprendizagem matemática" (Cortina; Višňovská; Zúñiga, 2014, p. 3).

Duroux (1983) buscou oferecer algumas reflexões para ajudar a esclarecer o conceito de obstáculo e diferenciá-lo da dificuldade, tornando-o mais aplicável e útil no contexto da análise didática. Duroux chegou aos seguintes quatro pontos sobre o conceito de obstáculo epistemológico: 1) Um obstáculo é um *conhecimento*, que funciona como tal em várias situações específicas não é válido em novos contextos; 2) Um obstáculo leva a erros específicos e identificáveis quando aplicado em situações fora de seu domínio de validade; 3) Um obstáculo é um conhecimento estável, no sentido de que os estudantes resistem a abandoná-lo, mesmo quando inaplicável, muitas vezes tentando adaptá-lo a novos contextos de maneira complexa ou inadequada; 4) Um obstáculo só pode ser superado em situações que exigem sua rejeição, sendo essa rejeição essencial para o desenvolvimento de novos conhecimentos.

Ao contrário dos obstáculos ontogênicos e epistemológicos, que são inerentes à natureza do conhecimento e ao desenvolvimento cognitivo, os obstáculos didáticos surgem da forma como o conteúdo é ensinado. Isso significa que eles podem ser mitigados ou até completamente evitados por meio de um planejamento curricular cuidadoso. Curriculistas e professores devem considerar como certas apresentações de conceitos matemáticos podem, de fato, criar obstáculos.

4 Resultados e discussão

Situação A

Os alunos tinham a tarefa de comparar as frações $\frac{55}{6}$ e $\frac{33}{4}$. Após concluírem as discussões em grupo, o apresentador do Grupo 2 explicou sua abordagem:

> Determinamos que, para compará-las, primeiro precisaríamos encontrar denominadores comuns. (Apresentador do Grupo 2)

O instrutor então perguntou à turma se eles concordavam com esse método. A maioria dos grupos adotou uma abordagem semelhante, exceto o Grupo 5. O instrutor então exibiu o quadro branco do Grupo 5, e seu apresentador explicou:

> Convertemos as frações para números mistos e eliminamos as frações impróprias. (Apresentador do Grupo 5)

O instrutor sintetizou ambas as abordagens, enfatizando a lógica por trás do método do Grupo 5:

> Os números mistos têm números inteiros diferentes, então claramente um é maior. (Instrutor)

Análise da Situação A

Enquanto a maioria dos alunos abordou o problema buscando denominadores comuns, o Grupo 5 empregou uma estratégia diferente, convertendo as frações impróprias em números mistos. O instrutor destacou a eficiência desse método, pois os números inteiros diferentes imediatamente forneceram uma comparação clara.

Não temos dados detalhados sobre como esses futuros professores foram ensinados sobre frações na escola primária. É provável que os métodos tradicionais enfatizassem a importância de denominadores comuns para comparar frações. Isso poderia explicar por que a maioria dos grupos recorreu automaticamente à busca de denominadores comuns, em vez de explorar outras estratégias de comparação, como a conversão para números mistos.

Essa dependência em achar denominadores comuns, embora matematicamente válida, pode representar um obstáculo didático, onde métodos instrucionais ou hábitos desenvolvidos na educação básica limitam a flexibilidade dos alunos na resolução de problemas. Nesse caso, a ênfase em denominadores comuns pode ter restringido os alunos de explorarem estratégias alternativas e muitas vezes mais simples, como comparar primeiro a parte inteira dos números.

Situação B

Em uma nova atividade de classe do livro didático, os alunos foram convidados a comparar frações sob restrições específicas: eles não podiam usar frações equivalentes com denominadores comuns, nem converter as frações em decimais, nem usar números mistos ou desenhar diagramas.

Enquanto observava os grupos, um aluno do Grupo 1 expressou incerteza sobre como articular seu raciocínio, dizendo: *"Não estou sabendo como escrever isso"*. O instrutor incentivou o aluno a explicar seu pensamento:

O que você quer dizer? (Instrutor)
As partes são maiores e há mais. (Aluno do Grupo 1)
Bom, escreva isso. Mostre-me por quê. (Instrutor)

O aluno, então, escreveu no quadro do grupo: $\frac{1}{43} > \frac{1}{45}$, seguido de *"*$\frac{27}{43} > \frac{26}{45}$ *porque 27 > 26"*. Durante a apresentação para a classe, o quadro do Grupo 5 foi projetado para que todos os grupos pudessem ver (Figura 1).

