Grupo de Trabalho 4
EDUCAÇÃO MATEMÁTICA NO ENSINO SUPERIOR

Coordenação
Lilian Nasser, IM/UFRJ e CETIQT/SENAI
Maria Cristina Barufi, IME-USP
Roberto Ribeiro Baldino, GPA – UNESP/Rio Claro

Apresentação

A produção de pesquisa em Educação Matemática no Ensino Superior no Brasil era, até pouco tempo, bem acanhada. Isso se deu pelo fato de a Educação Matemática ter sido estimulada e financiada, na década de 80, pelo Subprograma de Educação para a Ciência (SPEC) do Programa de Apoio ao Desenvolvimento Científico e Tecnológico (PADCT) da CAPES, que privilegiava projetos de melhoria do ensino/aprendizagem de Matemática na escola básica.

Com a valorização que a Educação Matemática foi conquistando como área de pesquisa, e o crescimento do número de doutores em Educação Matemática atuando nas universidades brasileiras, esse quadro vem se revertendo, e observa-se um número cada vez maior de projetos e teses cujo objeto de pesquisa é a Educação Matemática no ensino superior. A introdução de novas tecnologias no ensino também contribuiu muito para o crescimento da pesquisa voltada para esse nível de ensino. Vários estudos têm como objetivo investigar as vantagens e as adaptações de devem ser feitas ao ensinar tópicos de matemática do ensino superior usando a Internet, softwares específicos, ou, simplesmente, usando o computador como ferramenta. O ensino por meio de softwares de geometria dinâmica como o Cabri-geometre ou o Sketchpad tem sido tema de investigações, sob diversos pontos de vista.

Os trabalhos sobre Educação Matemática no ensino superior têm interface com diversas áreas de interesse, como: Novas Tecnologias no Ensino, Pensamento Matemático Avançado, Argumentação e Provas, Funções e Gráficos, Pensamento Algébrico, Pensamento Geométrico e Espacial, Visualização, Modelagem, Formação de Professores, Avaliação da Aprendizagem, Crenças e Concepções de alunos/professores, Linguagem, entre outras. Por isso, é possível que haja trabalhos produzidos no Brasil sobre a Educação Matemática no Ensino Superior incluídos em outros grupos de trabalho deste seminário. Vale observar que o grupo internacional de Psicologia da Educação Matemática (Psychology of Mathematics Education – PME), que promove encontros anuais (o próximo, em julho/2001, será o 25°, na Holanda), classifica os trabalhos apresentados por áreas de interesse, e não por níveis de ensino.

O Grupo de Trabalho sobre Educação Matemática no Ensino Superior contava, a princípio com a colaboração, na coordenação, dos professores Silvia Dias Alcântara Machado, da PUC-SP, e Roberto Ribeiro Baldino, da UNESP de Rio Claro, SP. Apesar de eles não estarem presentes ao seminário, sua contribuição sobre o tema do grupo é marcante, e deve ser mencionada.

Silvia Alcântara Machado tem desenvolvido trabalhos e orientado dissertações de mestrado em diversas frentes, ligadas ao ensino superior: desenvolvimento de habilidades de visualização, concepções dos alunos que chegam ao ensino superior sobre funções, polinômios, sistemas de equações. Também investigou o ensino-aprendizagem de Álgebra Linear e Geometria Analítica, e o potencial do software Cabri-Geometre na transformação de concepções dos professores.

O prof. Baldino tem apresentado trabalhos nos encontros anuais do PME, ligados à área de Pensamento Matemático Avançado. A metodologia de ensino criada por ele, intitulada Assimilação Solidária, tem servido de modelo para vários estudos. Orientou diversas dissertações de mestrado na UNESP de Rio Claro, duas das quais serão apresentadas neste grupo, ligadas ao ensino de Cálculo e Álgebra Linear. Atualmente está interessado no "Papel da definição matemática do século 20, e sua conseqüência no ensino".

Os professores Sonia Igliori e Benedito Silva, da PUC de São Paulo também possuem uma vasta produção em Educação Matemática no Ensino Superior, individualmente e em conjunto. Neste seminário vão apresentar um trabalho sobre concepções dos estudantes sobre números reais, mas também desenvolveram investigações sobre o conceito de função, limite e de derivada, em ambientes computacionais.

O professor Armindo Cassol, da UNISINOS, RS, desenvolveu sua dissertação de mestrado sobre a produção de significados para a derivada, tendo como referencial o Modelo Teórico dos Campos Semânticos, de Rômulo Campos Lins (UNESP-Rio Claro-SP). Como resultado, foi produzido um software, chamado Sistema Barra, com o qual é possível tornar visíveis as grandezas envolvidas num problema, bem como a sua variação.

Em tese de doutorado defendida em Grenoble, na França, a professora Marilena Bittar, da UFMS, investigou a introdução da noção de vetor, usando a teoria dos campos conceituais de Vergnaud, os registros de representação semiótica de Duval, e a as noções de instrumento e objeto (R. Douady). O estudo inclui uma levantamento de pesquisas sobre o ensino de vetores, e da abordagem desse tema nos livros didáticos.

Na linha de crenças e concepções, temos o trabalho de dissertação de mestrado apresentado na UNESP de Rio Claro pelo professor Arlindo José de Souza Junior, da Universidade Federal de Uberlândia. Investigando as concepções do professor universitário sobre o ensino de matemática, ele concluiu que, em geral, os professores universitários lêem pouco sobre ensino, baseiam sua prática pedagógica na vivência e no cotidiano, e acreditam que a matemática deve ser ensinada através de aplicações. Já em sua tese de doutorado, o professor Arlindo analisou a trajetória de um grupo no processo de ensinar e aprender Cálculo, trabalho que será apresentado neste seminário. Será apresentado também o trabalho sobre as concepções prévias de estudantes sobre números reais, de Sonia Igliori e Benedito Silva, da PUC-SP. Estudando as concepções e estratégias de aprendizagem de alunos de cursos de engenharia, Maria Clara Frota (PUCMG) e João A. Filocre Saraiva (UFMG) concluíram que a estratégia de resolução de problemas é preponderante como método de estudo, independentemente da engenharia cursada.

Um grupo de professores do Instituto de Matemática da UFRJ, coordenado pela professora Angela Rocha dos Santos, vem desenvolvendo trabalhos sobre Educação Matemática no Ensino Superior em duas linhas. No que se refere a Novas Tecnologias no Ensino, têm pesquisado métodos e técnicas de utilização do computador no ensino de Cálculo e Álgebra Linear, além de desenvolver aplicativos e ferramentas para a introdução de aspectos gráficos e numéricos no ensino dessas disciplinas. O outro aspecto abordado é o de Tecnologias de Informação aplicadas ao Ensino à Distância. Nesse sentido, vêm pesquisando e desenvolvendo disciplinas a serem oferecidas via Internet, incluindo adaptação de currículos e treinamento de tutores.

O impacto do uso das novas tecnologias no ensino de matemática no curso de engenharia têxtil do CETIQT/SENAI do Rio de Janeiro foi investigado pela professora Lilian Nasser, concluindo que o bom rendimento do ensino usando as novas tecnologias depende da atitude do professor, e da motivação do aluno.

Embora não sejam apresentados pessoalmente por seus autores, os trabalhos citados até aqui são contribuições importantes na linha de pesquisa deste grupo, e por isso estão aqui registradas.

Os trabalhos apresentados neste grupo de trabalho sobre Educação Matemática no Ensino Superior estão agrupados em dois blocos. A primeira sessão consta dos trabalhos que abordam temas ligados ao ensino e aprendizagem de disciplinas de matemática no ensino superior, como Cálculo, Álgebra Linear e Análise Real. Os trabalhos do encontro seguinte têm um enfoque ligado ao discurso ou a concepções de alunos e/ou professores sobre aspectos diversos do ensino e da aprendizagem de matemática no ensino superior, incluindo os cursos de Licenciatura em Matemática.

Maria Cristina Barufi, da USP, explora a negociação dos significados para esclarecer em que medida a abordagem do Cálculo é uma construção significativa. O trabalho também discute a existência de livros didáticos de boa qualidade, e o papel fundamental do professor e do computador como instrumento facilitador da aprendizagem.

Ainda sobre o ensino de Cálculo, Cláudia Segadas Vianna (IM-UFRJ) analisou, em sua tese de doutorado apresentada na Inglaterra, a compreensão do Teorema Fundamental do Cálculo. Os instrumentos usados foram testes escritos, entrevistas, e entrevistas com computador. As dificuldades detectadas estão relacionadas ao conceito de função, e à compreensão dos verdadeiros papéis de uma prova na matemática.

Claudia Laus Angelo, da URI, RS, analisou a sobrevivência da Regra de L'Hospital nos livros textos de Cálculo I mais usados atualmente, comparando com livros antigos. Para isso, ela usou os referenciais teóricos de Chevallard e Hariki, concluindo muitos aspectos dos livros antigos foram preservados.

Em sua tese de doutorado apresentada na UNESP de Rio Claro, Ligia Arantes Sad (UFES) estuda uma abordagem epistemológica do ensino e aprendizagem de Cáculo. O suporte teórico para o desenvolvimento do trabalho foi o Modelo Teórico dos Campos Semânticos, já citado anteriormente.

Patrícia Fantinel, da UFRS, analisa a influência do uso de representações gráficas na compreensão de conceitos de Cálculo e Álgebra Linear. Seu estudo foi objeto de dissertação de mestrado defendida na UNESP de Rio Claro, SP.

Também como dissertação de mestrado da UNESP de Rio Claro, SP, Rute Henrique da Silva (UFRS) apresenta uma abordagem diferente da usual para a disciplina de Álgebra Linear, ministrada para uma turma de Ciências da Computação. Na proposta foram usadas a metodologia da assimilação solidária, e sugestões provenientes dos trabalhos de "pensamento matemático avançado" do PME.

Fechando os trabalhos desse primeiro bloco, vem o trabalho referente à tese de doutorado da professora Márcia Fusaro Pinto, da UFMG, defendida na Inglaterra. A pesquisa é sobre a compreensão de Análise Real, por uma turma de final de curso de Licenciatura em Matemática. São discutidos dois tipos de estratégias usadas pelos alunos: a atribuição de significados e a extração de significados.

No segundo bloco, os trabalhos são mais voltados para os cursos de Licenciatura, e mostram uma preocupação com as concepções de alunos e professores sobre o ensino-aprendizagem.

As dificuldades no domínio do processo dedutivo apresentadas por alunos de graduação em Matemática são analisadas por Lilian Nasser em sua pesquisa, desenvolvida junto a um grupo do Projeto Fundão no IM/UFRJ. A conclusão é de que os professores desse curso devem investir na preparação dos alunos para que saibam argumentar e justificar suas afirmativas.

Arlindo José de Souza Junior, da UFU, acompanhou a trajetória de um grupo no processo de ensinar e aprender Cálculo, para seu trabalho de tese de doutorado na UNICAMP. A análise levou em conta a dinâmica do trabalho coletivo, o envolvimento dos indivíduos nesse trabalho, e o processo de produção de saberes do grupo.

A professora Gilda Pallis, da PUC-Rio é responsável pela disciplina de Introdução ao Cáculo, que pretende suprir as deficiências dos alunos que chegam à universidade. Neste trabalho, ela procura analisar as estratégias adotadas numa seqüência didática dedicada ao estudo da Lógica Matemática. Foram introduzidas inovações, como a redação de um portfolio, e a produção de uma auto-avaliação.

O conhecimento das concepções prévias sobre números reais dos estudantes de um curso de Computação foi enfocado por Sonia igliori e Benedito Silva, da PUC-SP. Além de observar as concepções errôneas dos alunos, eles também avaliaram quais destas persistem após um estudo sistemático de Análise Real.

Miguel Koga, da UNEMAT, por sua vez, analisou o discurso de professores de Cálculo de cursos de Licenciatura em Matemática do estado de São Paulo. A visão que esses professores têm do futuro professor é a de que o importante é saber o conteúdo, não dando muita importância à análise dos conceitos da matemática, nem dos meios que ela pode ser inserida.

Ainda tendo como amostra alunos concluintes do curso de Licenciatura em Matemática, a professora Josinalva E. Menezes, da UFFRPE, investigou as representações sociais sobre características necessárias a um bom professor de matemática em sala de aula.

A diversidade dos enfoques dos trabalhos constantes do GT-4 mostra como a Educação Matemática no Ensino Superior tem crescido quanto área de pesquisa , e que há perspectivas de um envolvimento cada vez maior, gerando um corpo rico e substancial de subsídios para melhorar a aprendizagem e o ensino de Matemática no 3° grau.

Síntese dos trabalhos

TRABALHO COLETIVO NA UNIVERSIDADE: TRAJETÓRIA DE UM GRUPO NO PROCESSO DE ENSINAR E APRENDER CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

Arlindo Jose de Souza Junior[1]

Na nossa pesquisa procuramos compreender o processo de produção coletiva de saberes realizado por um grupo de professores e alunos da Universidade Estadual de Campinas - UNICAMP, que desenvolveu um trabalho sobre o processo de ensinar e aprender Cálculo Diferencial e Integral.

Para discutir a trajetória deste grupo participamos de suas reuniões durante quatro semestres, nos anos de 1996, 1997 e 1998. Realizamos entrevistas (complementares e recorrentes ao longo desse período) com professores que participaram deste grupo. Além disso, colecionamos o material (relatórios, artigos, projetos, atividades e exercícios) produzido

[1] Professor da Universidade Federal de Uberlândia - UFU: Doutor em Educação: Educação Matemática.

pelo grupo durante a realização do trabalho e também documentos produzidos pelo o grupo e sobre o grupo.

Tal como Ezpeleta e Rockwell (1981: 11) consideramos importante *"olhar com particular interesse o movimento social a partir de situações e dos sujeitos que realizam anonimamente a história"*; buscamos investigar assim: a *"trama real em que se realiza a educação"*. Segundo as autoras, essa trama está em permanente construção e articula histórias locais, que podem ser individuais ou coletivas, também ressaltam a importância dessa investigação no sentido de constituir novas alternativas pedagógicas e políticas.

A quantidade de turmas de Cálculo I e II oferecidas num mesmo semestre possibilitou a constituição do grupo investigado, que surgiu da transformação do trabalho de grupos precedentes que trabalharam com alunos que cursavam as referidas disciplinas. Constatamos também que a utilização do computador no processo de ensinar e aprender Cálculo propiciou a aglutinação dos professores e que a participação de "alunos bolsistas" foi possível graças ao apoio fornecido por três programas das Pró-Reitorias de graduação e de pesquisa da UNICAMP.

No trabalho coletivo os elementos do grupo realizaram reflexões sistemáticas e coletivas sobre o processo de aprender e ensinar Cálculo, a partir de uma reflexão cotidiana sobre o desenvolvimento da prática educativa. Nesse processo, foram desenvolvidos alguns saberes coletivos sobre como trabalhar com o computador e com projetos, O que fez com que o grupo refletisse também sobre o processo de avaliação e sobre a aprendizagem dos alunos. Nesse movimento, o grupo começou a construir um caminho em que alunos e professores se reconheceram como produtores de saberes e conhecimentos.

Neste processo de planejar, realizar e discutir as atividades e os projetos, percebemos que o grupo passou a organizar a sua produção, refletindo sobre o que havia produzido e sobre as diferentes fontes utilizadas para tal.

Ao procurar organizar tudo o que havia realizado nos semestres anteriores, o grupo sistematizou a sua produção em apostilas que eram fornecidas à todos os elementos do grupo. Os relatórios entregues pelos tutores também se tornaram uma fonte sistemática de dados sobre o andamento do trabalho no laboratório de informática. A produção de relatórios2, roteiro3 de vídeo, artigo4, mini-cursos5 e comunicações6 em congressos sobre o trabalho do grupo também exigiu a sistematização de informações. As anotações realizadas pelas coordenadoras do grupo, durante o trabalho coletivo, foram uma fonte importante para a reflexão. Os relatórios7 do programa de Apoio ao Estudante de Graduação - PAEG também foram fundamentais para a obtenção sistemática de dados sobre o desenvolvimento desse programa e do trabalho com os alunos.

---

[2] FIGUEIREDO e SANTOS (1996b: 1997d e 1999b)

[3] FIGUEIREDO, TAVARES e SEARA (1997).

[4] FIGUEIREDO e SANTOS (1997c)

[5] FIGUEIREDO e SANTOS (1998b).

[6] FERREIRA (1997), FIGUEIREDO (1998), FIGUEIREDO e SANTOS (1997a: 1997e:1998a), FIGUEIREDO e MARTINS (1999), FIGUEIREDO, SANTOS e MELLO (1999), MELLO e SANTOS (1999), SANTOS (1998).

[7] UNIVERSIDADE ESTADUAL DE CAMPINAS. Pró - Reitoria de Graduação. Comissão Permanente para os Vestibulares. Avaliação do Programa de Apoio ao Estudante de Graduação - (PAEG) Cálculo I. Campinas, novembro. 1996. 102 p.

_____. Avaliação do Programa de Apoio ao Avaliação do Programa de Apoio ao Estudante de Graduação - (PAEG) Cálculo II. Campinas, abril 1997. 43p

_____. Avaliação do Programa de Apoio ao Estudante de Graduação - (PAEG) Cálculo I. Campinas, outubro 1997. 45p.

_____. Avaliação do Programa de Apoio ao Ensino de Graduação - (PAEG) cálculo I MA111/MA151 Primeiro semestre. Cálculo II. Campinas, Abril 1998. . 37p.

_____. Avaliação do Programa de Apoio ao Ensino de Graduação - (PAEG) Cálculo I. Campinas, setembro 1998. 48p.

O trabalho coletivo foi uma oportunidade que permitiu aos elementos do grupo elaborar e reelaborar seus saberes sobre o processo de ensinar e aprender Cálculo. Os diferentes interesses e as diferentes concepções dos participantes oscilaram em função de como desenvolver um trabalho coletivo. Desta forma, podemos dizer que, produzir saberes em grupo é um processo de produzir na diversidade.

O grupo foi se constituindo de diferentes maneiras em cada semestre, desenvolvendo, assim, uma trajetória particular de acordo com as necessidades do próprio grupo. A forma como o grupo foi se constituindo, a partir do primeiro semestre de 1996, favoreceu a formação de um grupo heterogêneo, com professores de diferentes áreas da matemática e bolsistas de diferentes cursos de graduação e de pós-graduação da UNICAMP; também possibilitou a organização de um grupo aberto, para o qual, a cada semestre, se convidavam outros professores e também selecionavam-se "novos" bolsistas para participarem do trabalho coletivo. É importante destacar que alguns professores e alunos bolsistas permaneceram no trabalho coletivo no decorrer dos semestres analisados constituíram o núcleo do grupo.

O fato do grupo ser heterogêneo e aberto contribuiu para a criação de um espaço muito rico de aprendizagem individual e coletiva no qual o indivíduo, pelas suas idéias, reflexões e saberes, contribuiu com o desenvolvimento do trabalho coletivo e, por outro lado, o fato do indivíduo participar de um trabalho coletivo, que produziu e acumulou saberes, possibilitou também um espaço de aprendizagem para os professores e alunos. Neste sentido, Bakhtin (1990: 115), destaca o papel do diálogo e do outro na constituição da consciência humana. Ele ressalta que: *"Quanto mais forte, mais bem organizada e diferenciada for a coletividade no interior da qual o indivíduo se orienta, mais distinto e complexo será o seu mundo interior".*

Ao procurarmos compreender a trajetória do grupo, verificamos que tanto o grupo como os seus elementos foram se definindo e redefinindo nesse processo. A meta do trabalho coletivo era melhorar o processo de ensinar e aprender Cálculo, por isso mesmo, seus objetivos foram sendo reelaborados de acordo com a configuração do grupo em cada semestre. Esses objetivos foram estruturados e reestruturados num processo de negociação coletiva na qual os objetivos dos indivíduos influenciaram os objetivos do coletivo e vice-versa. Entendemos que essa negociação que se estabeleceu no grupo, garantiu a continuidade de seu trabalho, pois, por um lado as diferenças entre os sujeitos foram respeitadas, por outro, encontrou-se uma forma de atuação conjunta.

A trajetória do grupo investigado está diretamente relacionada com os saberes produzidos pelo grupo num movimento dialético que oscilou entre o singular e o coletivo. Podemos dizer que produzir saberes no coletivo é um aprendizado realizado no interior de um processo de negociação.

Compreendemos que os saberes foram produzidos dentro de um processo dialético de negociação interno ao grupo e dentro de um contexto histórico. Percebemos que eles foram sendo produzidos num movimento de busca da melhor forma de desenvolver o trabalho educativo. Entendemos que a produção dos saberes é social e, portanto, **o que** foi produzido está diretamente relacionado com a forma **como** foi produzido e vice-versa.

Ao realizar as suas ações, o grupo foi, aos poucos, procurando melhorar a sua forma de atuação. Nesse processo, também procurou melhorar as suas condições de trabalho no interior da universidade. Destacamos que o grupo enfrentou muita dificuldade na utilização de alguns laboratórios de informática da universidade, principalmente, em relação aos aspectos físicos e organizacionais. Podemos dizer então que, nesse processo, produziram-se saberes e melhores condições profissionais.

A reflexão sobre coletivos humanos e tecnologias da inteligência possibilitou a Lévy (1998a: 28) elaborar o conceito de inteligência coletiva da seguinte forma: *"É uma inteligência distribuída por toda parte, incessantemente valorizada, coordenada em tempo real, que resulta em uma mobilização efetiva das competências".* Ao discutir sobre como essa inteligência está distribuída, o autor parte do seguinte pressuposto: *"Ninguém sabe tudo, todos sabem alguma* *coisa, todo o saber está na humanidade. Não existe nenhum reservatório de conhecimento transcendente, e o saber não é nada além do que as pessoas sabem".*

Refletindo sobre o pensamento de Pierre Lévy, podemos dizer que o grupo que investigamos produziu uma dinâmica própria, que pode ser identificada como inteligência coletiva e para a qual os elementos do grupo contribuíram e da qual usufruíram.

A crença do grupo de que *"todos sabem alguma coisa"* possibilitou um processo de negociação em seu interior, o que resultou numa produção coletiva, fruto dessa inteligência coletiva que se movimenta num determinado contexto. a esse respeito Lévy (1998b: 111) argumenta que: *"A inteligência das sociedades humanas é variável e, no melhor dos casos, evolutiva, graças à natureza dos indivíduos que a compõem e, o que é a outra face de uma mesma realidade, das ligações, geralmente livres ou contratuais, que a tecem".*

De forma geral, esta pesquisa permite-nos reiterar que o conhecimento é prática social e como tal deve ser compreendido. De acordo com isso, acreditamos que, especialmente nas disciplinas mais tradicionais, por exemplo, aquelas relacionadas ao processo de ensinar e aprender Cálculo, é fundamental recorrer à construção negociada de saberes. Concluímos que o trabalho de professores, reunidos em grupos, constitui um requisito fundamental para o estabelecimento dessas negociações. No caso de nossa pesquisa, essa negociação girou em torno da utilização de computadores, do trabalho com projetos e da promoção de uma prática educativa em que professores e alunos se assumiram como produtores de conhecimento.

A investigação sobre a trajetória do grupo revelou-nos um pouco sobre o processo de produção coletiva de saberes em relação ao processo de ensinar e aprender na universidade. Compartilhamos com Mazzilli (1996: 04) a idéia de que a produção de saberes na universidade é uma das questões mais importantes a ser discutidas no atual contexto de crise da universidade brasileira. Para essa autora e também para nós, o papel da universidade como instituição social é o de gerar e difundir conhecimentos e saberes. O trabalho coletivo, além de possibilitar a produção de saberes necessários para o desenvolvimento do ensino com pesquisa, possibilita também a criação de uma "cultura favorável" no interior da universidade para enfrentar diferentes tipos de desafios.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BAKHTIN, Mikhail. Marxismo e filosofia da linguagem. São Paulo: Hucitec, 1990.

COSTA, Sueli, GROU, Maria Alice. Ensino de cálculo - uma questão de envolvimento. Campinas: UNICAMP, 1992. 11p. (Relatório Técnico, 6).

_____. Ensino de Matemática na Universidade fazendo frente às novas demandas da sociedade tecnológica. Graduação: Revista de Graduação da UFRJ, Rio de janeiro, p. 27-31, maio 1997.

_____. La Enseñanza del cálculo - una cuestión de involucramiento. Educación Matemática, v. 7, n. 1, abr. 1995.

COSTA, Sueli, GROU, Maria Alice, FIGUEIREDO, Vera . Mechanical curves - a kinematic Greek look through the computer. International Journal of Mathematical Education and Technology, v. 30, n. 3, 1999.

EZPELETA, Justa , ROCKWELL, Elise. Pesquisa participante. São Paulo: Cortez: Autores Associados, 1989.

FERREIRA, Eduardo Sebastiani. O Uso da História da Matemática nas Aulas de Cálculo. In: ENCONTRO LUSO-BRASILEIRO DE HISTÓRIA DA MATEMÁTICA E SEMINÁRIO NACIONAL DE HISTÓRIA DA MATEMÁTICA, 2., 1997, Águas de São Pedro .Anais... Águas de São Pedro, 1997. p. 153- 155.

FIGUEIREDO, Vera L., Enriquecendo o Ensino de Cálculo e Geometria Analítica com Questões Ambientais: O computador como ferramenta. , Contenido de los talleres interactivos y trabajos presentes en CD-Rom – CLATE´98 – Congreso Latinoamericano de Tecnologías Educativas (11 pág.). 1998.

FIGUEIREDO, Vera L. , SANTOS, Sandra A. Cálculo e geometria analítica com aplicações / PAEG: Uma proposta de ensino usando o computador. In: ENCONTRO A INFORMÁTICA NO ENSINO DA MATEMÁTICA, 1997, São Carlos. Anais... São Carlos, 1997a. p. 05-06.

_____. O computador no ensino de cálculo na UNICAMP e outras aplicações. Zetetiké, Campinas, v. 05, n. 07, p. 111-128, Jan./Jun. 1997c.

_____. Reflexões sobre um projeto coletivo para o ensino de matemática na universidade. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA (ENEM), 5., 1998, São Leopoldo. Anais.... São Leopoldo, 1998a. V. 2. p. 748-750.

_____. Relato de experiência: o computador no ensino de cálculo, o problema do lixo na UNICAMP e outras aplicações. Campinas: UNICAMP, 1997d. 17p. Relatório de pesquisa.

_____. Relatório parcial de atividades PAEG-Cálculo I. Campinas: UNICAMP, 1996b. 5p.

_____. Um panorama do cálculo integral via centros de massa. In: CONGRESSO NACIONAL DE MATEMÁTICA APLICADA E COMPUTACIONAL (CNMAC), 21,1998,Caxambu. Anais... Caxambu, 1998b. 51p. Mini-curso .

_____. Visualização de cúpulas de catedrais famosas usando o Mathematica. In: ENCONTRO A INFORMÁTICA NO ENSINO DA MATEMÁTICA, 1997, São Carlos. Anais... São Carlos, 1997e.

FIGUEIREDO, Vera L., MARTINS ., A. C. Gilli. Theme Project for Calculus Students: On Campus Waste Management. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON THE TEACHING OF MATHEMATICAL MODELLING AND APPLICATIONS. (ICTMA9), 9, 1999. Lisboa. . Anais.... Lisboa, 1999. p. 15.

FIGUEIREDO, Vera L, SANTOS, Sandra A., MELLO, Margarida. Limites na Internet: uma visão global. In: CONGRESSO NACIONAL DE MATEMÁTICA APLICADA E COMPUTACIONAL (CNMAC), 22., 1999a, Santos. Anais... Santos, 1999 p. 156.

_____. Domes, umbrellas and tents: a scenic tour guided by Mathematica. UNICAMP, 1999. 17p. Relatório de pesquisa, RP 56/99. 1999b.

FIGUEIREDO, Vera L., SANTOS, Sandra A., TAVARES, Maria da C. H., SEARA, Maria E. P., Roteirização do vídeo PAEG/Programa de Apoio ao Ensino de Graduação – UNICAMP. Pró-Reitoria de Graduação, Universidade Estadual de Campinas. Duração: 30 minutos. 1997.

LÉVY, Pierre. A inteligência coletiva: por uma antropologia do ciberespaço. São Paulo: Edições Loyola, 1998a.

_____. O que é o virtual? São Paulo: Editora 34, 1998b.

MAZZILI, Sueli. Notas sobre indissociabilidade entre ensino-pesquisa-extensão. Universidade e Sociedade. Maringá, n.11, p. 04- 10, junho 1996.

MELLO, Margarida. P., SANTOS, Sandra A. Modelling Optimisation Problem From Simple to Realistic. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON THE TEACHING OF MATHEMATICAL MODELLING AND APPLICATIONS. (ICTMA9), 9, 1999. Lisboa. . Anais.... Lisboa, 1999. p. 15.

SANTOS, Sandra A. Atividades Computacionais em cursos de cálculo e geometria analítica: um trabalho em continua evolução, Contenido de los talleres interactivos y trabajos presentes en CD-Rom – CLATE´98 – Congreso Latinoamericano de Tecnologías Educativas (11 pág.). 1998.

SOUZA JR. Arlindo. J. S. Concepções do professor universitário sobre o ensino da matemática. Rio Claro, 1993. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Universidade Estadual Paulista.

A REGRA DE L'HOSPITAL, A METÁFORA ECOLÓGICA E O DISCURSO DOS AUTORES DE LIVROS-TEXTOS[8]

Claudia Laus Angelo[9]

Resumo

Este artigo traz algumas considerações sobre o objeto matemático Regra de L'Hospital e a possibilidade de tratá-lo como uma espécie que habita os livros-textos de Cálculo Diferencial e Integral e neles sobrevive imerso no discurso dos autores. Através da análise da sobrevivência desse objeto em alguns livros-textos de Cálculo utilizados atualmente, foi possível observar as tensões que governam o discurso matemático veiculado pelos autores de livros-textos e verificar que a sobrevivência da espécie Regra de L'Hospital não é completamente uniforme, variando de autor para autor. Cabe ao professor a tarefa de seleção da espécie, conforme seus objetivos perante a turma em questão, na escolha pelo organismo que irá inserir no habitat sala de aula.

Introdução

A educação matemática em nível superior no Brasil é ainda bastante influenciada pelos livros-textos, utilizados por muitos professores como fonte de informação, como linha norteadora para condução da disciplina, como referência para os exercícios e/ou como fonte de questões para as avaliações. Os livros-textos "têm um papel central em todos os níveis da educação matemática, (...) moldando praticamente todos os aspectos do ensino e aprendizagem da matemática, nas escolas e universidades." (Hariki, 1992: ii) Em se tratando do nível superior, no qual as pesquisas em educação matemática ocupam ainda uma parcela pequena comparativamente as pesquisas realizadas nos outros níveis, a influência dos livros-textos é bastante significativa.

Neste artigo o livro-texto é visto como um habitat de objetos matemáticos no qual sobrevive a espécie Regra de L'Hospital (RLH). A análise de alguns livros-textos de Cálculo é feita através da análise da sobrevivência desse objeto matemático específico. A escolha pelo objeto matemático RLH se deve a própria dificuldade encontrada ao se tentar compreender as suas demonstrações contidas no livro-texto de Guidorizzi(1985). Essa dificuldade foi um impulso para que se investigasse o tratamento dado por outros autores ao mesmo objeto.

A análise da sobrevivência da espécie RLH nos livros-textos de Cálculo de Ávila(1981), Guidorizzi(1985), Swokowski(1983), Leithold(1982) e Simmons(1987) é feita com base num esquema de análise do discurso veiculado pelos livros-textos de Matemática de nível superior, desenvolvido por Hariki(1992) e no paradigma ecológico que Chevallard(1989) emprega para pensar sobre os fenômenos didáticos.

Desenvolvimento

Sobre o paradigma ecológico

O uso de conceitos ecológicos na educação matemática foi iniciado por Yves Chevallard em seus estudos sobre a transposição didática da matemática. Essa teoria trata do processo de migração de um saber da esfera sábia (esfera de produção do saber matemático) para a esfera

---

[8] Artigo baseado na Dissertação de Mestrado "A Regra de L'Hospital no habitat livro-texto: uma análise do discurso de alguns autores" apresentada ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Unesp, campus de Rio Claro em maio de 1997 e orientada pelo Dr. Sérgio Roberto Nobre.

[9] Professora do Departamento de Ciências Exatas e da Terra da Universidade Regional Integrada do Alto Uruguai e das Missões – URI, campus de Santo Ângelo.

de ensino (escola). Segundo Chevallard(1989), nessa transferência de conhecimento de uma esfera para outra ocorre "uma diferença na *ecologia* do saber, segundo este saber se situa em uma ou outra esfera, esfera sábia ou esfera de ensino." (p. 41).

O termo ecologia, bem como muitos outros comuns à Ecologia como meio ambiente, sobrevivência, habitat, foram inseridos por Chevallard em seu contexto de teorização da transposição didática. Ele distingue três grandes ecossistemas do conhecimento matemático: o sistema de ensino, a esfera sábia e a noosfera. O sistema de ensino refere-se ao ambiente onde ocorre o processo pedagógico, ou seja, o processo de ensino-aprendizagem. A esfera sábia é o ambiente dos matemáticos puros onde os saberes são produzidos e tomam reconhecimento e a noosfera é o sistema intermediário entre os outros dois, pois são seus habitantes (pedagogos, professores, pesquisadores em educação, pessoas ligadas às Secretarias de Educação etc) que vão determinar e adequar os saberes que sairão da esfera sábia para habitar o sistema de ensino.

A Regra de L'Hospital, vista como uma espécie que habita o ecossistema do conhecimento matemático, pode ser encontrada nos três ecossistemas descritos acima. Podemos encontrá-la, por exemplo, no habitat "sala de aula" do sistema de ensino; no habitat "livro-texto" presente no sistema de ensino e presente também na noosfera, quando o professor seleciona o(s) livro(s)-texto(s) que melhor se adapta(m) àquele sistema de ensino ou quando o autor está escrevendo o livro-texto; no habitat "aluno", quando faz parte de seu conjunto de conhecimentos; no habitat "artigos de revistas especializadas" presentes na esfera sábia etc.

O objetivo desse trabalho é investigar como a espécie RLH sobrevive no habitat livro-texto. Este habitat abriga diversos organismos matemáticos que são selecionados pelos autores de livros-textos. Os autores muitas vezes pertencem à esfera sábia, mas, no momento em que se propõem a escrever um livro-texto, tornam-se noosféricos, pois o livro-texto é um dos veículos pelo qual os organismos produzidos na esfera sábia chegam até o sistema de ensino. E é o autor que seleciona, que filtra os organismos, de forma que vão habitar o livro-texto apenas aqueles que ele acha que se podem adaptar ao sistema de ensino. Entretanto, são os noosféricos da instituição ou os próprios professores que verificarão quais livros-textos melhor estão adequados aos objetivos preestabelecidos pela instituição. Sendo assim, alguns organismos matemáticos passam do habitat livro-texto para o habitat sala de aula.

Sobre o discurso matemático do livro-texto

Para investigar a sobrevivência da RLH nos livros-textos selecionados foi utilizado um esquema de análise do discurso veiculado pelos livros-textos de matemática, desenvolvido por Hariki(1992).

Hariki(1992) assume que "discurso (ou comunicação) tem dois propósitos fundamentais: transmissão de informação e negociação de significados." (p. 13). Para ele discurso é uma negociação de mensagens entre escritor e leitor (ou entre orador e ouvinte). E é no discurso utilizado pelos autores de livros-textos para transmitir o objeto matemático RLH e negociar o seu significado que se está interessada.

Ao falar em discurso matemático, Hariki(1992) está-se referindo ao discurso que molda a comunicação do conhecimento matemático. Ele distingue três variedades: o discurso dos matemáticos (discurso científico), o discurso dos professores e alunos de matemática (discurso pedagógico), e o discurso dos autores de livros-textos de matemática. O discurso dos matemáticos é o veiculado por aqueles que produzem a matemática científica, a matemática que é comunicada através de revistas especializadas, de seminários de pesquisa, de conferências, de tratados etc. É o discurso presente no ecossistema esfera sábia. O discurso pedagógico é o discurso que permeia a comunicação entre professores e alunos e que está presente no ecossistema sistema de ensino. Já o discurso dos autores de livros-textos de matemática é uma fusão dos dois primeiros, pois, segundo Hariki(1992) os livros-textos de matemática de nível superior são escritos por matemáticos que são também professores. Portanto, torna-se difícil saber se eles escrevem cientificamente ou pedagogicamente. Esta afirmação vem reforçar a idéia de que os autores de livros-textos são noosféricos, isto é, eles procuram adequar o discurso científico ao sistema de ensino.

Hariki(1992) aponta três conflitos que permeiam o discurso dos autores de livros-textos de matemática. O primeiro é lógica *versus* heurística, isto é, o conflito entre as "lógicas" de transmissão de informação e de construção de conhecimento. Os autores têm que decidir se eles devem apresentar a matemática aos alunos como um corpo de conhecimento (um produto) ou como uma atividade intelectual (um processo). O segundo é lógica *versus* retórica, o conflito entre as "lógicas" de transmissão de informação e de negociação de significados. Segundo Hariki(1992) os autores de livros-textos não são nem formais nem informais, pois eles tanto usam regras da lógica formal como negociam significados como o leitor. O terceiro é lógica *versus* intuição que é o conflito entre as "lógicas" do processo científico e do processo pedagógico. A presença da "intuição" num livro-texto se refere ao uso que o autor faz de certos recursos como figuras, exemplos, esquemas, que podem levar o leitor a *insights* intuitivos sobre determinado conhecimento. Estas lógicas são conflitantes nos livros-textos, pois os autores têm que decidir entre o uso de uma, de outra, ou de ambas, em seu discurso, valendo-se de sua posição filosófica. Sendo assim, é importante verificar se a escolha do autor está direcionada para uma melhor compreensão do leitor.

O que nos permite identificar esses conflitos no discurso dos autores de livros-textos de matemática é o uso que eles fazem de esquemas lógicos, heurísticos e retóricos. Os esquemas lógicos são usados para fazer a apresentação rigorosa da informação matemática, os esquemas heurísticos são usados para fazê-la compreensível, e os esquemas retóricos são usados para fazê-la aceitável.

Para reconhecer a presença ou não da lógica, heurística ou retórica no discurso dos autores, durante a análise da espécie RLH nos livros-textos selecionados, foi utilizado o seguinte esquema que Hariki(1992) desenvolveu para analisar um livro-texto de Funções de Variáveis Complexas:

Arquitetura da matemática: como a matemática é organizada.
Contexto da teoria: fundamentos ou pré-requisitos.
Desenvolvimento da teoria: organização dos conteúdos, a rede de definições e teoremas.
Atividades: como as atividades do leitor são organizadas. Análise dos exercícios.
Negociação: como o autor interage com os leitores.
Negociação da verdade: provas ou argumentos retóricos.
Negociação da compreensão: figuras, exemplos, apelo à intuição, analogias, metáforas.
Negociação da linguagem: nomenclatura, demonstração, meta discurso.
Outras espécies de negociação: aspectos históricos, aplicações.

Os livros-textos de Cálculo selecionados foram os de Ávila(1981), Guidorizzi(1985), Swokowski(1983), Leithold(1982) e Simmons(1987), devido à freqüente adoção destes pelos professores de Cálculo Diferencial e Integral nas universidades brasileiras. Cada um deles foi analisado segundo o esquema acima, focalizando-se o contexto em que discursavam sobre a RLH.

Alguns resultados decorrentes da análise do discurso dos autores no desenvolvimento da RLH

A análise do discurso que esses cinco autores empregam para abordar a espécie RLH permitiu evidenciar alguns aspectos relacionados à sobrevivência desta espécie no habitat livro-texto.

Durante a análise do contexto da teoria, foi observado que a sobrevivência da espécie RLH no livro-texto está sujeita à "filosofia de apresentação da matemática" adotada pelo autor e geralmente evidenciada por ele no prefácio da obra. Dos cinco autores analisados, quatro expõem no prefácio os princípios sob os quais pretendem desenvolver seus discursos e na apresentação da espécie RLH seguem predominantemente estes princípios. Assim, como cada livro-texto é um habitat particular, cujas espécies que nele habitam são selecionadas pelo autor e adaptadas por ele para que sobrevivam de acordo com sua "filosofia de apresentação da matemática", é inevitável que apareçam diferenciações, de uma obra para outra, no tratamento dado à RLH.

O que é um consenso entre o discurso dos autores analisados é o nicho trófico10 da RLH. Todos eles motivam o seu estudo destacando o seu papel no ecossistema do conhecimento matemático: "(...) um modo muito útil de calcular limites de formas indeterminadas (...)" (Ávila, 1981:178); "(...) um método geral para encontrar o limite, se ele existir, de uma função em um número onde ela tem a forma indeterminada (0/0)." (Leithold, 1982: 504). Os autores reforçam que na cadeia trófica do conhecimento matemático, a RLH alimenta o cálculo de limites de formas indeterminadas. Porém Ávila e Simmons vão mais além. Ambos ressaltam que a RLH é importante para o cálculo de certos limites, cujos resultados permitem conclusões obre o comportamento das funções dos limites em questão. Eles mostram uma continuidade na cadeia trófica: a RLH alimenta o cálculo de limites que alimenta o estudo do comportamento de funções.

Já o principal alimento da RLH, na cadeia trófica do conhecimento matemático, é o Teorema do Valor Médio Generalizado ou Teorema de Cauchy. Este teorema é utilizado por todos os autores na demonstração da RLH e por isso todos eles o apresentam antes de demonstrarem a RLH.