Figura 1: Anotações do Grupo 5 para explicar a comparação entre $\frac{27}{43}$ e $\frac{26}{45}$

$$\frac{21.5}{43} \qquad \frac{22.5}{45}$$

$$27 - 21.5 = 5.5 \qquad 26 - 22.5 = 3.5$$

Mais longe do marco $\frac{1}{2}$

Fonte: Acervo do estudo

O instrutor, então, fez uma pergunta: *"Isto está correto ou há algo errado?"*. Como ninguém respondeu, o instrutor continuou, apontando um erro conceitual: *"O que está errado* *ao usar 5,5 e 3,5?".* O silêncio continuou, e o professor explicou:

> A distância de $\frac{27}{43}$ em relação a $\frac{1}{2}$ não é 5,5. É $\frac{5,5}{43}$. E, da mesma forma, $\frac{3,5}{45}$. Você não pode esquecer o tamanho das partes. (Instrutor)

Análise da Situação B

Vamos focar no uso incorreto de distâncias em relação a $\frac{1}{2}$ pelo Grupo 5. Quando se faz a transição de números naturais para frações, há uma mudança fundamental em como pensamos sobre "tamanhos de grupo". Por exemplo, em números naturais, se escrevemos 234 em notação expandida, obtemos: 2 grupos de 100, 3 grupos de 10 e 4 unidades. Com frações, uma abordagem semelhante pode ser aplicada. Por exemplo, $\frac{27}{43}$ pode ser pensado como 27 grupos de partes em 43avos. Nesse caso, ao lidar com partes de 43avos, estamos trabalhando com essas partes como a unidade de medida.

Um obstáculo epistemológico aqui surge quando os alunos aplicam incorretamente uma técnica adequada para comparar distâncias em números naturais para frações, onde o tamanho da unidade mudou. Em números naturais, podem-se comparar as diferenças diretamente (por exemplo, 27 e 26) porque os tamanhos dos grupos, *dezenas e unidades*, são os mesmos refletidos refletido na notação. Mas com frações como $\frac{27}{46}$ e $\frac{26}{45}$, o denominador altera o tamanho do grupo e, portanto, as distâncias devem ser ajustadas para levar em consideração essa nova unidade. Como as duas frações são maiores que $\frac{1}{2}$, os alunos do Grupo 5 precisaram calcular as distâncias a que cada uma delas está em relação a $\frac{1}{2}$ (o que, na verdade se assemelha à tarefa inicial de comparar, que pode ser também pensada como comparar as distâncias a que cada uma delas está do zero). Eles falharam em levar em consideração que as distâncias deveriam ser relativas ao tamanho do grupo (partes de 43avos ou 45avos) ao invés da diferença absoluta entre os numeradores.

Como já aludimos acima, um outro problema foi o grupo ter usado a estratégia de comparar a um marco em primeiro lugar. Embora esse seja um método viável, ele não é muito eficiente neste caso, quando ambos os números a serem comparados são maiores que o marco. Essa estratégia é mais fácil e eficiente se um dos números é maior que o marco e o outro, menor. Afinal, após calcularem essas distâncias ao marco, os alunos ainda precisariam comparar essas distâncias: $\frac{5,5}{27}$ e $\frac{3,5}{26}$. Ou seja, eles se veriam de volta ao ponto de partida, precisando comparar duas frações novamente. O aluno do Grupo 1 tinha uma abordagem mais eficaz: *"Há mais* *partes e as partes são maiores".* Traduzindo isso para o raciocínio algébrico, pode-se inferir que $\frac{27}{43} > \frac{26}{43} > \frac{26}{45}$. A primeira desigualdade se justifica pelo número de partes, e a segunda desigualdade se justifica pelo tamanho das partes. Isso é exatamente o que o aluno do Grupo 1 estava aludindo. O problema epistemológico aqui é que os alunos ainda estão tentando encontrar um método sistemático, e isso os impede de perceber que poderiam fazer um argumento mais direto, como o Grupo 1 fez.

Para facilitar uma compreensão mais profunda do erro do Grupo 5 sem dizer diretamente o que estava errado, o instrutor poderia ter introduzido um par diferente de frações, como $\frac{7}{10}$ e $\frac{19}{32}$. Aplicando o método do grupo para calcular a distância de ambas as frações ao ponto de referência $\frac{1}{2}$, eles concluiriam erroneamente que $\frac{19}{32}$ é maior que $\frac{7}{10}$. Isso poderia levá-los a revisar seu método e tentar descobrir o que estava errado. O instrutor provavelmente optou por não guiar os alunos através de um exemplo semelhante devido à limitação de tempo e ao fato de que esse método de ponto de referência não se aplicaria de forma eficaz ao par de frações em questão. No entanto, ao apontar o erro, o instrutor garantiu que os alunos reconhecessem as limitações de seu método, preparando o caminho para abordagens mais precisas e conceituais no futuro.