A forma como os autores organizam o seu discurso na apresentação da RLH permite uma comparação entre o cálculo de indeterminações sem a RLH e com a RLH, e consequentemente permite perceber que a resolução de indeterminações é mais fácil através da RLH. Esse tipo de motivação pode não ser muito conveniente para o aluno, pois ele percebe de imediato a RLH como um instrumento de fácil aplicação e acabe apegando-se somente a ele, esquecendo as técnicas anteriores que em muitos casos são mais eficazes e menos trabalhosas. No entanto, quatro dos autores analisados também chamam a atenção do leitor, através de exemplos, para que ele não se apegue exclusivamente à RLH, pois há casos em que esta regra não se aplica ou que são resolvidos mais facilmente por outros métodos.

Enfim, existem diferenças e semelhanças quanto à sobrevivência da espécie RLH nos livros-textos analisados. Por isso, não há uma resposta objetiva para um questionamento sobre a sobrevivência dessa espécie.

Conclusão

Tanto para a RLH quanto para qualquer outra espécie ou organismo que habita o livro-texto, a sua sobrevivência depende do discurso do autor no qual está inserida. Cada autor tem uma forma de interagir e negociar com o leitor, e cada autor organiza, de acordo com a sua "filosofia de apresentação da matemática", o ambiente no qual irá desenvolver as espécies que seleciona para habitar o livro-texto. Do sucesso dessa negociação e organização depende a inserção do habitat livro-texto, ou de alguns organismos que nele habitam, no ecossistema sistema de ensino.

Mesmo que o professor não adote um livro-texto específico, é difícil que ele não utilize nenhum livro-texto para preparar as suas aulas ou que ele não indique uma bibliografia básica para o estudante. Como o discurso presente nos livros-textos não é "standard", objetivo ou uniforme,

[10] Papel funcional que determinado organismo desempenha na sua comunidade.

mas, sim, varia de autor para autor, o professor pode optar por aquele que julga que melhor o ajudará a cumprir os objetivos de seu curso. Muitas vezes o aprendizado do aluno depende em parte da escolha do livro-texto.

O ideal seria que, para cada conteúdo a ser inserido no habitat sala de aula, o professor preparasse fichas de trabalho, levando em conta as expectativas da turma. Assim, ele estaria livre para preparar o seu próprio discurso, considerando a sua experiência pedagógica, e para selecionar o que há de mais interessante, dentre os discursos dos autores de livros-textos, sobre o conteúdo em questão. Dessa forma, o professor faria um tipo de "seleção" das espécies que sobrevivem no ecossistema do conhecimento matemático.

Quanto mais pesquisas forem realizadas e divulgadas em nível de Ensino Superior, mais opções os professores terão para modificarem também os seus discursos em sala de aula.

Referências Bibliográficas

ANGELO, C. L. *A Regra de L'Hospital no habitat livro-texto*: uma análise do discurso de alguns autores. Rio Claro, 1997. [Dissertação – Mestrado em Educação Matemática – IGCE, UNESP, campus de Rio Claro]

ÁVILA, G. *Cálculo 1*: funções de uma variável. 4.ed. Rio de Janeiro: LTC, 1981.

CHEVALLARD, Y. *Aspects d'un travail de theorisation de la didactique des mathematiques*: étude du cas de l'algèbre élémentaire. Université d'Aix-Marseille II, 1989.

GUIDORIZZI, H. L. *Um curso de Cálculo*. Rio de Janeiro: LTC, 1985. V. 1.

HARIKI, S. *Analysis of Mathematical Discourse*: multiple perspectives. Thesis submitted for the degree of Doctor of Philosophy. University of Southampton, Faculty of Mathematical Studies, 1992.

LEITHOLD, L. *O Cálculo com Geometria Analítica*. 2.ed. São Paulo: HARBRA, 1982. V.1.

SIMMONS, G. F. *Cálculo com Geometria Analítica*. São Paulo: McGraw-Hill, 1987. V.1.

SWOKOWSKI, E. W. Cálculo: com geometria analítica. São Paulo: McGraw-Hill, 1983. V.1.

TEOREMA FUNDAMENTAL DO CÁLCULO: UM ESTUDO DE SUA COMPREENSÃO POR ALUNOS DE CÁLCULO I

Claudia Segadas Vianna
UFRJ

O Teorema Fundamental do Cálculo (TFC) é um dos tópicos mais importantes ensinados no curso de Cálculo I, já que estabelece o vínculo entre os conceitos de derivada e integral. Esta foi uma das razões pelo qual foi escolhido como o foco desta pesquisa, que objetiva investigar sua compreensão por alunos de cursos de áreas exatas.

Dados foram colhidos de alunos do primeiro ano da Universidade Federal do Rio de Janeiro ao final do curso de Cálculo I. A amostra incluiu alunos de três áreas: matemática, informática e engenharia. Um estudo piloto foi realizado em 1994 e o estudo principal em 1995 e 1996. No estudo principal participaram 148 alunos. Todos estes responderam a um teste de matemática dividido em duas partes. Uma amostra de 17 dos 148 alunos foi selecionada para uma entrevista com base no questionário e 7 destes 17 alunos para uma entrevista utilizando o computador.

Os resultados mostram que alguns dos obstáculos para a compreensão do Teorema Fundamental do Cálculo estão relacionados a dificuldades com os conceitos de função, continuidade, derivada e integral. As definições destes conceitos não estão claras para os alunos e estes freqüentemente fazem uso de imagens que contêm apenas aspectos parciais de uma definição ou são baseadas em exemplos particulares. Este fato se mostrou evidente quando os alunos nas entrevistas se defrontaram com novos exemplos que não se adequavam

com as imagens pré-formadas. Também foi verificado que definições e teoremas básicos para o curso de Cálculo estão completamente fragmentados para os alunos, não se constituem em um corpo lógico com sentido e por vezes estes até misturam partes de uma definição com outra ou de um teorema com outro, ou confundem um teorema com uma definição.
Deste modo poucos alunos conseguem compreender a demonstração de algum teorema, como foi exemplificado na pesquisa com o Teorema Fundamental do Cálculo. Uma grande dificuldade foi encontrada ao tentar destacar as idéias centrais por trás da demonstração. Agravando este processo, a concepção que têm do papel de prova em matemática reflete o fato que não estão acostumados a pensar nesta como um passo fundamental para generalizar um proposição. Os resultados encontrados nesta pesquisa estão fortemente relacionados aos hábitos de estudo dos alunos: tendem a não prestar atenção a qualquer aspecto mais teórico do curso, memorizando algoritmos sem refletir em sua aplicabilidade.

A REPRESENTAÇÃO SOCIAL EM ALUNOS CONCLUINTES DE CURSO DE LICENCIATURA EM MATEMÁTICA DE INSTITUIÇÕES DE ENSINO SUPERIOR DA REGIÃO METROPOLITANA DO RECIFE SOBRE AS CARACTERÍSTICAS DO PROFESSOR DE MATEMÁTICA

Josinalva Estacio Menezes[11]
UNIVERSIDADE FEDERAL RURAL DE PERNAMBUCO

INTRODUÇÃO: Um dos aspectos de maior interesse dos estudiosos da Educação Matemática se refere à busca de novas metodologias que norteiam os aspectos referentes à postura do professor em sala de aula. Assim, no presente trabalho, objetivou-se investigar quais as principais características necessárias a um bom professor de matemática em sala de aula, na visão de alunos concluintes de curso de Licenciatura em Matemática de instituições de ensino superior da região metropolitana do Recife. Neste contexto, enquanto forma de expressão de sujeitos do seu cotidiano material em relação às suas subjetividades existenciais, e sua própria experiência de vida, as representações sociais se constituem em poderosa ferramenta para o auxílio da leitura da realidade. Acredita-se que, enquanto construto, segundo a proposta de Moscovici, as representações sociais se constituem no caminho que permitirá uma investigação mais fiel do sentido indicado desta relação completa, pela riqueza de possibilidades; aquele que oferece uma busca no espaço amplo que associa um objeto a outros, a partir da experiência concreta que o indivíduo tem do mesmo. **METODOLOGIA**: Para realizar a pesquisa, foram selecionados aleatoriamente três alunos concluintes do curso de Licenciatura em Matemática em cada uma das três instituições de ensino superior na região metropolitana do Recife nas quais o referido curso é oferecido, num total de nove alunos. Optamos por aplicar a entrevista semi-estruturada, transcrever os depoimentos e depois analisá-los segundo o método quantitativo, via análise do discurso, com base nas orientações metodológicas de Spink. **RESULTADOS**: Através da análise, ficaram evidenciadas as relações intrínsecas desta união da prática com as experiências vividas pelos próprios alunos concluintes, enquanto estudantes que tinham aulas com professores de matemática. Assim, as características mais evidenciadas remeteram a um relacionamento harmonioso entre professor e aluno, um domínio do conteúdo por parte do primeiro, atenção a cada aluno em sua individualidade, e aspectos inerentes à transmissão do conteúdo. **CONCLUSÕES**: No estudo ficou apontada uma visão da matemática como uma disciplina onde parece haver uma necessidade do professor buscar mais as relações interpessoais em combinação com uma boa técnica e uma boa base de conhecimento sobre o assunto.

[11] jomene@nelore.npde.ufrpe.br

BIBLIOGRAFIA

ALVES-MAZOTTI, A J. & GEWANDSZNAJDER, C. O método nas Ciências Naturais e Sociais. São Paulo: Pioneira, 1998.

bardan, lawrence. Análise de Conteúdo. Lisboa: Edições 70, 1977. Seérie Persona. Tradução de Luís Antero Neto e Augusto Pinheiro.

JODELET, D. Conceitos em representações sociais. Mimeo, s. d.

____ _______. Representation sociale: phenómènes, concept et théorie. In: MOSCOVICI, S. (ED.) Psychologie Sociale. Paris: Presses Universitaires de France, 1984, 357-378.

____________. Representation sociale: um domaine en expansion. In: JODELET, D. (ED) Les Representations sociales. Paris: Presses Universitaires de France, 1989, 31-61.

MOREIRA, A. S. P. & OLIVEIRA, D. C. de. (orgs.) Estudos Interdisciplinares de Representação Social. Goiânia: AB, 1998.

NASCIMENTO, Mª do Socorro do. Espaço Didático: Crenças Sociais? Dissertação de Mestrado. Recife: UFPE, 1998.

SÁ, Celso Pereira de. Núcleo Central das Representações Sociais. Petrópolis: Vozes, 1996 .

CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL: UMA ABORDAGEM EPISTEMOLÓGICA DE ALGUNS ASPECTOS

Lígia Arantes Sad
Universidade Federal do Espírito Santo – UFES

Este artigo é baseado em uma Tese de Doutorado (SAD, 1998),[12] centrada na produção de significados e conhecimentos a partir do Cálculo, tendo como motivo principal a preocupação em contribuir para a compreensão do desenvolvimento do pensamento diferencial e integral do estudante em meio às atividades de sala de aula. Pode ser decomposto em duas partes, embora durante as investigações elas tenham estado entrelaçadas e interferentes. A primeira parte de fundamentação teórica e de investigação histórico-epistemológica, na qual abordamos algumas teorias de conhecimento e destacamos o Modelo Teórico dos Campos Semânticos (MTCS), pois este serve de apoio à discussão de uma produção de significados a partir de alguns objetos e temas da História da Matemática relacionados ao Cálculo. A segunda parte, empírica _ de pesquisa de campo _ que, do ponto de vista metodológico, situa-se em uma perspectiva qualitativa de investigação, cujas análises são desenvolvidas segundo o MTCS, mostrando não só a adequação desse modelo nas análises pretendidas mas, principalmente, apontando diferentes modos de produção de significados, objetos e conhecimentos ao se estar operando em relação ao Cálculo.

INTRODUÇÃO

O principal objetivo da pesquisa pode ser centralizado em termos de uma análise epistemológica de aspectos da aprendizagem do Cálculo Diferencial e Integral. Cuja PERGUNTA DIRETRIZ, geradora dos encaminhamentos é assim formulada: *São estabelecidas diversificações nos modos de produção de significados e de objetos a partir do Cálculo ? Quais ?*

[12] Tese de Doutorado defendida junto ao Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática da Universidade Estadual Paulista _UNESP_. Campus de Rio Claro. sob a orientação do Prof. Dr. Romulo Campos Lins.

Devemos observar que os *significados* a que essa pergunta se refere, são significados matemáticos constitutivos de certos modos de produção do pensamento diferencial e integral[13], bem como de seus objetos. Além disso, a referência de *diversificação* nos modos de produção de significado é feita em relação aparente a um "mesmo" objeto produzido (por exemplo, diferencial de uma variável *x*, " *dx* ") e simbolicamente representado em uma proposição lingüística de mesma aparência. Portanto, para responder à pergunta feita, entre outras coisas devemos investigar qual a natureza desses objetos de que se fala. A partir de que são produzidos (de qual(is) significado(s), de quais outros objetos ou princípios)? Em conjunto com que justificativas matemáticas ? Realmente existe diversificação nos modos de produção de significados ou são meras metáforas ou mimeses de um mesmo objeto?

A GÊNESE DA PESQUISA teve como uma fonte o ensino e aprendizagem das noções fundamentais do Cálculo Diferencial e Integral em meio ao convívio nas salas de aula dos mais variados cursos que necessitam dessa parte da Matemática, nos colocando em contato direto com as dificuldades que são também denunciadas no índice de reprovação e de desistência que marca esta disciplina no início dos cursos nos quais é ministrada.

Resolvemos centrar as observações, em sala de aula de Cálculo, no que diz respeito aos *significados* _ "*conjunto de coisas que se pode falar e efetivamente se diz a respeito de um objeto* [grifo nosso]" (Lins, 1997b, p. 145) _ produzidos pelos alunos e os produzidos pelos professores ao utilizarem-se do discurso matemático acadêmico, independente da metodologia usada ou de outros instrumentos, embora não deixando de lado as relações e interferências que possam ser estabelecidas.

Pesquisas a respeito do ensino e aprendizagem de Cálculo no terceiro grau reforçam as evidências desse problema de apresentação formal dos enunciados matemáticos, de modo linearizado numa cadeia de resultados, que parecem não admitir discussões, como se os objetos matemáticos ensinados e aprendidos pudessem ser constituídos de modo único, independente dos estudantes (de sua formação, de sua demanda enquanto aluno ou futuro profissional), do livro texto ou de outro instrumento utilizado. Nessa direção, é comum escutar entre professores: "*os objetos do Cálculo são sempre os mesmos, embora se fale sobre eles com algumas diferenças de tratamento*", ou mesmo "*Cálculo é Cálculo, embora as aplicações se diversifiquem*".

Em grupos mais seletos, como o de estudantes de Cálculo, observamos, por exemplo, que, se tomarmos o resultado matemático de que os reais formam um corpo ordenado completo e fizermos a associação comum com pontos sobre uma "linha numérica", observamos que alguns estudantes vêem, como implicação, que não existe "lugar" para colocar mais nenhum número: a linha numérica é completa.[14] Em particular, os estudantes não aceitam que se "engorde" a linha numérica e se englobem os hiper-reais e que, assim, ela possa conter os infinitésimos _ que são positivos mas menores que qualquer racional positivo não nulo _ como dentro da análise não-standard. Outros olham a "completude" como um resultado técnico, que adiciona os pontos limites de seqüências de Cauchy de números racionais, sendo perfeitamente possível colocar os números reais em um conjunto numérico maior, incluindo os infinitésimos e números infinitos, os hiper-reais. Esse é um modo de aceitar a teoria da análise

[13] Segundo Cabral (1992), o *pensamento diferencial* congrega a noção de função relacionada a um pensamento algébrico e geométrico que permite a aprendizagem do aluno em Cálculo. Relacionando ao nosso trabalho de pesquisa, de modo mais específico, podemos dizer que: o *pensamento diferencial e integral* são relações e combinações, conscientes, a partir de estipulações locais próprias ao desenvolvimento do Cálculo, as quais apontamos no decorrer da pesquisa.

[14] Isso também foi detectado em outras pesquisas, como a de Sierpinska (1987) e a de Cornu (1983).

não-standard. Mas, por exemplo, Cantor negou a existência de infinitesimais, baseando-se na não- possibilidade de calcular o inverso de um número infinito em sua teoria de cardinais infinitos.[15]

Mas, como bem escreve Boyer (1959), o fato da cardinalidade de um conjunto poder ser infinito, junto à definição de variável contínua, foi o bastante durante algum tempo, aos conceitos do Cálculo; ou seja, os fundamentos eram remetidos a conjuntos numéricos de inteiros, finitos e infinitos, sem precisar entrar nas dificuldades inerentes ao infinito real (como, mais tarde, fez-se na análise não-standard). O rigor lógico, finalmente, (con)venceu e concretizou a constituição desse modo de produção dos fundamentos que matemáticos, como Weierstrass, Dedekind, Cantor e outros, ajudaram a estabelecer para o Cálculo.

Assim, não há um verdadeiro e absoluto modo de pensar sobre Matemática, de constituir seus significados e seus objetos em meio às nossas ações, como historicamente também pudemos evidenciar[16].

No entanto, em certos grupos sociais onde é trabalhado e produzido um conhecimento matemático avançado,[17] e, em cujos grupos existe uma maior convergência em relação às experiências anteriores dentro da Matemática, é de se esperar pouca ou até por vezes nenhuma diversificação dos modos de produção de significado a partir da Matemática.

Na parte social de convivência em sala de aula, para o destaque necessário à construção epistêmica do aluno, a fala é elemento muito importante. Por isso, além do MTCS, recorremos várias vezes às idéias de Bakhtin (entrelaçadas com as de Vygotsky) no que se refere ao estudo da fala e da linguagem, e às de Vygotsky e Bruner quanto à produção de significado.

Tomamos porém, como um de nossos objetivos, mostrar a adequacidade do MODELO TEÓRICO DOS CAMPOS SEMÂNTICOS (MTCS) como um modelo teórico básico às nossas investigações. Este modelo começou a ser concebido por R.C. Lins a partir de sua tese de doutoramento em Educação Matemática — *A framework for understanding what algebraic thinking is* — na University of Nottingham (UK) em 1992. [18] Um aspecto de destaque no MTCS é o tratamento dispensado ao que se refere a ***conhecimento***. Diferentemente de outras teorias epistemológicas (ou teorias do conhecimento) propõe entre seus pontos centrais: ***conhecimento*** = (crença-afirmação, justificação). O que nos faz estar diante de um *sujeito do conhecimento*, ou seja, de uma existência interdependente e intrínseca do conhecimento a partir do sujeito, e também, do sujeito do conhecimento (produtor assujeitado).

Com a definição de *conhecimento* do MTCS é perfeitamente possível dizer que, por exemplo, dois sujeitos que estão produzindo significado para a mesma sentença _ "a derivada

[15] Ver TALL (1991, p. 6).

[16] Um dos objetivos do estudo histórico epistemológico empreendido na pesquisa foi de mostrar como as idéias se estabelecem segundo significados dos grupos sociais em que foram elaboradas, levando em conta os aspectos convencionais (culturais-ideológicos) em que são inseridos os indivíduos criadores. (Cf. Sad, 1999, p.159).

[17] Aqui estamos tratando, de modo bem simplista, um conhecimento matemático como 'avançado' se as suas afirmações e justificações precisam considerar uma matemática pelo menos de nível universitário. Porém, Tall (1991, p.3) afirma que, o ciclo de atividades do pensar matemático avançado pode ser visto como aquele que a partir do ato criativo de considerar um determinado problema, contextualizado na investigação matemática, conduz à formulação de conjecturas e ao estágio final de refinamento e prova. A possibilidade de definição formal e de dedução são fatores que distinguem o pensar matemático avançado.

[18] Nos Anais do XVIII PME (Lisboa, 1994), ele publicou o artigo *Eliciting the meanings for algebra produced by students: knowledge, justifications and semantic fields*, no qual já discute alguns dos aspectos do referido modelo epistemológico. Em junho de 1994, publicou na revista *Dynamis* (Blumenau, v.1, n.7) o primeiro artigo enfatizando o modelo, entitulado: *O Modelo Teórico dos Campos Semânticos: uma análise epistemológica da Álgebra e do pensamento algébrico*. Desde então, esse modelo tem sido implementado e divulgado por seu autor.

de x^2 é $2x$ " _ porém, um deles com justificação baseada na autoridade (é assim porque o professor disse) e o outro com justificação nos cálculos que fez usando a definição de derivada pelo quociente de Newton, constituem *conhecimentos* diferentes.[19]

Um papel da *justificação*, é o de produzir, para o *sujeito do conhecimento*, *objetos* _ "algo" do qual o sujeito fala a respeito _. Neste modelo, *objetos* são constantemente constituídos, embora por fazerem parte muitas vezes de *estipulações locais*[20] tomadas, pareçam ter uma "existência permanente", ligada a nossa "realidade".

Ao começarmos a pensar sobre algo, sempre temos uma versão de mundo (criado por outros) da qual partimos, construções das quais tomamos determinadas premissas como certas, as "estipulações". Elas não compõem nenhuma realidade básica ou "apriori", mas são elementos na produção de versões de mundo que tomamos para construções subseqüentes.

No que se refere às estipulações, o MTCS modifica essa noção a partir de Goodman, intensificando seu caráter não-permanente, uma vez que só considera sua criação em meio às atividades, denominando-as então de estipulações locais.

São as estipulações locais que vão constituir o que se denomina núcleo de um modo de produção de significados, isto é, núcleo de um Campo Semântico (**CS**). Portanto, núcleos de CS podem ser pressupostos de objetos (como propriedades e imagens), diagramas, princípios, axiomas, ou mesmo um enunciado. Em nossa pesquisa, em meio às atividades relativas a Cálculo (não previamente ou posteriormente), notamos alguns elementos que, devido à sua freqüência e importância como básicos na produção de significados, objetos e conhecimentos a partir do Cálculo, acabaram tendo denominações especiais como estipulações locais em núcleos de CS:

- *Estipulações locais a respeito de limite* - quando se tem no núcleo a definição Weirstrassiana de limite de uma função de uma variável real, ou seja: dizemos que " $\lim_{x \to c} f(x) = L$ se $\forall\, \varepsilon>0,\ \exists\, \delta>0$ tal que se $0 < |x - c| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$."
- *Estipulações locais a respeito de infinitésimos* _ quando se tem no núcleo elementos baseados na noção de infinitésimo _ a noção de infinitésimo como concebido desde Newton, de mônadas infinitesimais, de incrementos infinitamente pequenos; ou como para Leibniz (que dizia não serem números ou quantidades) uma classe de números menores que qualquer outro designado, às vezes também expressos como diferenciais ou como distâncias infinitamente pequenas; ou mesmo a noção de infinitésimo (mais recente) como número *hiper-real* cujo módulo é menor que de qualquer número real positivo;
- *Estipulações locais visuais-geométricas* - quando se tem no núcleo princípios ou resultados geométricos, gráficos e desenhos de figuras planas ou espaciais.
- *Estipulações locais do tipo algoritmos* - quando se tem no núcleo algoritmos: regras, fórmulas, seqüências memorizadas "de cor", sem relacionar ao entendimento e justificativa matemática.

Muitas vezes porém, os núcleos ou têm mais de uma dessas estipulações locais, com os elementos relacionados em estipulações locais complexas, ou há uma fluência tão grande entre um CS e outro que, torna-se difícil saber sem outras investigações, se há predominância desta ou daquela estipulação local para podermos especificar os CS.

Em seu domínio didático-pedagógico, o professor procura estratégias de organização das atividades dos alunos, de valoração de certas atitudes e de determinados discursos,

---

[19] Essa diferenciação citada, não é possível com a definição de *conhecimento* de modo clássico _ uma "*crença verdadeira justificada*" _, em que a justificação tem relação com a certeza do sujeito em dizer que conhece e não com a afirmação (com a garantia do sujeito em poder enunciá-la), sustentando conhecimento na categoria de uma proposição aceita.

[20] *Estipulações locais* e *realidade*, são nesta pesquisa tratadas seguindo uma visão relativista de Nelson Goodman, citada por Bruner (1986, p. 99-104), porém modificadas à luz do MTCS. Veja SAD (1998, p.127).

sempre tendo em mente demandas que, (entre outras coisas) o fazem produzir significados em certos CS e a querer que o aluno também produza significados em CS análogos. Além do mais, pensando em termos de aprendizagem efetiva do aluno, o professor quer que o aluno além de tomar como legítimo um certo modo de pensar, também passe a dominá-lo.

Assim, a partir de caracterizações básicas _ atividade e produção de significados, enunciação e enunciado, interlocutor e demanda, conhecimento e sujeito do conhecimento, objetos e relações, estipulações locais e CS _ incluindo seus inter-relacionamentos, nos posicionamos frente às investigações também em sala de aula de Cálculo.

Na parte referente à PESQUISA DE CAMPO exemplificamos como procedemos à análise dos dados obtidos em um processo metodológico de observação participante,[21] implementada e aliada por: anotações sistemáticas em um caderno de campo, gravações e entrevistas do tipo centradas.

Foram escolhidas para observação sistemática durante um ano, três turmas (uma de Física -**T1**, uma de Matemática - **T2** e outra de Geologia -**T3**) todas de Cálculo inicial, por entendermos esse contexto mais propício à investigação de produção do pensamento diferencial e integral.

Nossa opção foi por uma metodologia de pesquisa qualitativa que nos permitisse observar de modo a interferir o mínimo possível no dia-a-dia dos professores e alunos, principalmente em suas maneiras de falar e apresentar as idéias e soluções de problemas durante as atividades em Cálculo.

Os dados coletados : 1. entrevistas individuais (gravadas ou filmadas); 2. gravações de grupos de alunos em atividades em sala de aula de Cálculo; 3. soluções escritas de problemas (feitos individualmente ou em grupo); 4. observações escritas (caderno de campo) durante as aulas.

Nos procedimentos de análise desses dados, além do MTCS, também propusemos uma classificação de alguns deles em categorias sob certas distinções nas formas como esses dados se apresentavam.

Em nossas CONCLUSÕES E INDICATIVOS estão:

- O entendimento da produção de significados em meio às atividades de Cálculo destaca uma necessidade de compreensão das interrelações entre: demanda social, sujeito do conh. (prof. e aluno), interlocutor, enunciado (texto), enunciação, conhecimento, CS (em relação a estipulações).
- O processo ensino - aprendizagem de Cálculo está centrado em que aprender é aprender a produzir significado.

  A predominância continua a ser do "ensino textual" (linha tradicional). Entre outras implicações, determina ações didático/pedagógicas em termos do conteúdo a ser ensinado. Não propicia investigar "onde o aluno está" e, se preciso, mudar de CS.
- O MTCS além de mostrar-se adequado ao estudo histórico epistemológico, confirmou a existência de diversos modos de produção de significados a partir das atividades em Cálculo, permitindo exibi-los.
- A preocupação (em ter esse modelo como base) dizem respeito ao perigo de que uma ênfase excessiva no foco epistemológico provoque um desligamento de outros fatores

[21] Entre as metodologias qualitativas (observação participante, pesquisa-ação, pesquisa-participante, história de vida e outras) citadas por Haguette (1990) a mais adequada em termos de suas características e definição foi a **observação participante**.

psicológicos, um "recorte" do estudante do quadro geral que envolve o processo de educação.

Como DIRECIONAMENTOS temos:

- Atentar para as mudanças e relações entre CS. Buscando estar dialogando, compartilhando com o aluno de CS semelhantes.
- As diversificações na função semântica da linguagem nos textos matemáticos reforçam a necessidade de uma maior atenção à enunciação dos mesmos.
- Os objetos são produzidos a partir do Cálculo em meio a diferentes demandas; outros interlocutores além do professor.
- No processo de ensino-aprendizagem, destacar importância à fala dos alunos na análise de como e o quê estão aprendendo. Não tratar os significados distintos dos "oficiais" como erro ou falta.
- As metodologias de ensino influentes na produção de significados são as que se preocupam com a socialização dos significados, através de diálogos e críticas; são mais próprias às atividades em grupo, às interpretações de textos, narrativas, apresentações, nas quais o papel central é do aluno e não do professor.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS:

ABBAGNANO, N. ***Diccionario de Filosofía***. 13 ed. Traduzido por Alfredo N. Galletti. México: Fondo de CulturaEconómica, 1996. Tradução de: Dizionario di Filosofia.

ALCOBA, M.L. ***La ley de continuidad en G. W. Leibniz***. Sevilla: Universidad de Sevilla, 1996.

ANGELO, C.L., CASSOL, A., SAD, L., SILVA, M.R.G. *Uma Análise do Teorema Fundamental do Cálculo em alguns livros-texto*. ***Quadrante: Revista teórica e de investigação***. V. 4. Lisboa: APM, 1995.

AYER, A.J.***The problem of knowledge***. UK: Penguin Books, 1986.

BAKHTIN, M. ***Marxismo e Filosofia da Linguagem***. 6.ed. Traduzido por Michel Lahud e Yara Frateschi Vieira. São Paulo:Hucitec, 1995.

BALDINO, R.R. *Cálculo Infinitsimal: passado ou futuro?* ***Temas , Debates*** , n° 6. SBEM, 1995a.

BALDINO, R. R., et al. *Sobre o papel do conceito de limite no primeiro curso de Cálculo.* ***Anais do IV EPEM***. São Paulo, 1996.

BALDINO, R. R., SAD, L..A., , TEIXEIRA, M.V.. ***Cauchy and the problem of pont-wise convergence***. Liège: Anais do XXth International Congress of History of Science, 1994.

BARON, M.E ***History of mathematics : origins and development of the calculus.*** Traduzido por José Raimundo B. Coelho, Rudolf Maier e Mª José M. M. Mendes.Brasília: Editora Universidade de Brasília, 1985.

BICUDO, I. *Análise não-standard.* ***Boletim de Educação Matemática (BOLEMA)***, n. 8, p. 60-67, 1992.

BOCHENSKI, I. M.. ***A Filosifia Contemporânea Ocidental***. São Paulo: Ed. Pedagógica e Universitária (EPU) e Ed. da Universidade de São Paulo (EDUSP), 1975.

BOYER, C.B. ***The History of the Calculus and its Conceptual Development.*** New York: Dover Publications, 1959.

BRUNER, J. ***Actual minds, possible worlds***. Cambridge: Havard University Press, 1986.

BROUSSEAU, G., OTTE, M. *The fragility of knowledge* .***Mathematical knowledge: Its growth through teaching.*** Editado por Bishop, A.J., Mellin-Olsen, S. , van Dormolen, J..*The fragility of knowledge*. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., p. 13-36, 1991.

CABRAL, T.C.B. ***Vicissitudes da aprendizagem em um curso de Cálculo***. Dissertação de Mestrado. São Paulo: UNESP-Rio Claro, 1883.

CASSOL, A.. ***Produção de significados para a derivada***. Dissertação de Mestrado apresentada na Universidade Estadual Paulista - UNESP - Campus de Rio Claro, 1997.

CORNU, B. ***Aprentissage de la notion de limite: conceptions et obstaculos.*** Tese de Doutorado apresentada em L'Universite Scientifique et Mdicale de Grenoble, 1983.

CHISHOLM, R.M. ***Theory of Knowledge***. 3 ed.New Jersey: Prentice-Hall International, 1989.

DAMEROW, P.. ***Abstraction and Representation: essays on the cultural evolution of thinking***. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers, 1986.

EL *Cálculo infinitesimal: Leibniz / Newton*. ***Biblioteca Cultural Los Fundamentales***. Buenos Aires: EUDEBA - Universitaria de Buenos Aires, 1977.

GOODMAN, N. ***Of Mind and Other Matters***. Cambridge: Havard University Press, 1984.

GRAY, E. M. , TALL, D. O.. *Duality, Ambiguity and Flexibility: A 'Proceptual' View of Simple Arithmetic*. ***Journal for Research in Mathematics Education***, v. 25, nº 2, p. 116-140, 1994.

HAGUETTE, T. M. F. .***Metodologias qualitativas na sociologia***. Petrópolis: Vozes, 1990.

KLINE, M. ***Mathematical Thought: from ancient to modern times***. New York: Oxford University Press,1990. v.1,2,3.

LEIBNITZ, G. W. ***Oeuvre concernant le Calcul Infinitésimal***. 6 ed. Traduzido por Jean Peyroux. Paris: Librairie A. Blanchard, 1983.

LEONTIEV, A. ***O desenvolvimento do psiquismo***. Lisboa: Livros Horizonte, 1978.

LINS, R.C. ***A framework for understanding what algebraic thinking is.*** PhD Thesis. Inglaterra: University of Nottingham, 1992.

___*Epistemologia, História e Educação Matemática: tornando mais sólidas as bases da pesquisa*. ***Revista da SBEM-SP***, nº 1. São Paulo, 1993.

___*O Modelo Teórico dos Campos Semânticos: uma análise epistemológica da álgebra e do pensamento algébrico*. ***Revista Dynamis***, v.1, nº 7. Blumenau: FURB, 1994.

___*Struggling for survival: the producition of meaning*. ***Anais do BSRLM*** Meeting Sheffild, 1996.

NEWTON, I. ***Principia***. Traduzido por Andrew Motte, 1729. 2 ed. Revisada por Florian Cajori. Berkeley: University of California Press, 1962. 2v.

PRADO JR., C. ***Notas Introdutórias à Lógica Dialética***. 2 ed. São Paulo: Brasiliense, 1961.

REZENDE, W.M. ***Uma Análise Histórica-Epistêmica da Operação de Limite***. Dissertação de Mestrado. Rio de Janeiro: USU, 1994.

SAD, L. A. ***Cálculo Diferencial e Integral: uma abordagem epistemológica de alguns aspectos***. Tese de Doutorado (em Educação Matemática) apresentada na Universidade Estadual Paulista - UNESP, Rio Claro, 1998.

SIERPINSKA, A. *Humanities students and Epistemological Obstacles related to Limits*. ***Educational Studies in Mathematics***, v. 18, p. 371-397, 1987.

___ *Some remarks on understanding in mathematics, for the learning of mathematics*. ***Recherches en Didactique des Mathématiques***, v.10, nº 3, p.24-36, 1990.

SILVA, M. R. G. da. ***Concepções didático-pedagógicas do professor-pesquisador em Matemática e seu funcionamento na sala de aula de Matemática.*** Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) Universidade Estadual Paulista - UNESP, Rio Claro, 1993.

STROYAN , LUXEMBURG. ***Introduction to the theory of infinitesimals***. New York: Academic Press, 1976.

TALL, D. ***Advanced Mathematical Thinking***. London: kluwer Academic Publishers,1991.

___ *The notin of infinite masuring numbers and its relevance in the intuition of infinity*. ***Educational Studies in Mathematics***, v.11, p.271-174, 1980b

___***Intuitive infinitesimal in the calculus***. Mathematics Education Research Centre, University of Warwick. UK, 1981.

TALL , VINNER.. *Concept Image and Concept Definition in Mathematics with particular reference to Limits and Continuity*. ***Educational Studies in Mathematics***,v. 12, p.151-169, 1981.

VYGOTSKY, L.S. ***A Formação social da mente***. São Paulo: Martins Fontes, 1984.

___ ***Obras escogidas***. Madrid: Visor Distribuiciones, 1991a. 3 volumes.

___ ***Pensamento e Linguagem***. Traduzido por J.L.Camargo. São Paulo: Martins Fontes, 1995.

WALKERDINE, V. ***The mastery of reason***. New York: Routledge, 1988.

O DOMÍNIO DO PROCESSO DEDUTIVO POR ALUNOS DE GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

Lilian Nasser
IM/UFRJ
CETIQT/SENAI

A Teoria de van Hiele estabelece níveis de desenvolvimento do raciocínio geométrico, a saber: visualização, análise, abstração, dedução e rigor. Segundo van Hiele (1976), o modelo é hierárquico, isto é, para atingir um determinado nível, o aluno deve dominar todos os níveis inferiores. Além disso, a progressão de níveis depende fortemente da experiência de atividades especialmente programadas com esse fim. Isto implica que os professores devem preparar os alunos para atingir o nível da dedução em Matemática. Diversos projetos de pesquisa desenvolvidos ao longo dos últimos 20 anos comprovaram a hierarquia dos níveis de van Hiele, admitindo, no entanto que estes podem ser contínuos, isto é, é possível exibir algumas características de um determinado nível, sem o completo domínio do nível imediatamente anterior. Portanto, para que um aluno compreenda o processo dedutivo, é necessário que tenha dominado os três primeiros níveis. No entanto, a maioria dos alunos passam pela escola sem que sejam expostos a atividades que desenvolvam seu raciocínio lógico ou que os preparem para o domínio do processo dedutivo. De acordo com a teoria de van Hiele, o professor tem um papel fundamental na escolha das atividades a serem vivenciadas pelos alunos, promovendo o seu progresso pelos níveis de raciocínio geométrico.

Apesar da tentativa atual de uma abordagem mais experimental nos ensinos fundamental e médio, substituindo a ênfase na teoria, fora do alcance da compreensão dos alunos, a realidade hoje mostra que a maioria dos alunos não está aprendendo a pensar e raciocinar quando estuda os diversos conteúdos da matemática.

Esse problema já foi observado internacionalmente, e a investigação sobre "argumentação e provas no ensino da matemática" vem recebendo atenção cada vez maior de pesquisadores e educadores matemáticos, constituindo atualmente uma linha de pesquisa marcante, sempre presente em congressos e publicações de Educação Matemática. Grande parte das pesquisas desenvolvidas nessa área foram relatadas por Hanna e Jahnke (1996), no capítulo intitulado 'Proof and Proving', incluído no manual de Educação Matemática publicado na Holanda, o "International Handbook of Mathematics Education", (pp. 877-908). Nele são citadas pesquisas sobre as funções da prova (Hanna, 1990; de Villiers, 1990), os tipos de prova aceitos por matemáticos e por educadores matemáticos (Bell, 1976; Balacheff, 1988; Davis, 1993), além de estudos investigando os progressos dos alunos no desenvolvimento do raciocínio dedutivo (Hersch, 1993; Hoyles, 1997).

Alguns estudos mostram que muitas vezes o aluno chega ao curso superior sem dominar o processo dedutivo, já que não vivenciou atividades que levassem ao desenvolvimento do seu raciocínio lógico. Alguns exemplos serão relatados a seguir.

Um levantamento dos níveis de van Hiele de alunos que ingressaram nos cursos da área de Ciências Matemáticas e da Natureza, na Universidade Federal do Rio de Janeiro, em 1989, mostrou que apenas 30% dos alunos raciocinavam no nível da dedução ou do rigor matemático (Nasser, 1992, 1994).

Outro forte indício dos problemas apontados são os resultados do Exame Nacional de Cursos, o Provão (MEC) para avaliar os cursos superiores de todo o país. Aos formandos dos cursos de Licenciatura e Bacharelado de 1998 foi proposta a seguinte questão:

> O losango é um quadrilátero que tem os quatro lados iguais. A partir desta definição, pode-se demonstrar a seguinte afirmação:
>
> > Ter diagonais perpendiculares é uma condição **necessária** para que um quadrilátero seja um losango.
>
> a) Enuncie esta afirmação sob a forma de um teorema do tipo **"Se ... então..."**
> b) Demonstre o teorema enunciado no item (a)
> c) Enuncie a recíproca do teorema enunciado no item (a) e decida se ela é ou não verdadeira, justificando a sua resposta.

O resultado foi surpreendente: 54% de respostas em branco, e nota média de 0,78 (em um máximo de 10), numa amostra nacional de cerca de 8.500 formandos.

Preocupados com esses resultados, resolvemos investigar essa questão. Coutinho (1998) acompanhou o desempenho de alunos de Licenciatura em seu trabalho de Iniciação Científica. Esses dados foram comparados com o desempenho de professores matriculados em um curso de especialização (Nasser,1999).

Resultados obtidos por nossa pesquisa:
1ª amostra: 37 alunos do 1° ano do curso de Licenciatura em Matemática
2ª amostra: 18 professores de matemática de um curso de especialização

	Licenciandos	Professores
Totalmente certo	11%	11%
Demonstração errada	11%	-
Troca do teorema x recíproca	35%	28%
Troca do teorema x recíproca, com demonstração correta	3%	22%
Justificativa errada para a recíproca	8%	28%
Totalmente errado	32%	11%

A análise desses resultados mostra que muitos dos sujeitos testados não conseguem nem diferenciar a hipótese da tese, e que aparentemente ao longo dos anos de estudo na universidade esse quadro não é melhorado, e pode até piorar, se os professores não usarem raciocínio dedutivo no exercício do magistério.

Além desta, a questão a seguir (Tinoco, 1999) também foi aplicada a alunos de licenciatura em Matemática da UFRJ.

O retângulo é um quadrilátero que tem os quatro ângulos iguais.
A partir dessa definição, pode-se demonstrar a seguinte afirmação:

> Ter diagonais iguais é uma condição necessária para que um quadrilátero seja um retângulo.

a) Enuncie esta afirmação sob a forma de um teorema do tipo "Se ... então";
b) Demonstre o teorema enunciado no item (a);
c) Enuncie a recíproca do teorema enunciado no item (a) e decida se ela é ou não verdadeira, justificando sua resposta.

Coutinho (1999) analisou os resultados de uma amostra de 24 licenciandos através da categorização das respostas, concluindo que 5 alunos não conseguiram enunciar na forma "Se ...então", 9 alunos trocaram a hipótese e a tese, e apenas 9 alunos (37%) conseguiram enunciar e justificar corretamente a questão.

Observamos também que o caráter geral de uma demonstração nem sempre é percebido pelos licenciandos. A seguinte questão foi apresentada no Provão de Matemática de 1999:

> A um aluno foi pedido um esboço da demonstração do seguinte teorema:
> *"Se uma reta r contém a interseção das diagonais de um paralelogramo, então r divide esse paralelogramo em duas regiões de mesma área".*
> Observe sua resposta:
> "Considera-se o paralelogramo ABCD de diagonais AC e BD, cuja interseção é o ponto P, e uma reta r, paralela a AB, contendo P, que corta os lados AD e BC do paralelogramo nos pontos M e N, respectivamente.
> Prova-se que cada um dos três triângulos que compõem o quadrilátero ABNM é congruente a um dos três triângulos que compõem o quadrilátero DMNC.
> Como figuras congruentes têm áreas iguais, segue que a área de ABNM é igual à área de DMNC".