Há muitas hipóteses que se pode derivar deste exemplo: ele representaria um obstáculo epistemológico porque os alunos estão tentando usar unidades inteiras na medição de distância, enquanto na verdade deveriam usar unidades fracionárias (um conhecimento válido no contexto dos naturais, mas que falha no contexto das frações, o que satisfaz o conceito de obstáculo epistemológico como explicitado por Duroux (1983))? Ou poderia ser um obstáculo didático porque eles aprenderam previamente o método de utilizar um marco, e ensiná-lo diretamente pode ter limitado sua capacidade de pensar de maneira mais flexível? Nesse caso, o ensino direto do método pode ter sido um desserviço, impedindo os alunos de descobrir estratégias mais eficientes por conta própria.

Outra possível interpretação de por que o Grupo 5 escolheu o método de comparar com um marco de referência pode estar relacionada ao contrato didático (Brousseau, 2002). Nesse caso, os alunos podem ter tentado usar um método que achavam que o professor queria que eles aplicassem, em vez de explorar estratégias próprias. No entanto, como este artigo foca nos obstáculos didáticos e epistemológicos, em vez do contrato didático, não aprofundaremos esse aspecto aqui.

5 Conclusões

Este estudo examinou os obstáculos didáticos e epistemológicos que futuros professores enfrentam ao resolver tarefas com frações em um curso de formação docente. A análise, baseada na Teoria das Situações Didáticas (TSD), revelou que os futuros professores frequentemente se apoiam em estratégias instruídas de forma mecânica, como a busca por denominadores comuns, que embora matematicamente corretas, limitam a flexibilidade no raciocínio e a exploração de alternativas mais eficientes.

Os obstáculos epistemológicos observados estão relacionados à dificuldade dos alunos em aplicar corretamente seus conhecimentos prévios sobre números inteiros ao contexto de frações. Em várias situações, os alunos compararam frações de maneira inadequada, utilizando estratégias válidas para números inteiros, mas que não se aplicam a frações, como ignorar o tamanho relativo das partes ao comparar numeradores. Esses erros indicam a resistência dos alunos em abandonar métodos previamente aprendidos, o que caracteriza o obstáculo epistemológico.

Por outro lado, os obstáculos didáticos surgiram a partir de métodos de ensino que encorajam o uso de estratégias tradicionais sem permitir a exploração de diferentes abordagens conceituais. Esse foco excessivo em métodos mecânicos, como encontrar denominadores comuns, limitou a capacidade dos alunos de perceber outras maneiras mais simples de resolver problemas com frações, como a conversão para números mistos.

Outro ponto a ser considerado é a influência do contrato didático, que pode ter levado alguns grupos a utilizarem métodos que acreditavam ser esperados pelo professor, em vez de explorarem estratégias próprias e mais adequadas à situação. Embora essa questão não tenha sido o foco principal deste artigo, ela foi identificada como uma área potencial para futuras investigações.

6 Considerações adicionais

Em um curso de um semestre com um livro didático adotado e restrições de tempo significativas, os instrutores enfrentam vários desafios que podem impedi-los de oferecer aos alunos as oportunidades necessárias para construir seu próprio conhecimento. A estrutura do curso frequentemente prioriza a cobertura de uma ampla gama de tópicos em um curto espaço de tempo, deixando pouco espaço para uma exploração profunda ou aprendizado reflexivo. Os instrutores são frequentemente limitados pelo conteúdo e pelo ritmo do livro didático adotado, o que pode restringir ainda mais sua flexibilidade para criar situações didáticas em que os alunos possam se engajar em uma aprendizagem mais significativa e independente.

Referências

BACHELARD, Gaston. *The formation of the scientific mind:* a contribution to a psychoanalysis of objective knowledge. Tradução de Mary McAllester Jones. Manchester: Clinamen Press, 2002.

BECKMANN, Sybilla. *Mathematics for elementary teachers with activities*. New York: Pearson, 2018.

BROUSSEAU, Guy. *Theory of Didactical Situations in Mathematics*: Didactique des Mathématiques, 1970-1990. New York: Kluwer Academic Publishers, 2002.

CORTINA, José Luis; VIŠŇOVSKÁ, Jana; ZÚÑIGA, Claudia. Equipartition as a didactical obstacle in fraction instruction. *Acta Didactica Universitatis Comenianae*, v. 14, p. 1-18, 2014.

DUROUX, Alain. La valeur absolue: difficultés majeures pour une notion mineure. *Petit x*, v. 3, p. 43-67, 1983.