Se você tivesse de corrigir esta tarefa, você a consideraria correta (sem levar em conta seu nível de detalhamento)? Justifique.

Esta questão foi aplicada no 2° semestre de 1999 a 18 alunos do 2° período, 20 alunos do 4° período, e a 20 alunos do 6° período do curso noturno de licenciatura da UFRJ (Carvalheira, 1999). 50% dos alunos do 2°, e 30% do 6° período não perceberam que essa prova não era geral. No entanto, 70% dos alunos do 4° período não perceberam que a prova particularizou uma reta. Esse resultado mostra que o avanço no curso não é suficiente para garantir o aprimoramento do processo dedutivo.

No ponto de vista dos matemáticos da academia, a prova é um desenvolvimento formal, que parte dos pressupostos (hipóteses) e, através do encadeamento do raciocínio e de resultados já conhecidos ou de teoremas, chega ao resultado que se quer mostrar que é verdadeiro (tese). Chamamos esse tipo de prova de **prova formal**. O que se observa atualmente, é que os alunos não dominam esse tipo de prova, nem quando chegam à universidade, nem quando se formam, e nem mesmo depois de alguns anos de exercício do magistério. Mas a prova formal não é o único tipo de prova. Alguns pesquisadores como Gila Hanna (1990), do Canadá, e Nicholas Balacheff (1988), da França, defendem a **prova admissível**, isto é, uma argumentação aceitável, que pode ter diversos níveis de rigor, dependendo da idade e do ano de escolaridade do aluno que a apresenta. Em trabalho desenvolvido nos cursos de graduação da UFRJ, encontramos os seguintes tipos de prova admissível (Rezende e Nasser, 1994), que coincidem com os tipos de prova sugeridos por Balacheff:

- **Justificativa pragmática (ou ingênua):** atesta a veracidade de uma afirmativa com base em apenas alguns exemplos;
- **Recorrência a uma autoridade:** afirma que o resultado é verdadeiro porque o professor falou, ou porque está no livro texto;
- **Exemplo crucial**: desenvolve através de um exemplo o raciocínio que poderia ter sido feito no caso geral;
- **Justificativa gráfica**: mostra numa figura porque o resultado é verdadeiro;

A prova ou demonstração tem diversas funções. A mais usada é a de **validar** um resultado, isto é comprovar que é verdadeiro. Essa função é, sem dúvida alguma, fundamental na Matemática, mas nem sempre é motivadora para alunos da escola básica, e mesmo para os recém ingressos na universidade. Muitas vezes, o resultado é óbvio para eles, que não vêem necessidade alguma de verificar sua veracidade. Essa função se torna altamente motivadora quando há alguma dúvida, ou seja, quando é preciso validar ou refutar uma conjectura. Outra função da prova é a de **explicar ou elucidar**, isto é, mostrar porque o resultado é verdadeiro. Algumas provas são perfeitamente aceitas, mas não dão nenhum indício do motivo pelo qual a afirmativa vale. Por exemplo, as provas por indução, por absurdo, ou as justificativas de unicidade de soluções. Segundo de Villiers (1991), "em vez de focar apenas na prova como meio de verificação, a função mais fundamental da prova como meio de explicação deve ser explorada para apresentar a prova como uma atividade significativa para os alunos". Alguns pesquisadores, como Bell (1976), enfatizam a função da prova de **sistematizar**, isto é, **preparar para o domínio do processo dedutivo**. Através das justificativas de suas respostas, o aluno ganha confiança para adquirir auto-estima, e ser capaz de fazer suas próprias demonstrações. Como foi mostrado neste artigo, é fundamental que os alunos em geral, e particularmente os de Matemática, sejam preparados para argumentar matematicamente, e dominar o processo dedutivo, e esse trabalho deve começar bem antes do curso universitário. As investigações mostram que esses alunos carecem de conhecimentos sobre aspectos fundamentais de uma demonstração, como a hipótese, a tese, e seu caráter geral. Estamos de acordo com Pogorelov, quando este afirma que:

> *A tarefa essencial do ensino da geometria na escola consiste em ensinar o aluno a raciocinar logicamente, argumentar suas afirmações e demonstrações. Bem poucos serão matemáticos, e menos ainda geômetras. Também haverá os que nunca usarão em suas atividades práticas o Teorema de Pitágoras. Porém, sem dúvida, dificilmente haverá um só que não precisará raciocinar, analisar e demonstrar.*

Bibliografia

Balacheff, N. (1988): Aspects of proof in pupils' practice of school mathematics. Em D. Pimm (Ed.): Mathematics, Teachers and Children, 216-235. Londres: Hodder & Stoughton;

Bell, A. (1976): A study of pupils' proof-explanations in mathematical situations. Educational Studies in Mathematics, 7, 23-40;

Carvalheira, G.(1999): Análise crítica de uma demonstração em geometria. XXI Jornada de Iniciação Científica da UFRJ (em CDRom).

Coutinho, F. (1998): O domínio do processo dedutivo por alunos de Licenciatura em Matemática. Resumos da XX Jornada de Iniciação Científica da UFRJ (em CDRom).

Coutinho, F. (1999): O progresso no nível de Raciocínio dedutivo de futuros professores de Matemática, Resumos da XXI Jornada de Iniciação Científica da UFRJ (em CDRom).

Davis, P. (1993): Visual Theorems. Educational Studies in Mathematics, 24(4), 333-344

De Villiers, M.D. (1990): The role and function of proof in mathematics. Pythagoras, 24, 7-24;

De Villiers, M.D. (1991): Pupils' needs for conviction and explanation within the context of geometry. Atas do PME-15, vol. 1, 255-262, Assissi, Itália;

Grows, D. (ed.) (1992): Handbook of research on mathematics teaching and learning. Mac-Millan, NYork;

Hanna, G. (1990): Some pedagogical aspects of proof. Interchange, 21 (1), 6-13;

Hanna, G and Jahnke, H. (1996): Proof and proving. In: International Handbook of Mathematics Education, 877-908.

Hersch, R.(1993): Prooving is convincing and explaining. Educational Studies in Mathematics, 24(4), 389-399;

Hoyles, C. (1997): The curricular shaping of students' approaches to proof. For the Learning of Mathematics, 17 (1), 7-16;

Nasser, L. (1992): Using the van Hiele theory to improve secondary school geometry in Brazil. Tese de doutorado apresentada à Universidade de Londres;

Nasser, L. (1994): Usando a teoria de van Hiele para melhorar o ensino secundário de geometria no Brasil. Eventos (INEP), nº 4, 2ª parte.

Nasser, L. & Tinoco, L. (1999): Helping to develop the hability of argumentation in mathematics. Atas do PME-23, vol. 1, p. 303, Israel.

Rezende, J. e Nasser, L. (1994): Kinds of argumentation used in geometry. Atas do PME-18, vol. 1, p. 66, Lisboa, Portugal;

Tinoco, L. (1999): Geometria Euclideana por meio da resolução de problemas. Instituto de Matemática, UFRJ.

Van Hiele. P. (1986): Structure and Insight. Orlando, FL: Academis Press.

A CONSTRUÇÃO/NEGOCIAÇÃO DE SIGNIFICADOS NO CURSO UNIVERSITÁRIO INICIAL DE CÁLCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL

Maria Cristina Banomi Barufi
IME-USP

As dificuldades existentes com o ensino de Cálculo Diferencial e Integral nos cursos iniciais da Universidade constituíram a grande motivação para este trabalho. `A luz do referencial teórico da rede de conhecimentos e significados, buscou-se a compreensão dessas dificuldades a partir dos livros didáticos, por constituírem um instrumento sempre presente no trabalho do professor na sala de aula. Uma vez que "conhecer e conhecer o significado", o enfoque principal residiu na negociação dos significados, para esclarecer em que medida a abordagem do Cálculo realizada e uma simples revelação ou uma construção significativa. A análise dos livros didáticos selecionados baseou-se em um modelo construído a partir do referencial teórico proposto e mostrou que a dificuldade não reside na ausência de bons livros. A diversidade dos percursos nos livros analisados se traduz numa maior ou menor adequação `a construção/negociação de significados no Cálculo.

No trabalho discute-se o papel fundamental do professor na sala de aula, tendo como potencial aliado o computador, como instrumento facilitador, que abre novos horizontes, possibilita o estabelecimento de múltiplas relações e a negociação de significados.

O PAPEL DA DEFINIÇÃO NA MATEMÁTICA DO SÉCULO 20 E SUA CONSEQÜÊNCIA NO ENSINO

Roberto Ribeiro Baldino
Grupo de Pesquisa-Ação da UNESP, Rio Claro (GPA)

Usualmente os alunos pensam que uma definição é uma descrição completa de um objeto. Essa é a acepção da filosofia, tal como a encontramos, por exemplo, em Hegel: "O objeto, apreendido pelo conhecimento inicialmente sob a forma de um conceito determinado geral, de modo tal que por aí seu gênero e sua determinidade geral são postas, é a definição". Entretanto, durante o século 20 essa concepção de definição cedeu lugar à seguinte: definição é o nome que se convenciona dar a um conjunto ou aos elementos de um conjunto bem determinado.

Como exemplo de definição no sentido atual, tomemos a definição de função contínua dos cursos de análise. "Dizemos que uma função real da variável real f é contínua se goza da seguinte propriedade: "para todo x real e para todo épsilon positivo existe um delta positivo tal que, para todo y, se módulo de y menos x é menor que delta, então módulo de f(y) menos f(x) é menor que épsilon". Essa "definição" pode ser entendida assim: considere o conjunto C de todas as funções reais de variável real que gozam dessa propriedade. Os elementos desse conjunto são denominados funções contínuas.

Outro exemplo: se, um dia, os matemáticos chegarem a definir "borboleta" eles dirão algo assim. Dados os conjuntos tais e tais, os elementos do conjunto tal, construído assim e assim, serão denominados "borboletas" e anotados BOR. Se um aluno disser que sempre pensou que as borboletas fossem coloridas, dirão: Suspenda tudo o que pensou ou sentiu acerca das borboletas. Pra saber se elas são coloridas ou não, você deve levar em conta apenas isto: são elementos deste conjunto. A cor não tem sentido.

Para Hegel, a filosofia tem que "se justificar, antes de tudo, acerca da necessidade de seus ob-jetos". A matemática do século 20 conseguiu colocar essa necessidade fora de seu âmbito. Para poder dizer que a justificação, na verdade, faz parte da matemática será preciso reconceituar matemática de modo mais amplo, ou seja, enfrentar a terrível questão: o que é a matemática?

E. Borel, na década de 20, dizia que qualquer definição em matemática deve satisfazer à condição que dois matemáticos, quando falando de um objeto, devem estar certos que eles estão falando sobre o mesmo objeto. A matemática do século 20 é o resultado desse "rigor", ou seja do esforço de introduzir pontos de basta pelo discurso todo, de dar a cada significante um só significado, de evitar o deslizamento do significado sob o significante; em suma, a matemática é o oposto da poesia. A matemática é o resultado de um esforço milenar de finitização do pensamento. A matemática do século 20 é o pensamento já finitizado: dado um épsilon existe um delta e dado outro épsilon existe outro delta e dado outro e outro e assim sucessivamente, em cada passo, ficamos no mesmo lugar. Esse é o modelo do rigor. O sujeito falante fica fora. O ideal da ciência se cumpre.

ÁLGEBRA LINEAR COMO CURSO DE SERVIÇO PARA A COMPUTAÇÃO[22]

Rute Henrique da Silva[23]
Orientador: Prof. Dr. Roberto Ribeiro Baldino

Esta pesquisa aborda a Álgebra Linear como um "curso de serviço". Procuramos projetar, executar e avaliar uma disciplina que atendesse às expectativas de nosso cliente, o Departamento de Computação da UNESP, Rio Claro, ou seja, programar um curso diferente do usual, tendo como modelo negativo as disciplinas de mesmo nome ministradas no ensino tradicional vigente. Inicialmente realizamos entrevistas com professores que trabalhavam no curso de Computação e, posteriormente, as discutimos em nosso grupo de pesquisa a fim de elaborar fichas de trabalho para serem levadas à sala de aula. Ao final do curso registramos as opiniões de professores e alunos em relação à disciplina. Durante a pesquisa utilizamos como proposta pedagógica a Assimilação Solidária e o trabalho do *Advanced Mathematical Thinking*, um *working group* do International Group for the Psychology of Mathematics (PME) como posição epistemológica. Não se trata de afirmar que o curso que programamos foi melhor ou pior que os anteriores nessa turma, mas demos um enfoque diferente que pode ser analisado por professores que ministram algum "curso de serviço".

---

[22] Dissertação de Mestrado em Educação Matemática, defendida na UNESP, Rio Claro em 02/02/1999.
[23] Professora Substituta do Instituto de Matemática UFRGS e do Centro Universitário La Salle.

Atualmente, a Álgebra Linear ocupa um espaço importante nas universidades e a procura por uma formação nessa disciplina vem crescendo em cursos como Engenharia, Computação, Economia, Estatística, etc. Juntamente com esse crescimento, aparecem dificuldades, conforme vemos em FANTINEL (1998), "*A Álgebra Linear, logo que foi introduzida, funcionou como um novo meio de representação, em linguagem formal, daquelas imagens espaciais que os alunos já tinham formado. Contudo, ao ser introduzida, não se imaginou que viria a ser considerada pelos alunos uma das disciplinas mais difíceis do currículo, como constatamos pelos dados obtidos*" (p. 1) e SILVA (1997) "*o ensino da Álgebra Linear na Universidade, em cursos introdutórios, trouxe à tona um antigo problema para os estudantes: suas dificuldades com a álgebra*" (p.2). Acreditamos que o processo de ensino-aprendizagem da Álgebra Linear precisa ser investigado.

Além dessas dificuldades mencionadas, também existe o problema da adequação da Álgebra Linear aos cursos em que ela é ministrada, como é o nosso caso, pois trabalhamos com uma turma do curso de Computação. A disciplina de Álgebra Linear, conforme descrita em nossa pesquisa, está denominada "curso de serviço", uma vez que é ministrada na interface entre a matemática e suas aplicações [BALDINO (1995)]. Tal expressão também é mencionada por CLEMENTS (1988) e HOWSON (1987).

Nossa pesquisa esteve inserida no Grupo de Pesquisa-Ação em Educação Matemática - GPA e, especificamente, do Grupo de Álgebra Linear, um subgrupo do GPA que funcionou de agosto de 1996 a dezembro de 1997. A partir das discussões surgidas no grupo de Álgebra Linear, formulamos a seguinte pergunta diretriz: ***"Como projetar, executar e avaliar uma disciplina de Álgebra Linear que atenda às expectativas de um curso de Computação?*** Desse modo, partimos para a sala de aula, a fim de que nossa ação de mudança ocorresse junto com nossa reflexão teórica, pois de acordo com BALDINO & SOUZA (1997), "*para mudar a sala de aula, é por ela que temos de começar e, para que as mudanças não sejam aleatórias e se autodestruam, é preciso que a ação de mudança do real ocorra junto com a reflexão teórica que a propõe, orienta e analisa. O professor-pesquisador é o agente que se encarrega de conduzir o ensino, colher e analisar dados. Ele toma sua própria prática como objeto de pesquisa. A reflexão não é um momento de isolamento e introspeção mas, sim, de interrogação e discussão com um grupo de professores pesquisadores. A fórmula é, pois, ação-reflexão-ação com periodicidade semanal, não reflexão-ação-reflexão com periodicidade anual ou periodicidade de uma dissertação acadêmica. Essa é a metodologia da Pesquisa-Ação.*"(p. 5)

Nossa intenção foi programar um curso que atendesse às expectativas do curso de Bacharelado em Ciências da Computação da UNESP, Rio Claro. Realizamos entrevistas com os professores que trabalhavam em disciplinas desse curso e as discutimos em nosso grupo de pesquisa, para posteriormente elaborarmos o material a ser utilizado em sala de aula; adotamos como proposta didático-pedagógica a Assimilação Solidária[BALDINO(1994, 1995, 1997, 1998)] e utilizamos como posição epistemológica o trabalho do *Advanced Mathematical Thinking*, um *working group* do International Group for the Psychology of Mathematics (PME)[TALL(1980, 1992, 1991,1995); TALL & VINNER(1981) e VINNER(1991)]. Ao final do curso registramos as opiniões de alunos e professores em relação à disciplina: depoimento dos alunos e questionário com os professores.

Procuramos programar um curso de Álgebra Linear diferente do usual, tendo como modelo negativo as disciplinas de mesmo nome ministradas no ensino tradicional vigente. O curso foi diferente dos anteriores, conforme constatamos nos depoimentos de alunos e professores, mas não se trata de afirmar que foi um curso melhor ou pior que os outros, apenas demos um enfoque diferente. Gostaríamos de salientar que a pesquisa que propusemos não visou a introdução de conceitos de Álgebra Linear através do computador, mas programar e executar uma disciplina que atendesse às expectativas de nosso cliente, o Departamento de

Computação. Dessa forma, o curso que programamos não foi totalmente algébrico, geométrico ou matricial. Isso se deu por dois motivos: primeiro para possibilitar a formação de diferentes *imagens conceituais*, e segundo, para que de algum modo os conceitos tivessem relação com as experiências dos alunos conforme sugere CARLSON(1993).

No currículo do curso de *Bacharelado em Ciências da Computação* da UNESP, Rio Claro, a disciplina de Álgebra Linear encontra-se no primeiro ano. É uma disciplina semestral, obrigatória e com uma carga horária total de 60 h/a. Em 1997 a disciplina foi oferecida pelo Departamento no segundo semestre, odocente responsável pela disciplina foi o Prof. Dr. Roberto Ribeiro Baldino. A proposta didática foi elaborada no grupo de Álgebra Linear. Além de trabalharmos com o livro-texto (Coleção Schawn), optamos por produzir fichas de atividades. Tanto no uso do livro, quando na elaboração das fichas de atividades, levamos em consideração as expectativas do curso de Computação .

Na última parte da disciplina trabalhamos conceitos de Processamento de Imagens, buscando integrar o estudo de autovetores, autovalores e ortogonalização com a Computação. Colocamos uma questão sobre Processamento de Imagens na prova, questão essa que era imediata, para aqueles que haviam demonstrado interesse pelo assunto durante as aulas. Poucos alunos optaram por essa questão. Acreditamos que isso se deve ao fato de que a FT12 precisava ser reformulada. Alguns depoimentos, entre eles o de Roberto[24], confirmaram essa idéia: *"Talvez a FT12 pudesse ser um pouco mais explicada. O problema é que como tinha muita gente de 4º ano, a aula pra eles ia se tornar maçante. Teria que tentar encontrar o meio termo, pra quem está no 1º ano compreender e pra quem está no 4º ano não dormir. Nossa turma era muito misturada, uma turma mais homogênea seria melhor." (Roberto, aluno de 1º ano).* No Apêndice 2 de nossa dissertação aparece o problema de Processamento de Imagens, já reformulado [SILVA, R.H. ; BALDINO, R.R. (1998)].

Em relação ao enfoque dado ao curso, cabe ressaltar o que aconteceu enquanto o professor examinava o trabalho de Luiz, referente à FT de Coordenadas Homogêneas, esse afirmou: *"Olha, se nós tivermos a conceituação a partir de uma aplicação, a conceituação da Álgebra Linear fica mais fácil".* Parece que esse tem sido o grande problema dos professores que ministram Álgebra Linear para o curso de Computação, pois partem de um referencial matemático e colocam isso para os alunos da Computação, aí as dificuldades aparecem.

Acreditamos que a apresentação de um curso de Álgebra Linear para a Computação precisa ser reformulada, conforme CARLSON et alii(1993), que sugerem, para um primeiro curso de Álgebra Linear, que o programa e a apresentação devem responder às necessidades dos clientes das disciplinas.

Conforme observamos durante o curso, e também constatamos nos depoimentos, muitos alunos estavam fazendo a disciplina mais de uma vez e, em cursos anteriores, outros professores reprovaram até 80% dessa turma, a partir da conceituação matemática e um método quadro-negro e giz, enfatizando teoremas e demonstrações. De fato, observamos que a turma saía muito bem na resolução de problemas que envolviam cálculos e ficou a desejar no que se refere à conceituação. Mas que papel tem essa conceituação em um curso de Computação? Será que haveria uma maneira de trabalhar com essa conceituação de modo que faça sentido para esses alunos?

Também podemos nos questionar em relação a tal "sucesso" na reprodução de modelos e as dificuldades apresentadas na conceituação. Será que, exatamente porque sabem calcular, isso os impede ou dificulta a compreensão da parte conceitual? Não se interessam por essa

[24] Os nomes dos alunos são fictícios.

parte porque sabem que podem se defender de outro jeito? Como no depoimento de Caio "*a gente está aqui, a gente quer aprender, mas a gente quer passar também*".

Não podemos afirmar com certeza se atendemos ou não às expectativas do curso de Bacharelado em Computação da UNESP, Rio Claro, pois não tivemos um retorno significativo dos questionários que enviamos aos professores. Entretanto o retorno que tivemos de alguns professores aliado aos depoimentos de alunos podem nos fazem concluir que a disciplina ministrada em 1997 talvez não tenha atendido às expectativas, mas serviu para mostrar que podemos fazer cursos diferentes dos usuais.

Esperamos que nossa pesquisa possa contribuir diretamente para o professor com formação matemática que, como nós, não é especialista em Computação, mas trabalha com Álgebra Linear em uma turma deste curso. De forma mais geral, também acreditamos que esse trabalho pode ser útil para qualquer professor que ministre algum "curso de serviço".

BIBLIOGRAFIA

- BALDINO, R.R. Assimilação Solidária: escola, mais-valia e consciência cínica. Rio Claro: Grupo de Pesquisa-Ação em Educação Matemática - GPA, 1997. 16p. (Mimeogr.)
- ________. Assimilação Solidária Onze Anos Depois. Rio Claro: Grupo de Pesquisa-Ação em Educação Matemática - GPA, 1994. 16p. (Mimeogr.)
- ________. Pontuando a Pesquisa em Educação Matemática (Notas para Apresentação Oral). Rio Claro: UNESP, 1995. 7p. (Mimeogr.)
- ________. Como Integrar Disciplinas sob o Ponto de Vista Epistemológico. In I ENCONTRO SETORIAL DOS CURSOS DE GRADUAÇÃO DA UNESP, RIO CLARO, 1995, Águas de Lindóia. Anais, Águas de Lindóia: 1995.
- ________. Assimilação Solidária: escola, mais-valia e consciência cínica. Educação em Foco, Universidade Federal de Juiz de Fora, MG. Vol. 3 – N° 1 – Mar-Ago., p. 39-65, 1998.
- *BALDINO, R.R. SILVA,R.H. Introdução ao Processamento de Imagens ou Aplicação da Álgebra Linear*. Relatórios Internos do Departamento de Matemática UNESP, Rio Claro, n°. 51/98. 1998.
- BALDINO, R.R., SOUZA, A.C.C. A Pesquisa em Sala de Aula: Grupo de Pesquisa-Ação em Educação Matemática - GPA. Rio Claro: Grupo de Pesquisa-Ação em Educação Matemática - GPA, 1997. 40 p. (Mimeogr.)
- CARLSON, D. Teaching Linear Algebra: Must the Fog Always Roll In? The College Mathematics Journal, v. 24, n.1, p. 29-40, jan 1993.
- CARLSON, D., et alii. The Linear Algebra Curriculum Study Group Recommendations for the First Course in Linear Algebra. The College Mathematics Journal, v. 24, n.1, p. 41-46, jan 1993.
- CLEMENTS, R.R. et al. Selected Papers on the Teaching of Mathematics as a Service Subject. R.R. Clements, P Lauginie, E. De Turckheim (Eds.). New York: Springer - Verlag, 1988.
- FANTINEL, P.C. Representações Gráficas Espaciais para o Ensino de Cálculo e Álgebra Linear. Rio Claro: UNESP, 1998. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - IGCE, Departamento de Matemática, UNESP, Rio Claro, 1998.
- HOWSON, A. G. et al. Mathematics as a Service Subject. A. G. Howson, J. -P. Kahne (Eds.). ICMI Study Series. Cambridge: Cambridge University Press, 1987.
- LIPSCHUTZ, S. Álgebra Linear. Trad. R. R. Baldino. Rio de Janeiro: Editora McGraw-Hill do Brasil, LTDA, 1971. 403 p.

- SILVA, A. M. Uma Análise da Produção de Significados para a Noção de Base em Álgebra Linear. Rio de Janeiro: Universidade Santa Úrsula, 1997. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - Departamento de Educação Matemática, Universidade Santa Úrsula, 1997.
- TALL, D. Mathematical Intuition, with Special Reference to limiting Processes. In: PME Conference, 4th, 1980, Berkeley. PROCCEDINGS. Berkeley: 1980, p.170-176.
- ________. The Psychology of Advanced Mathematical Thinking. In: TALL, D. (Ed.). Advanced Mathematical Thinking. London: Kluwer Academic Publishers, 1991. p. 3-21
- ________. The Transition to Advanced Mathematical Thinking: Functions, Limits, Infinity, and Proof. In: Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning. New York: NCTM, 1992, cap.20, p.495-510.
- ________. Cognitive Growth in Elementary and Advanced Mathematical Thinking. In PME Conference, 19th, 1995, Recife. PROCEEDINGS. Recife: Universidade Federal de Pernambuco, 1995, vol 1, p. 61-75.
- TALL, D., VINNER, S. Concept Image and Concept Definition in Mathematics with Particular Reference to Limits and Contunity. Educational Studies in Mathematics, n° 12, p. 151-169, 1981.
- VINNER, S. The Role of Definitions in Teaching and Learning. In: TALL, D. (Ed.). Advanced Mathematical Thinking. London: Kluwer Academic Publishers, 1991. p. 65-81.

NÚMERO REAL: CONCEPÇÕES DOS ESTUDANTES

Sonia IGLIORI
Benedito SILVA
PUC-SP

RESUMO

Este trabalho pretende investigar que concepções sobre números reais trazem os alunos que chegam à Universidade e se as mesmas evoluem. Para isso foi efetivado um estudo diagnóstico, através da aplicação de um questionário a 36 alunos iniciantes e a 14 finalistas de um curso na área de exatas da Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

ABSTRACT

This paper intends to investigate which knowledge and which conceptions the students who come in to the University bring about real numbers and intends to know the evolution of these conceptions at the end of their universitary studies. For that, it has been efeivated a diagnostic study through the application of a questionary to 36 beginner students and to 14 students from the last grade of the Course of Mathematics of Pontifícia Universidade Católica de São Paulo.

INTRODUÇÃO

Os conteúdos da Análise (Cálculo) foram os primeiros a comporem temas de pesquisa no âmbito da Educação Matemática, voltados ao ensino superior. Em especial sobre números reais. Elas mostram por exemplo que, para os alunos, as relações existentes entre os diferentes conjuntos construídos a partir das extensões sucessivas do campo numérico estão longe de serem claras. Se para os alunos, R compreende categorias diferentes de número, os inteiros, as frações, os decimais, os números que se exprimem pelos radicais e alguns outros como π, todas estas categorias tendem à se confundir na associação número real, número decimal (com representação decimal finita), associação essa reforçada pelo uso das calculadoras. Do mesmo modo, se eles fazem uma associação entre os reais e os pontos da reta, esta associação não corresponde necessariamente à nossa visão do contínuo numérico. (Artigue, 1993).

Artigue (1993) reforça que as dificuldades de acesso ao campo da Análise são de naturezas diversas, constituindo-se numa rede de complexidades que se embricam e se reforçam

Após anos na docência da Análise , vimos constatando essas dificuldades que o conceito de número real apresenta para os estudantes. Pudemos também verificar que os mesmos tipos de dificuldades ainda persistiam ao final dos estudos universitários. Com intenção diagnostica, esta investigação foi desenvolvida. Um dos objetivos de conhece-las é também para poder modificá-las quando necessário for, o que presume, muitas vezes, novas abordagens e também novas metodologias de ensino, conseqüência esperada de um trabalho como este.

II. FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

O estudo diagnóstico pretendido nesse trabalho teve por objetivo identificar as concepções dos estudantes sobre número real, entendendo como Balacheff que: "*Um conhecimento se atualiza em uma multiplicidade de concepções eventualmente contraditórias em referência a um conceito particular*". Para ele este modo de colocar os termos conceito, conhecimento e concepção preserva a possibilidade de falar do conhecimento de um sujeito, relativamente a um conceito dado, dando uma abertura àquele modo que pretende dar conta da complexidade deste conhecimento que considera que o mesmo só pode ser atestado em uma situação (e portanto tendo a cada vez a marca do contexto) deixando assim ao conceito o lugar privilegiado de uma referência comum aos conhecimentos em jogo (em particular às do sujeito e de seu observador) .

Este trabalho referenciou – se também na conceituação de registros de representação de Duval e de obstáculo epistemológico de Brousseau, para a organização da investigação diagnóstica.

III. OS PROCEDIMENTOS DA PESQUISA

O questionário foi composto de questões abertas e fechadas. Algumas delas se assemelhava a questões propostas em pesquisas francesas e israelitas (Robinet, 1994) (Thirosh, 1995) sobre o assunto, envolviam a noção de representação, alguns obstáculos apontados na literatura como epistemológicos. Além de questões relativas ao conceito do número real propriamente dito, outros correlatos também compuseram o questionário. Na primeira questão foi solicitado aos alunos que classificassem entre racional e irracional 15 números escolhidos de forma conveniente. Na segunda questão foi indagado o critério utilizado na classificação. As questões Q3 e Q4 foram colocadas para apurar o efeito do uso da calculadora no comportamento dos alunos sobre a relação número e aproximação. Através das questões Q5, Q6, Q7 e Q8, pretendíamos avaliar os conhecimentos dos alunos sobre as propriedades de densidade, ordenação e infinitude de R e sobre a não completude de Q. A questão Q9 foi proposta para se avaliar as concepções dos alunos (intuitiva no caso dos iniciantes) sobre cardinalidade de conjuntos infinitos, ou seja foi proposto a eles compararem pela inclusão alguns conjuntos infinitos.

As condições de aplicação, foram as normais de sala de aula, numa duração de aproximadamente uma hora e meia. O teste foi aplicado nas primeiras semanas letivas. O público investigado foi composto de 36 estudantes iniciantes e 14 finalistas da área de exatas da PUC/SP.

IV.RESULTADOS

A representação decimal ilimitada trouxe confusão aos iniciantes.

Os números com representação decimal em que aparecem reticências (mesmo que limitada) causam sempre instabilidade nas respostas. As representações decimais ilimitadas estão associadas à irracionalidade. Há identificação entre número e aproximação, e foi mais forte entre os finalistas. O número $\pi/10$ foi classificado como racional, por 13 alunos iniciantes indicando a interferência da representação. Em resposta à segunda questão os alunos revelam: número irracional é um "*número infinito*"; ou "*um número com infinitos dígitos após a vírgula*"; o número racional é um número "*exato*"; "*os irracionais são as raízes*"; "*racional é um número que pode ser posto na forma a/b*" (em geral, sem especificação sobre a e b) "*racional é um número inteiro*"; "*número irracional é um número negativo*"
Um maior número dos alunos considerou que há infinitos racionais num intervalo da reta em contraposição ao número daqueles que consideraram que há infinitos irracionais. Destacamos que um aluno finalista considerou um intervalo da reta com um número finito de pontos.
O modelo da reta real para esses alunos, é um modelo no qual não vale a propriedade da densidade algébrica. As respostas evidenciaram confusão, tanto entre os conceitos de número racional e de número irracional, quanto às noções de representação decimal, bem como quanto à noção de sucessor e de existência de infinitos números num intervalo da reta. Mostraram também que mesmo os finalistas desconheciam a existência da propriedade de densidade dos racionais em R e o da completude deste. Para a maioria dos alunos a cardinalidade de conjuntos infinitos é sempre a mesma, também para os conjuntos infinitos a parte é sempre maior que o todo.
Os alunos finalistas mostraram possuir em geral as mesmas concepções que os iniciantes, apenas apresentaram respostas mais coerentes.

V. CONCLUSÃO

Sinteticamente, podemos destacar que para a maioria dos estudantes havia:

1. Identificação entre um número e sua representação.
2. Identificação entre irracionalidade e representação decimal ilimitada.
3. Associação entre irracionalidade e "não exatidão". (não exatidão poderia ser: número não inteiro, número negativo, número cuja representação decimal possuía pontos de reticências, em número infinito ou não).
4. Identificação entre número e aproximação (identificação efetuada percentualmente por mais alunos finalista que iniciantes).

Na análise comparativa das respostas dos alunos iniciantes e finalistas, pudemos avaliar que, apesar de ter havido evolução, relativamente ao índice de acertos, dos últimos em relação aos primeiros, concepções "errôneas" detectadas, persistiram após um curso introdutório de Análise Real, tratado de forma tradicional. Onde este estudo foi realizado, os reais são apresentados pelo método axiomatico.

Diversos pesquisadores têm analisado a questão das mudanças de "concepções" dos estudantes num processo de ensino. Numa referência a Viennot, Mortimer (1995) afirma que "*Os estudos realizados sob essa perspectiva revelam que as idéias alternativas de crianças e adolescentes são pessoais, fortemente influenciadas pelo contexto do problema e bastante estáveis e resistentes à mudança, de modo que é possível encontrá-las mesmo entre estudantes universitários. Realizadas em diferentes partes do mundo, as pesquisas mostram o mesmo padrão de idéias em relação a cada conceito investigado*".

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

1. ARTIGUE, M. Epistémologie et *Didactique*. *Cahier de Didactique des Mathématiques*. Paris. N. 3, 1989.

2 .— L'enseignement des débuts de l'Analyse: Problèmes épistemologiques, cognitifs et didactiques. *Cahier de Didactique des Mathématiques*. Paris, 1993.
3. BARBIN, E. Saisir l'irrationnel: dire, monter, faire toucher, tenir. *Bulletin A.P.M.E.P*, N. 400. Paris, 1995.
4. DHOMBRES, J. Nombre, Mesure et Continu. Epistémologie et Histoire. *Cahier de Didactique des Mathématiques*. C.E.D.I.C. Paris, 1978.
5. DUVAL, R. Semioses et Noesis. *Conference APMEP, IREM*, 1992
6. FISCHBEIN, E., JEHIAM, R., COHEN, D. The concept of irrational numbers in high-school students and prospective teachers. *Educational Studies in Mathematics*, Boston, N. 29, p.29-44. 1995.
7. MORTIMER, E.F. Constutivismo, mudança conceitual e ensino de Ciências: para onde vamos?. *Faculdade de Educação da UFMG Belo Horizonte*, 1995.
8. ROBERT, A. Rapports enseignements-apprentissage. (Débuts de l'Analyse sur R). *Cahier de Didactique des Mathématiques*, n° 18_0 et 18_1 Paris, 1985.
9. ROBINET, J. Les réels: quels modèles en ont les élèves?. *Cahier de Didactique des Mathématiques*, N° 21. Paris, 1994.
10. TIROSH, D. The role of student's intuitions of infinity in teaching fhe Cantorian Theory. *Advanced Mathematical Thinking*, Boston, p.199-214. 1995.

ENTENDENDO ANÁLISE REAL

Márcia M. F. Pinto
Departamento de Matemática, UFMG

***Resumo**: Este artigo apresenta uma análise da construção de teoria matemática formal por estudantes universitários. Precedido por um estudo exploratório que visava o estabelecimento de categorias iniciais, o estudo principal foi conduzido ao longo de um curso de Análise Real de vinte semanas. Estudantes foram entrevistados em intervalos regulares, para que seu desenvolvimento durante o curso fosse acompanhado. Analisando definições, argumentação e imagens explicitadas pelos estudantes, dois modos de construção da teoria que estava sendo ensinada foram distinguidos —**extraindo significado** a partir da definição formal, deduzindo formalmente a teoria, e **atribuindo significado** `as definições e`a teoria, construindo conhecimento através de exploração de imagem conceitual prévia. Ambas as rotas podem ou não ser bem sucedidas na contrução da teoria formal como entendida pelos matemáticos.*
Palavras chave: Análise Matemática, Psicologia da Educação, Construção do Conhecimento.

Este estudo tem por objetivo investigar estratégias usadas por diferentes indivíduos para compreender teorias axiomáticas formais, adotando o ponto de vista de que um curso em Análise Real é uma tentativa de iniciar o estudante na cultura do matemático profissional.
A pesquisa é iniciada em fevereiro de 1995 com um estudo preliminar, exploratório, analisando um trabalho individual escrito de 20 estudantes de Licenciatura em Matemática e entrevistas com 7 estudantes selecionados naquele grupo. É uma análise do produto final de um curso de Análise Matemática, oferecido para alunos do Instituto de Educação, Universidade de Warwick, Inglaterra. O referencial para análise dos dados que foram coletados foi a teoria que vem sendo elaborada pelo grupo denominado Advanced Mathematical Thinking Group (ver, por exemplo, Tall, 1991) e que tem seus trabalhos divulgados principalmente nos encontros do International Group for the Psychology of Mathematics Education (PME). Da investigação preliminar,

verificou-se que, ao final de um curso de Análise Real, poucos estudantes dominavam a teoria formal que havia sido apresentada; a grande maioria construia e fundamentava sua argumentação primordialmente em imagens, como já ilustrado e discutido na literatura (ver Gray&Pinto, 1995; Pinto &Tall, 1996; Pinto, 1998).

Para garantir na amostra do estudo principal alguns estudantes bem sucedidos em sua tentativa de construir a teoria como entendida pelos matemáticos, alunos do Departamento de Matemática, além dos do Instituto de Educação, foram contactados, selecionados e convidados a participar do projeto. Neste estágio, onze estudantes de Matemática foram acompanhados durante as 20 semanas de seu primeiro ano cursando Análise Real, tendo sido entrevistados em sete encontros individuais; quatro licenciandos foram acompanhados durante 10 semanas de seu curso e entrevistados quatro vezes. Minha presença em sala de aula como observadora foi permitida pelos professores de ambos departamentos. Não era adotado um livro texto. Desta forma, questões para as entrevistas eram preparadas ao longo do curso. Dados coletados eram revisados, buscando uma primeira categorização; tal categorização era re-avaliada com nova coleta, até que uma estrutura natural emergisse baseada no conjunto total dos dados. Esta metodologia segue o estilo de Strauss (1987), ou mais recentemente Strauss e Corbin (1990), para construção de teoria.

Desenvolvendo categorias para análise de dados

A categorização inicial considerava:

- o conhecimento das definições pelos estudantes,
- o uso das definições para deduzir resultados,
- o uso de tais resultados em teoremas ou questões mais complexas, de forma a construir a teoria de modo sistemático.

As categorias criadas foram relacionadas a três temas: Definições, Deduções e Teoria Formal. No entanto, da análise do trabalho escrito de vinte alunos do Instituto de Educação ao término de seu curso de Análise verificou-se que, ao responder a maioria das questões, dezenove alunos construíram seus argumentos informalmente, muitas vezes fundamentando suas respostas em casos específicos ou em imagens inconsistentes com a teoria formal, ao invéz de usar definições. Percebeu-se então a estreita articulação entre os temas definições, deduções e Teoria Formal, expressa pelo fato de que o verdadeiro entendimento de uma definição requer o uso de deduções; e que deduções formais e teoria formal requerem o domínio das definições formais.

Em resposta a esta análise, questões iniciais centradas em definições formais e deduções foram reformuladas e passam a focalizar as definições que os estudantes explicitam e as deduções que eles fazem a partir de tais definições. O tema Deduções foi então renomeado Argumentação, incluindo assim outras justificativas além da formal; e o tema Teoria Formal foi modificado para Imagem. Essencialmente, a categorização final em cada tema contemplou:

- Definições dadas por cada estudante, classificadas como descritiva, formal correta ou formal distorcida,
- Argumentação, categorizada como fundamentada na imagem conceitual ou na teoria formal apresentada,
- Imagem, como explicitada pelo aluno, classificada como sugerindo ter sido, ou não, construida a partir da teoria formal.

Duas diferentes abordagens — formal e informal — são inicialmente concebidas como categorias para estratégias básicas usadas pelos alunos durante a construção da teoria (IMAGEM), passando a ser descritas em termos das categorias apresentadas acima em cada tema. No entanto, diversos episódios sugerem estratégias para elaboração de respostas satisfatórias do ponto matemático formal próximas ou articuladas a abordagens que poderiam ser classificadas como informais. Tal análise resultou numa reformulação das duas categorias concebidas inicialmente para:

- **extraindo significado** da experiência nova através de deduções formais,

• **atribuindo significado** para a experiência nova a partir da imagem conceitual.

Extraindo significado involve familiarizar com as novas definições e o novo contexto, talvez através de repetição, antes do seu uso como base para novas deduções formais. Habilidade em lidar com representações simbólico-proposicionais, e teorias de encapsulação (ver, por exemplo, Dubinsky 1991; Dubinsky et al 1988) oferecem neste caso uma boa descrição do processo de abstração requerido para a 'construção' do conhecimento formal.

Atribuindo significado involve o uso de experiências anteriores, idéias e imagens, frequentemente visuais ou cinéticas, para enriquecer e representar analogicamente (ver por exemplo Eysenck&Keane, 1995) as definições e conceitos apresentados. Características principais desta estratégia são: 'tradução' da nova teoria em termos das experiências e do conhecimento prévio, e 'reconstrução' do conhecimento prévio com a teoria formal. Exploração de representações analógicas parece ser a essência do processo de abstração neste caso.

A categorização final que emerge da análise dos dados coletados se resume no quadro abaixo. Este explicita que **atribuir significado** pode conduzir `a construção da teoria formal, ou a fracasso quando o indivíduo se atem a argumentos puramente fundamentados em imagens; enquanto **extrair significado**, mecanicamente ou de modo reflexivo, também conduz a um espéctro de sucesso ou fracasso.

Abordagem		Construção dos Conceitos		
Estratégia	Característica	**Definição**	**Argumentos**	**Imagem**
Extraindo significado (construindo a partir da teoria formal)	memorizando •reflexivo • mecânico	formal •correct • distorcida	baseado na teoria formal •significativo • decorado	construída a partir da teoria formal •compartmentalizada • relacional
Atribuindo o significado (construindo a partir de ideias informais)	1.reconstruindo conhecimento prévio com o novo 2.interpretando o novo conhecimento em termos do prévio	1.formal •correct • distorcida 2.descritiva •geral •protótipos particulares	1.baseado em thought experiments •apresentado formalmente •fundamentado em imagens 2. pragmático	1.reconstruida com a teoria formal 2.retendo imagens prévias 3.aspectos retidos como informação adicional 4.conflito entre prévio e novo

Especificando categorias

Participantes do estudo principal, Ross e Chris são dois estudantes bem sucedidos, usando estratégias qualitativamente diferentes na construção da teoria que está sendo ensinada.

Para Ross, que 'extrai significado' da teoria formal apresentada, sua maior dificuldade no início do curso é ... "to learn the proofs ... I would need to read them again and again ... and maybe write them out myself. I mean, I understand them, it's just remembering them that's more difficult." (Ross, first interview)

Durante a primeira entrevista, Ross escreveu a definição de limite de sequências como a seguir:

A sequence (a_n) tends to limit L if, $\forall\ \varepsilon>0,\ \exists\ N(\varepsilon)\in\mathbb{N}$ s.t. $\forall\ n\geq N$;

$$|a_n - L| < \varepsilon.$$

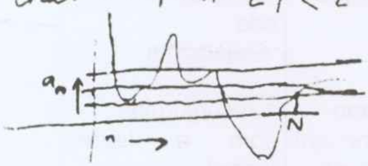
Ele explicou que aprendeu a definição "... just memorising it; well it's mostly that we have written it down quite a few times in lectures and then whenever I do a question I try to write down the definition and just by writing it down over and over again it get imprinted and then I remember it." (Ross, first interview)

Por sua vez Chris, que 'atribui significado' `a nova experiência, comenta que sua maior dificuldade inicial foi "...in the first lecture on limits, I didn't quite get it (the definition of limit of a sequence) ... but then I looked it up (the definition of limit of a sequence) in a book and understood ... and then ... I don't know umm it seems now okay."

Ele usa imagens visuais, representando graficamente suas idéias principais e escreveu a definição de limite de sequências enquanto desenhava, comentando: "I don't memorise that [the definition of limit]. I think of this [picture] every time I work it out, and then you just get used to it. I can nearly write that straight down."

~~$\forall\ a_n \to L$ then there~~ exists

For all $\varepsilon>0$, there exists $N\in\mathbb{N}$ such that $|a_n-L|<\varepsilon$ for all $n\geq N$



"I think of it graphically ... I think of it as you got a graph there and the function there , and I think that it's, it's got the limit there ... and then e once like that, and you can draw along and then all the ... points after *N* they are inside of those bounds. ... If this err when I first thought of this, it was hard to understand, so I thought of it like this ... like that's the n going across there and that's a_n. ... Err this shouldn't really be a graph, it should be points."

(Chris, first interview)

O engano de Chris ao representar a sequência por uma curva contínua sugere sua concentração em idéias de maior importância, temporariamente; seu comentário ao final de sua discussão sugere reconstrução de sua imagem inicial, provavelmente fundamentada em sua experiência prévia com gráfico de funções.

Durante a segunda entrevista, ambos estudantes puderam usar a definição para caracterizar satisfatoriamente a "não convergência" de sequências: Ross usou regras lógicas para negar os quantificadores na definição de limite de sequência, enquanto Chris escreveu a nova definição como num experimento mental, apoiado na representação gráfica do conceito.

Quanto a imagens prévias e `a interferência do conflito na construção do conhecimento, estes parecem centrais `a reconstrução das experiências dos que atribuem significado ao conhecimento novo, mas não tão determinantes na construção da teoria dos que extraem significado. Estes últimos estudantes podem inicialmente compartimentalizar o conhecimento que estão construindo, sem grande conflito. Por exemplo, para Ross e Chris, a idéia de uma sequência constante convergir causou estranheza, pois " ... you tend to think of a sequence as going up and then gradually getting closer and closer to a value ..." (Ross, first interview). Mas para Ross, a sequencia tenderá para o valor, porque "... the definition works for that, so ... so it must tend to the value ...". Já para Chris "... by definition it has a limit, but ... you don't really think of it as a limit ... ... I don't really know ...." (Chris, first interview). Neste episódio, enquanto Ross torna rotina o uso das definições como critério para tomada de decisões na construção de imagem formal inicialmente compartimentalizada, Chris está em processo de reconstrução de sua experiência prévia, explicitando o conflito entre esta e o conhecimento novo que lhe está sendo apresentado.

Discussão. Conclusão Final.

A complexidade envolvida nos problemas que os estudantes enfrentam em seu primeiro contacto com a Análise Real é indiscutível. Mesmo assim é possível descrever um padrão implícito em seu desenvolvimento. Estudantes são provenientes de um sistema educacional onde o ensino de matemática está principalmente centrado em cálculos e manipulação de símbolos. A Análise Formal passa a requerer um trabalho com definições que envolve quantificadores múltiplos e lógica proposicional. Estudantes podem fazê-lo começando uma construção nova, compartimentalizada das imagens prévias e deixando a reconciliação com experiências anteriores para depois, ou, partir do conhecimento prévio e reconstruir o novo.

Em momentos distintos estudantes normalmente se enquadram numa ou noutra categoria. No entanto, seis dentre os onze alunos de Matemática participantes do projeto apresentaram uma preferência por uma das abordagens descritas acima, mostrando ser possivel ser bem sucedido ou não em cada uma das categorias, e que as dificuldades centrais em cada rota de construção são diferentes.

Para os que **extraem significado**, aceitar as 'regras do jogo' e aceitar trabalhar com uma nova noção de prova que requer deduções a partir de definições não parece ser o grande problema. Para estes, dificuldades cognitivas ao estudar Análise Real parecem mesmo estar principalmente relacionadas `a habilidade em coordenar os processos nas afirmações quantificadas apresentadas na teoria e trabalhar com a lógica proposicional, como tem sido amplamente discutido em teorias de encapsulação (ver por exemplo, Dubinsky et al, 1988).

Já os indivíduos que **atribuem significado** tem sido omitido dos estudos mencionados acima. Para tais estudantes, a reconstrução das experiências prévias está invariavelmente e intimamente relacionada `a nova experiência, sendo parte essencial do trabalho com a nova teoria. Isto parece requerer um esforço cognitivo maior do que compartimentalizar uma nova construção. Estudantes como estes muitas vezes 'percebem' que uma determinada afirmação ou teorema é verdadeiro, e não 'sentem' nenhuma necessidade de prová-los dedutivamente. Muitas vezes são derrotados por imagens conceituais restritas, não adequadas `a exploração do conceito que pretendem desenvolver. Constroem definições idiossincráticas e descritivas, não apropriadas ao trabalho formal, que é então memorizado para responder ao curso.

Ambos os tipos de aprendizes recorrem `a memorização, quando estão fracassando. São unânimes no reconhecimento do esforço requerido para acompanhar o curso. Os que extraem significado talvez precisariam de mais tempo para 'encapsular' as definições; e os outros, talvez de mais tempo para reconstrução da estrutura cognitiva como um todo.

Referências

Dubinsky, E., Elterman, F. & Gong, C. (1988). 'The students construction of quantification', *For the Learning of Mathematics*, 8, 44–51.

Eysenck, M. W.&Keane, M.T.(1995) *Cognitive Psychology. A Student's Handbook*, Psychology Press, Hove, UK.

Pinto, M. M. F. & Gray, E. (1995). Difficulties Teaching Mathematical Analysis to Non-specialists, *Proceedings of PME 19*, Recife, Brazil, II, 18–25.

Pinto, M. M. F. & Tall, D. O.: 1996, 'Student teachers' conceptions of the rational numbers', in L. Puig and A Guitiérrez (Eds.), *Proceedings of XX International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, Valencia, 4, 139–146.

Pinto (1998) *Students' Understanding of Real Analysis*. Unpublished PhD Thesis, Warwick University.

Strauss, A. (1987). *Qualitative analysis for social scientists*. Cambridge University Press.

Tall, D. O. (Ed.) (1991). *Advanced Mathematical Thinking*, Kluwer: Dordrecht.

REPRESENTAÇÕES GRÁFICAS ESPACIAIS PARA O ENSINO DE CÁLCULO E ÀLGEBRA LINEAR[25]

Patrícia da Conceição Fantinel
Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Centro Universitário La Salle

A partir de um levantamento informal de opiniões de professores do curso de graduação em Matemática da UNESP, Rio Claro, observou-se que os alunos do primeiro ano têm grandes dificuldades em :

- representar sólidos geométricos simples em perspectiva;
- reconhecer a correspondência entre pontos de um sólido geométrico e pontos de sua representação em perspectiva;
- imaginar um sólido geométrico a partir de suas projeções em planos ortogonais, ou mesmo a partir da própria perspectiva;
- representar em perspectiva, ou imaginar em três dimensões, gráficos de funções de duas variáveis (quádricas).

Os recursos de representação gráfica desses alunos parecem insuficientes para lhes ajudar a compreender conceitos fundamentais das disciplinas de Cálculo I e II e Álgebra Linear, tais como derivada parcial, plano tangente, diferenciabilidade (de funções de duas variáveis), coordenadas esféricas, integrais triplas e outros.

Suspeitávamos que boa parte das dificuldades nas disciplinas de Cálculo e Álgebra Linear seriam decorrentes da pouca familiaridade com as representações gráficas da Geometria Espacial. Dificuldades semelhantes foram descritas nos trabalhos de BERTONHA (1989), quando esta afirma que *"ao cursar as disciplinas de Cálculo Diferencial e Integral I e II, era necessário fazer uso de construções gráficas no plano cartesiano de diversas formas geométricas planas e espaciais, a fim de realizar as atividades propostas naquelas disciplinas. Alguns alunos mostravam-se inseguros na elaboração de gráficos, devido à dificuldade de reconhecerem as formas geométricas através de seus nomes ou visualizar espacialmente a forma a ser esboçada pelo gráfico, tornando necessária a retomada dos conceitos geométricos que constam dos currículos de 1° e 2° graus."* (p.1). Também HAREL (1989) constatou que *"usando representações gráficas os alunos são capazes de generalizar corretamente conceitos e processos que eles aprenderam em termos de modelo visual, e aplicá-los na resolução de problemas de Álgebra Linear"* (p.140, trad. nossa).

Esse autor, em suas pesquisas, mostra que os alunos possuem sérias dificuldades para compreender sistemas algébricos que não tenham uma representação visual concreta facilmente acessível.

Consideradas as dificuldades levantadas informalmente junto aos professores do curso de graduação em Matemática da UNESP, Rio Claro e a importância do domínio desses conteúdos para compreensão de conceitos fundamentais das disciplinas de Cálculo e Álgebra Linear,

[25] Pesquisa Financiada pela Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo.

pareceu-nos muito relevante a produção de recursos instrucionais que facilitassem a representação gráfica dos alunos.

Buscando um quadro teórico que nos ajudasse tanto na elaboração de fichas de atividades, quanto na avaliação da própria pesquisa, nos deparamos com o Modelo de van Hiele. Após um estudo do Modelo decidimos trabalhar com ele através da seguinte pergunta diretriz:

Baseada no modelo de van Hiele, uma familiarização prévia com perspectivas (isométrica, cavaleira e cônica) e vistas ortográficas (lateral, frontal e superior) auxiliará aos alunos nas disciplinas de Cálculo e Álgebra Linear?

Plano de Ação

A pesquisa foi dividida em duas fases visando encaminhar a pergunta diretriz, para o que, em um primeiro momento, precisávamos de uma familiarização prévia e, num segundo momento, da análise dessa familiarização. Essas duas fases são descritas como segue.

Primeira fase

- As fichas de atividades foram construídas[26], avaliadas e re-estruturadas, conforme o andamento da pesquisa.
- Sua aplicação baseou-se na pedagogia alternativa Assimilação Solidária.
- Testes foram realizados nos sujeitos[27] da amostra, antes e depois da aplicação das fichas de atividades, para verificar se houve mudanças no nível de pensamento geométrico de cada sujeito.
- Entrevistas foram realizadas com os professores das disciplinas em questão (Cálculo Diferencial e Integral I e Geometria Elementar).

Segunda fase

- Questionários foram realizados com os sujeitos da amostra. No caso do curso de Física, na disciplina de Cálculo Avançado e Equações Diferenciais e para o curso de Matemática, na disciplina de Introdução à Álgebra Linear.
- Entrevistas foram realizadas com os professores das disciplinas em questão (Cálculo Avançado e Equações Diferenciais e Introdução à Álgebra Linear).

A avaliação da pesquisa se deu através de:

- testes utilizando o modelo de van Hiele, que mostraram o nível em que os alunos se encontravam antes e depois do desenvolvimento do trabalho;
- questionários com alunos que haviam passado pelo processo de experimentação das fichas de atividades e cursado as disciplinas posteriores: Cálculo Avançado e Equações Diferenciais, para alunos da Física, e Introdução à Álgebra Linear, para os alunos da Matemática;

[26] Analisamos os livros textos mais usados nas disciplinas de Cálculo e Álgebra Linear; fichas de atividades da disciplina de Geometria Elementar da UNESP, Rio Claro e apostilas da disciplina de Desenho Técnico Básico à Mão Livre da UFRGS. No qual procuramos observar: - o tipo de atividades que estavam sendo propostas, em termos de representações planas de figuras espaciais, identificando o nível de van Hiele correspondente e - o que se espera que o aluno faça, ou seja, para que aluno o material foi produzido. Posteriormente, a partir dos materiais analisados, construímos testes e fichas de atividades, baseadas no modelo de van Hiele, adequando-os às necessidades das disciplinas envolvidas.

[27] Foram pesquisados alunos do primeiro ano de graduação dos cursos de Matemática e de Física da UNESP, Rio Claro, nas respectivas disciplinas de Geometria Elementar e Cálculo Diferencial e Integral I.

- entrevistas com os professores regentes das disciplinas de Geometria Elementar, Cálculo Diferencial e Integral I, Introdução à Álgebra Linear e Cálculo Avançado e Equações Diferenciais, para as quais utilizamos o recurso de áudio-gravador.

Quadro Teórico

Dentro de nosso quadro teórico temos como:

1) posição epistemológica - o modelo de van Hiele e a teoria Cognitivista (Piaget, Ausubel e outros), para explicar as observações e orientar a elaboração e aplicação das fichas de atividades;

2) posição pedagógica - a pedagogia alternativa Assimilação Solidária, para adequar o uso das fichas de atividades à sala de aula.

- Modelo de van Hiele

O modelo van Hiele de pensamento geométrico surgiu, nos anos 50, dos trabalhos de doutoramento dos professores holandeses Dina van Hiele-Gedolf e Pierre Marie van Hiele; completados simultaneamente na Universidade de Utrecht e orientados por Hans Freudenthal (CROWLEY, 1987). Foi Pierre quem formulou o esquema e os princípios psicológicos e Dina quem focalizou o experimento didático para, assim, elevar o nível de pensamento dos alunos (HOFFER, 1983; NASSER, 1991).

O modelo sugere que os alunos, enquanto aprendem Geometria, progridem através de uma seqüência de cinco níveis de compreensão de conceitos. A formulação desse sistema de níveis ocorreu enquanto Pierre van Hiele estudava alguns dos trabalhos de Piaget. Durante este estudo ele verificou, como fizera Piaget, que os problemas ou tarefas que são apresentados às crianças, freqüentemente, requerem um conhecimento de vocabulário ou propriedades além do nível de pensamento da criança.

O objetivo dos van Hiele era ajudar o aluno a desenvolver ***insight*** em geometria. Uma pessoa mostra insight se :

- é capaz de resolver questões de forma satisfatória numa possível situação não usual;
- desenvolve correta e adequadamente as ações requeridas pela situação;
- desenvolve deliberada e conscientemente um método que resolva a situação.

Ou seja, os alunos entendem "o que" estão fazendo, "por que" estão fazendo algo e "quando" o fazem. Eles são capazes de aplicar seu conhecimento ordenadamente para resolver problemas.

Para fornecer insight ao pensamento, que é específico de cada nível, os van Hiele identificaram algumas generalidades que caracterizam seu modelo, vários estudos foram e estão sendo realizados para verificação de algumas dessas generalidades.

Além disso, para que haja o avanço de um nível para o próximo, van Hiele estabeleceu cinco Fases de Aprendizagem que devem ser vivenciadas pelos alunos.

- Teoria Cognitivista

Dentre os autores cognitivistas, nossa pesquisa procurou focalizar as idéias de Jean Piaget e autores que as complementam. Tais como os conceitos de espaço cognitivo; conhecimento, etapas de desenvolvimento cognitivo; abstrações; tomada de consciência; representação do espaço; ensino e aprendizagem; entre outros.

- Assimilação Solidária (AS)

A AS teve origem em 1984, no projeto CAPES/PACDT/SPEC intitulado *Matemática através de materiais concretos e formação de multiplicadores*, do Centro de Ciências da FAPERJ, onde, no mesmo ano, foi assumida como proposta oficial do G-Rio28 e utilizada por vários

[28] Grupo pedagógico do Rio de Janeiro.

professores em todos os níveis de ensino. Desde 1988, vem sendo desenvolvida na UNESP, Rio Claro.

O objetivo da AS é mudar o conceito de mérito escolar, sendo considerado, além do prêmio ao saber, o prêmio ao trabalho coletivo em sala de aula.

Aplicação dos Testes e Material Instrucional

Quando optamos por trabalhar com a turma de Cálculo Diferencial e Integral I, já sabíamos que o professor titular utilizava a pedagogia alternativa Assimilação Solidária. Pretendemos ressaltar o fato de não podermos modificar a estrutura de sala de aula, uma vez que essa foi negociada, mas apenas pudemos nos adequar ao que foi estabelecido e às necessidades didáticas do professor, procurando relacioná-las com nosso modelo teórico. Dessa forma procurávamos sempre auxiliar os grupos a partir de suas próprias falas, como sugere nosso modelo teórico, que caracteriza a verbalização como algo fundamental tanto para determinação do nível de pensamento geométrico do aluno, quanto para o avanço de níveis.
Na turma de Geometria Elementar não houve por parte do professor nenhuma explicitação quanto à pedagogia utilizada em sala de aula. Por vezes o trabalho era em pequenos grupos formados sem critérios específicos e as aulas eram, em sua maioria, expositivas. Grande parte do curso foi estruturado pelo livro de BAARTMANS & SORBY (1996), o qual mostramos para o professor no semestre anterior, ele resolveu utilizá-lo, enfatizando assim o importante papel da visualização neste curso. Embora nossas atividades tenham se restringido a apenas quatro aulas, procuramos observar, e sempre que possível, participar e auxiliar os alunos nas demais aulas. Com isso, a nosso ver, acreditamos ter acompanhado o desenvolvimento dos alunos para com as atividades do curso e ter auxiliado (quando solicitado) os procedimentos do professor.

Categorização do Nível de Pensamento Geométrico para os Testes e as Atividades Propostas

Diante dos dados obtidos, foi necessário um primeiro trabalho de análise das respostas, visando categorizá-las de acordo com as características de cada nível de van Hiele, conforme descritas anteriormente. Essa análise conduziu à descrição das respostas dos alunos no teste, descrição que tem se mostrado igualmente adequada às respostas obtidas nas atividades do curso de Cálculo. Com base nessa descrição dos níveis e na afirmação de que *"(...) os níveis de van Hiele não são discretos"* (GUTIÉRREZ, JAIME & FORTUNY, 1991, p.238, trad. nossa) procuramos uma classificação adequada às respostas dos alunos. Estes autores distinguem uma gradação de 5 graus de aquisição dentro de cada nível. Entretanto, como o aspecto dominante de nosso primeiro teste refere-se à identificação das parcelas da expressão algébrica com as componentes da representação geométrica, preferimos nos deter nos diferentes graus de acerto dos sujeitos em suas tentativas de estabelecer essa correspondência, para, a partir daí, classificá-los dentro de cada nível. Resultou, assim, a diferenciação de cada nível no que denominamos três faixas de abstração: na primeira o sujeito ainda exibe traços do nível anterior em suas respostas e, na terceira, já exibe traços do nível seguinte. Essas faixas de abstração seriam as mesmas distinguidas por Piaget: abstração empírica, abstração pseudo-empírica e abstração reflexionante.

Acreditamos que essas abstrações estão presentes dentro de cada nível de pensamento geométrico de van Hiele, com exceção do último que, a nosso ver, seria o do rigor matemático puro. Na verdade, esse quadro foi construído à medida que analisávamos as respostas, procurando classificá-las. A categorização que chegamos identifica o nível pré-básico (que chamamos de pré-nível 0) que possui a mesma estrutura, que acreditamos ser funcional para descrição das características de cada subestágio (contínuo e de forma espiral). Abaixo sumarizamos os 6 níveis, essa caracterização norteou nossas interpretações para as atividades e testes aplicados. Os resultados a que chegamos foram os seguintes:

- Pré-Nível 0: Neste nível, as respostas dos alunos baseiam-se em um subconjunto de características visuais do sólido dado.
- Nível 0 (Reconhecimento ou Visualização) - Neste nível, as respostas baseiam-se na percepção global dos sólidos a serem constituídos. Os alunos não representam os sólidos ou as posições dos sólidos quando não formam uma imagem mental[29] destes.
- Nível 1 (Análise) - Neste nível, há uma tentativa de identificação dos elementos sólidos e propriedades destes, porém, com certas falhas.
- Nível 2 (Ordenação ou Dedução Informal) - Neste nível, os alunos identificam e relacionam propriedades dos sólidos.
- Nível 3 (Dedução) - Neste nível, as respostas dos níveis anteriores são acompanhadas de justificativas, orais ou escritas.
- Nível 4 (Rigor) - Neste nível, as justificativas dadas aparecem de maneira formal.

Conclusões e Sugestões

A partir da análise dos testes e atividades verificamos, em relação a maioria dos sujeitos, pelo menos elevações de faixas de abstração em um mesmo nível, os alunos da Física apresentaram uma maior elevação de níveis em relação aos alunos da Matemática. Contudo houveram casos atípicos ao modelo, no qual o nível de pensamento geométrico no segundo teste foi inferior ao primeiro, o que evoca, por exemplo, a questão da conexão das respostas com as circunstâncias de aplicação do teste, dentro da problemática individual de cada aluno. Isso talvez mostre a limitação do modelo. Não estamos afirmando que o modelo seja incoerente, mas, talvez insuficiente para abranger até mesmo alguns dos geradores apontados por CABRAL (1992) (em nosso questionário procuramos avaliar alguns destes) para dificuldades no Cálculo: como o desejo do aluno, as relações de cumplicidade, as expectativas, o medo, o envelhecimento do saber-ensinado. Quem sabe com um novo modelo tais geradores seriam observados e novas interpretações surgiriam, essa é uma de nossas sugestões para próximos trabalhos.

Os questionários aos sujeitos e entrevistas aos professores levou-nos a seguinte conclusão:

Para os alunos de Física esse trabalho foi útil para a disciplina de Cálculo Avançado e Equações Diferenciais. Acreditamos que uma resposta afirmativa quanto à utilidade devesse ao trabalho na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I, cujos resultados foram satisfatórios (conforme análise dos testes); pela tomada de consciência (devido à necessidade do conteúdo para compreensão dos conceitos); pela abordagem da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I (que auxiliou na mudança da percepção da Matemática) e pela preferência do recurso geométrico.

Para os alunos do curso de Matemática o trabalho não foi útil à disciplina de Introdução à Álgebra Linear, embora o professor tenha constantemente abordado geometricamente conceitos da disciplina, segundo sua entrevista. Em nossa opinião, assim como para os alunos da Física, alguns aspectos, entre outros, devem ser considerados, conjuntamente ou não, como: a falta de tomada de consciência para o trabalho proposto, uma vez que esse trabalho na disciplina de Geometria Elementar possuia um caráter de ensino e, não como no Cálculo Diferencial e Integral I, de ferramenta para compreensão dos conceitos; uma mudança de níveis de pensamento geométrico mais lenta em comparação aos alunos da Física, não que isso seja de fundamental importância, mas deve ser levantado; uma inclinação algébrica na resolução dos problemas; a opinião quanto à matemática sem o vínculo com a disciplina de Geometria Elementar e uma fragmentação do curso de Graduação pela falta de integração entre disciplinas.

---

[29] Segundo GUTIÉRREZ (1996) "uma imagem mental é algum tipo de representação cognitiva de um conceito ou propriedade matemática por meio de elementos visuais ou espaciais."(p.9, trad. nossa).

Dessas suposições uma questão complicada surge, o que fazer para auxiliar a tomada de consciência de conceitos matemáticos trabalhados em sala de aula? Sendo que para isso, a nosso ver, não se deve pensar em que momento essa tomada ocorrerá.

Esperamos que este trabalho venha contribuir para um novo pensar no ensino, retomando essa habilidade fundamental a qualquer indivíduo - **a visualização espacial**.

Bibliografia

BAARTMANS, B.G., SORBY,S.A. Introduction to 3-D Spatial Visualization. New Jersey: Prentice Hall, 1996. 221p.

BERTONHA, R.A. O Ensino de Geometria e o Dia-a-Dia na Sala de Aula. Campinas: UNICAMP, 1989. Dissertação (Mestrado em Educação) - Faculdade de Educação, UNICAMP, 1989.

CABRAL, T. C. B. Vicissitudes da Aprendizagem em um Curso de Cálculo. Rio Claro: UNESP, 1992. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) - IGCE, Departamento de Matemática, UNESP, Rio Claro, 1992.

CROWLEY, M.L. The van Hiele Model of Development of Geometric Thought. In: LINDQUIST, M.M., SHULTE, A.P. (eds.) Learning and teaching geometry, K-12. Reston: NCTM, 1987. p. 1-16.

GUTIÉRREZ, A. Visualization in 3-Dimensional Geometry: In Search of a Flamework. In: PME Conference, 20th, 1996, Valência. Proccedings Valência: Universidade de Valência, 1996. v.1, p.3-19.

GUTIÉRREZ, A., JAIME, A., FORTUNI, J.M. An Alternative Paradigm to Evaluate the Acquisition of the van Hiele Levels. Journal for Research in Mathematics Education, NCTM, v.22, n.3, p.237-251, 1991.

HAREL, G. Learning and Teaching Linear Algebra: Difficulties and an Alternative Approach to Visualizing Concepts and Processes. Focus on Learning Problems in Mathematics, Framunghan, v.11, n.2, p. 139-148, 1989.

HOFFER, A. Van Hiele - Basead Research. Acquisition of Mathematics Concepts and Processes, Academic Press, 1983. cap. 7, p. 205-227.

NASSER, L. Níveis de van Hiele: Uma Explicação Definitiva para as Dificuldades em Geometria? Boletim do GEPEM, Rio de Janeiro, n.29, p. 31-35, 1991.

PIAGET, J. e colaboradores Abstração Reflexionante: relações lógico-aritméticas e ordem das relações espaciais. Porto Alegre: Artes Médicas, 1995. 292 p.

O ENSINO DE VETORES E O USO DE CABRI-GÉOMÈTRE

Marilena Bittar

Dep. de Matemática – UFMS

INTRODUÇÃO

Neste artigo expomos resultados parciais de uma pesquisa de doutorado realizada na França sobre o ensino de vetores. Esta pesquisa de doutorado visa por um lado analisar a noção de vetor tal como ela é introduzida nas classes de "Quatrième, Troisième e Seconde", e por outro lado estudar algumas dificuldades dos alunos na aprendizagem desta noção. O quadro teórico da pesquisa é o da didática francesa, utilizando as noções de teoria dos campos conceituais (Vergnaud), de registros de representação semiótica (Duval) e de instrumento e objeto (Douady).

Na primeira parte fizemos o estado da arte de algumas pesquisas sobre o ensino de vetores na universidade e no Ensino Médio[30]. A partir deste estudo a problemática de pesquisa foi definida assim como a metodologia adotada para responder às questões postas e validar as hipóteses levantadas a partir desta primeira análise.

Na segunda parte fizemos um estudo da apresentação de vetores nos livros didáticos franceses e nos programas oficiais compreendendo o período entre 1930 e 1998. A análise dos livros didáticos atuais foi detalhada, tendo por objetivo levantar características do saber a ser ensinado, centrando atenção na aparição dos diferentes registros de representação semiótica e em sua função no ensino e nos tipos de problemas propostos aos alunos devendo ser resolvidos usando vetores.

Na terceira e última parte da pesquisa desenvolvemos dois dispositivos experimentais elaborados para estudar as dificuldades dos alunos na aprendizagem da noção de vetor como objeto de estudo e como ferramenta de resolução de problemas de geometria. Um primeiro dispositivo experimental, realizado em classe de Première S e de DEUG primeiro ano, visava analisar dificuldades dos alunos em resolver problemas de geometria para os quais os vetores aparecem (no ensino) como ferramenta eficaz de resolução. Um segundo dispositivo concerne o estudo da uma seqüência didática construída com o auxílio de um ambiente informatizado : o software Cabri-géomètre II. A atenção é então centrada sobre as dificuldades dos alunos relativas à noção de vetor como representante de uma classe de equivalência. Esta experiência foi realizada no 1o ano do ensino médio francês ("Seconde").

É importante ressaltar que nos currículos brasileiros, as noções vetoriais vistas no ensino médio francês se encontram nos cursos universitários em disciplinas tais como geometria analítica e cálculo vetorial. Desse modo, os resultados de pesquisa aqui relatados podem ser aplicados ao primeiro ano do ensino universitário.

OBJETO DE ESTUDO

Uma leitura dos textos oficiais dos programas de matemática do ensino secundário francês e de cursos universitários mostra que no primeiro o vetor é um elemento geométrico, de características geométricas tendo por objetivo resolver problemas de geometria; no segundo trata-se de uma noção abstrata, pertencendo à um espaço vetorial sem nenhuma ligação com o vetor geométrico. A partir da constatação desta ruptura existente entre o ensino de vetores no nível universitário e o ensino de vetores no secundário, e da leitura de algumas pesquisas anteriores sobre dificuldades dos alunos em apreender a noção de vetor, seja como elemento geométrico (definido no secundário) seja como elemento de um espaço vetorial (introduzido na universidade), delimitamos nosso objeto de estudo. Nosso interesse era então o estudo do objeto vetor já transposto para o ensino médio e as questões centrais de pesquisa foram as seguintes :

•1 - Sob a etiqueta "vetor," que objeto é transposto para o ensino secundário?

- Que tipo de problemas são propostos aos alunos para se resolver utilizando vetores?

Que dificuldades podem ter os alunos na aprendizagem da noção de vetor como objeto e também no seu uso para resolver um problema de geometria?

•2 - Quais são os registros de representação semiótica presentes no ensino secundário relativamente a noção de vetor?

2.1 - Que função têm estes diferentes registros na resolução de problemas?

[30] Na França, diferentemente do Brasil, as primeiras noções de vetores aparecem no Ensino Médio.

2.2 - Os alunos praticam mudanças de registros?

Neste artigo discutimos as dificuldades dos alunos na formação do conceito de vetor, usando como instrumento teórico de análise a teoria dos campos conceituais :

"O objeto da teoria dos campos conceituais é fornecer um quadro para as pesquisas sobre as atividades cognitivas complexas, principalmente sobre as aprendizagens científicas e técnicas. É uma teoria psicológica do conceito, ou melhor ainda, da conceitualização do real: ela permite elencar e estudar as filiações e rupturas entre conhecimentos do ponto de vista de seu conteúdo conceitual; ela permite também analisar a relação entre conceitos como conhecimentos explícitos e os invariantes operatórios que são implícitos nas condutas do sujeito em ação assim como aprofundar a análise das relações entre significados". (Vergnaud, 1990)[31]

Assim para analisar as dificuldades dos alunos, procedemos primeiramente um estudo do saber a ensinar visando evidenciar os teoremas em ação verdadeiros que se deseja a construção pelo alunos e também os teoremas em ação falsos suscetíveis de serem construídos por eles. Em seguida fizemos uma experimentação com os alunos para estudar os teoremas em ação efetivamente construídos por eles. Esta experimentação consistiu na elaboração, com o professor responsável pela disciplina, de uma seqüência didática sobre vetores utilizando o software de geometria Cabri-géomètre, que permite um trabalho diferenciado do trabalho realizado em papel e lápis. Este software permitiu a elaboração de atividades propostas aos alunos no intuito de confrontá-los a concepções pré construídas.

A SEQÜÊNCIA DIDÁTICA

Nossa análise dos manuais escolares permitiu mostrar que a noção de vetor é introduzida de forma geométrica (um segmento de reta com direção, sentido e comprimento) tendo por objetivo resolver problemas de geometria. Este tipo de apresentação geométrica contribui para que os alunos tenham dificuldades na compreensão da noção de vetor quando é preciso se distanciar de propriedades geométricas. Por exemplo, as coordenadas de um vetor são definidas a partir de seus pontos extremidades mas independem de sua posição no plano (ou no espaço), no entanto esta apresentação ligada de maneira bastante forte à geometria pode levar os alunos a ligar o comportamento das coordenadas de um vetor ao comportamento das coordenadas de um ponto o que gera a falsa concepção de que a posição ocupada por um vetor (representante de um vetor) é importante para determinar suas coordenadas.

Em uma situação habitual tem-se por objetivo fixar a atenção sobre o uso de vetores para resolver problemas de geometria, sendo que a noção de vetor como objeto de estudo é rapidamente trabalhada. Nós pensamos que o uso de um novo instrumento no ensino pode impor um contrato (Brousseau, 1986) diferente do habitual, o que pode ser revelador das dificuldades dos alunos e também das escolhas do professor. Respeitando as instruções do programa oficial, este novo instrumento pode permitir trabalhar de maneira indireta alguns aspectos ligados à noção de vetor, como por exemplo a noção de representante. Assim escolhemos trabalhar com o software de geometria Cabri-géomètre que oferece novas possibilidades de trabalho sobre vetores. Trata-se de um software dinâmico: pode-se traçar um vetor na tela do computador e em seguida locomovê-lo observando por exemplo os efeitos de uma translação sob as coordenadas de um vetor. Assim o aluno pode perceber a relação existente entre coordenadas de um vetor e sua posição no espaço. Cabri oferece também aos alunos um meio de controle de suas ações: pode-se conjecturar em papel-lápis e em seguida verificar a validade de sua conjectura com o auxílio do software.

[31] Tradução feita pela autora deste artigo.

Para se trabalhar as concepções dos alunos, classificamos primeiramente os tipos de problemas sobre vetores que aparecem nos livros didáticos. Neste artigo resumimos estes problemas em 3 grupos de competências exigidas dos alunos :

identificar se dois vetores são iguais : tratas-se aqui de identificar vetores iguais sobre configurações dadas;

identificar, sobre uma configuração, as operações vetoriais definidas : isto significa efetuar ou identificar sobre uma configuração uma adição vetorial (pelo paralelogramo ou pela relação de Chasles) ou um produto escalar.

Saber utilizar as condições analíticas de paralelismo e de ortogonalidade : para isto é preciso saber calcular as coordenadas de um vetor a partir de seus pontos extremos e saber aplicar as condições de paralelismo e ortogonalidade sobre configurações ou ainda para resolver problemas em torno de equação de uma reta ou de duas retas dadas.

Relativamente às duas primeiras ações, o aluno deve saber, entre outras coisas, o que significa direção e sentido de um vetor e para a terceira ação trata-se da ligação entre coordenadas de um vetor e coordenadas de um vetor. Assim, utilizando cabri, elaboramos atividades onde pudéssemos estudar as concepções dos alunos relativamente a estas ações.

Exemplos de atividades trabalhadas

Nós trabalhamos com o professor para lhe sugerir questões a serem colocadas aos alunos que pudessem permitir a verificação da presença ou ausência do seguinte invariante falso, elaborado com base na análise de livros didáticos :

As coordenadas de um vetor obedecem às mesmas regras que as coordenadas de um ponto, ou seja, no primeiro quadrante um vetor tem suas coordenadas positivas, no quarto quadrante elas são negativas e assim por diante".

Como o software escolhido permite o deslocamento do objeto geométrico construído preservando suas propriedades, pedimos aos alunos que desenhassem um representante de um vetor e calculassem suas coordenadas (via o software). Em seguida pedimos que escrevessem no caderno uma previsão sobre o que aconteceria com as coordenadas desse vetor se o deslocássemos no plano (segundo uma translação). Em seguida, os alunos deveriam validar esta conjectura usando o cabri, ou seja, eles deveriam deslocar este vetor segundo uma translação e observar o efeito desse deslocamento em suas coordenadas. Os alunos puderam perceber que as coordenadas não mudavam, ou seja, independem da posição do representante do vetor no plano. Essa constatação foi feita com espanto, pois muitos previram que as coordenadas não mudariam.

Visando testar novamente a presença deste teorema em ação outra atividade foi elaborada. Pedimos primeiro aos alunos para desenhar no caderno dois vetores c[illegible] coordenadas positivas e dois vetores com as duas coordenadas negativas. Em seguida [illegible] deveria refazer o desenho desta vez utilizando Cabri, e validar sua resposta calculando as coordenadas do vetor desenhado. Desta forma o aluno escreve seu pensamento inicial e depois o valida utilizando a máquina. A realização da atividade mostrou que alguns alunos desenhavam um vetor no primeiro quadrante como tendo coordenadas positivas e depois um representante deste mesmo vetor no terceiro quadrante como tendo então coordenadas negativas. Quando perguntavam a Cabri as coordenadas de cada vetor desenhado, viam, ainda com espanto, que os dois vetores têm mesmas coordenadas.

Esta atividade mostra bem o papel de Cabri contribuindo na construção do conhecimento: o aluno ganha um meio novo (inexistente anteriormente) de validação de suas conjecturas. Não queremos dizer que o uso do software (aliado a uma análise didática da situação) tenha permitido definitivamente que o aluno compreendesse a distinção entre pontos e vetores (que releva da distinção entre propriedades afins e propriedades vetoriais); dificuldades continuaram a existir mas houve uma evolução por parte dos alunos. Novas atividades foram propostas

durante toda a seqüência sobre vetores visando retomar alguns pontos de maiores dificuldades para os alunos; foi observado que algumas falsas concepções persistiam em aparecer o que sugere uma retomada das atividades e o aprofundamento de um estudo epistemológico sobre as noções em jogo.
Podemos assim observar nesta atividade que o uso de Cabri forneceu aos alunos um meio de controle e de validação de suas hipóteses. No ambiente papel-lápis para validar suas respostas eles precisariam calcular as coordenadas dos pontos extremidades de cada vetor e em seguida calcular as coordenadas do vetor. Além do mais isto só é possível para casos particulares dos pontos extremidades: de fato, como podemos calcular exatamente as coordenadas de pontos traçados ao acaso? Assim Cabri fornece uma retroação imediata e além do mais independentemente dos pontos extremidades de cada vetor, com Cabri sempre é possível encontrar as coordenadas de um vetor qualquer desenhado na tela do computador.

CONCLUSÃO

O uso de um novo instrumento teve dois papéis importantes pesquisa : por um lado, o da pesquisa, permitiu a validação de hipóteses levantadas sobre teoremas em ação errados construídos pelos alunos o que ajudou a modelar suas dificuldades. Por outro lado, o do ensino, o caráter dinâmico de Cabri forneceu aos alunos um meio de controle de suas ações, meio este inexistente no ambiente papel-lápis.
No caso particular do uso de Cabri vimos que foi possível detectar de forma mais precisa algumas dificuldades dos alunos e em alguns casos podemos dizer que houve evolução por parte dos alunos. Não significa que conseguimos desestabilizar os teoremas em ação falsos presentes nas ações dos alunos, o que não invalida o uso de Cabri ou a forma de trabalho. A conclusão é que é preciso elaborar novas atividades que levem em consideração aspectos que não foram enfocados o bastante nessa seqüência didática, tais como a importância de um trabalho que leve em consideração simultaneamente os dois aspectos de uma noção : objeto e instrumento.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ARTIGUE, M. : Ingénierie didactique. Recherches en Didactique des Mathématiques, 1990, vol. 9, n°3, pp. 281-307.
ASTOLFI, J-P e DEVELAY, M. A Didática das Ciências, Papirus. Campinas (SP), 1992.
BELLEMAIN, F. Conception, réalisation et expérimentation d'un logiciel d'aide à l'enseignement de la géométrie : Cabri-géomètre, Tese de doutorado de Universidade, Universidade Joseph Fourier, Grenoble 1, 1992.
BITTAR, M. Les vecteurs dans l'enseignement secondaire. Une analyse des manuels en termes d'outil et d'objet. Étude de difficultés d'élèves dans deux environnements: Cabri-Géomètre et papier-crayon. Tese de doutorado de Universidade, Universidade Joseph Fourier, Grenoble 1, 1998.
BROUSSEAU, G. Fondements et Méthodes de la Didactique des Mathématiques, Recherches en didactique des mathématiques, 1986, vol. 7, no 2,pp. 33-115.
DORIER et al. L'enseignement de l'algèbre linéaire en question. Grenoble, la pensée sauvage, 1997.
DOUADY, R. Jeux de cadres et dialectique outil-objet, Recherches en Didactique de Mathématiques, 1986, vol. 7, n° 2, pp. 5-31.
DUVAL, R. Registres de représentation sémiotique et Fonctionnement cognitif de la pensée. Annales de Didactiques et de Sciences Cognitives, 1993, vol 5, IREM de Strasbourg, 37-65.