“Não tem partes iguais!”: Como professores entendem uma fração unitária

“There are no equal parts!”: How teachers understand a unit fraction English

Arthur Belford Powell[1]
Maria Alice Veiga Ferreira de Souza[2]

Resumo: Investigadores poloneses e estadunidenses identificaram em uma tarefa a falsa crença entre professores e alunos de que para um todo dividido em n partes desiguais nenhuma parte pode ser igual $\frac{1}{n}$ do todo. Essa convicção, ao lado de constatações de pesquisas sobre a falta de reconhecimento das unidades de referência pelos professores e a unitização das frações, nos levou a entender como os professores brasileiros em exercício pensam sobre a relação entre uma fração unitária e sua unidade de referência associada. Usando a mesma tarefa - A Tarefa da Moldura, realizamos um estudo por meio de entrevistas semiestruturadas com 68 professores em três estados brasileiros. A falsa crença identificada em pesquisas anteriores foi confirmada por 53 dos 68 participantes.

Palavras-chave: Unidades de referência. Números fracionários. Parte-todo. Medição. Conteúdo dos anos iniciais.

Abstract: Polish and North American researchers identified in a task the false belief among teachers and students that for a whole is divided into n unequal parts, no part can equal $\frac{1}{n}$ of it. This conviction, alongside findings about teachers' lack of recognition of reference units and the unitization of fractions, led us to understand how practicing Brazilian teachers think about the relation between a unit fraction and its associated reference unit. Using the same task — The Frame Task, we conducted a study through semistructured interviews with 68 teachers in three Brazilian states. The false belief identified in previous investigations was confirmed by 53 of the 68 participants.

Keywords: Reference unit. Fractions. Part-whole. Measuring. Elementary school content.

1 Introdução

As oportunidades de aprendizado nas aulas e, consequentemente, o conteúdo que os estudantes aprendem dependem do conhecimento que os professores mobilizam para proporcionar tarefas, questionamentos e explicações. Esses são meios com que os professores se valem para desafiar e estimular o crescimento de ideias matemáticas de seus estudantes com o que sabem conceitualmente e procedimentalmente (Agathangelou, Charalambous & Koutselini, 2016). Assim, é crucial que educadores e pesquisadores da Educação Matemática investiguem os conhecimentos matemáticos de professores futuros e atuais sobre como suas compreensões nessa área científica modelam o entendimento e desempenho dos estudantes (Charalambous, Hill, Chin & McGinn, 2020; Hill & Chin, 2018). Uma parte essencial da matemática elementar para o futuro acadêmico (Booth, Newton, Pendergast & Barbieri, 2018; Powell, Gilbert & Fuchs, 2019; Siegler, *et al.*, 2012) e econômico (Gerardi, Goette & Meier, 2013) de estudantes abrange suas compreensões conceitual e procedimental dos números racionais e, em particular, as frações. Essa categoria de objetos matemáticos se configura como um gargalo crítico de compreensão no currículo matemático do Ensino Fundamental na

[1] Rutgers University - Newark • Newark - New Jersey — United States of America • ✉ powellab@newark.rutgers.edu • **ORCID** https://orcid.org/0000-0002-6086-3698
[2] Instituto Federal do Espírito Santo • Vila Velha - ES — Brasil • ✉ alicevfs@gmail.com • **ORCID** https://orcid.org/0000-0003-2038-813X

ISSN 2764-3158

Educação Básica tanto para os aprendizes (Bailey, Hoard, Nugent & Geary, 2012; Fazio, Bailey, Thompson & Siegler, 2014) quanto para os docentes (Alqahtani, Powell, Webster & Tirnovan, 2022; Copur-Gencturk, 2021; Copur-Gencturk & Ölmez, 2022; Morano & Riccomini, 2019; Souza, 2022; Toledo, Abreu-Mendoza & Rosenberg-Lee, 2023).

Com relação aos professores dos anos iniciais, há duas noções fracionárias básicas entrelaçadas que eles podem melhorar suas compreensões conceituais: unidade de referência, u, e fração unitária, $\frac{1}{n}$ (Amaral, Rodrigues, Souza & Powell, 2023). Cada noção é definida pela outra ou é decorrente dela. Nos últimos oito anos, usando o mesmo instrumento de pesquisa, denominada Tarefa da Moldura, investigadores na Polônia e, mais tarde, nos Estados Unidos da América examinaram as crenças de aprendizes e professores, sobre como uma fração unitária resulta de uma unidade (Ciosek & Samborska, 2016; Powell, Alqahtami, Tirnovan & Temur, 2022). Nas duas pesquisas, os investigadores revelaram que a vasta maioria dos entrevistados defenderam ideias falsas sobre a relação entre uma fração unitária e a unidade de referência associada. Para atenuar as falsas crenças, os pesquisadores também apresentaram recomendações para a formação de professores. Além dos professores europeus e estadunidenses, seria importante entender como professores sul-americanos pensam sobre a relação entre uma fração unitária e a unidade de referência associada, conteúdo curricular dos anos inicias do ensino básico. Para contribuir com esse entendimento, aplicamos a Tarefa da Moldura com uma amostra de professores no Brasil.

O significado da presente pesquisa é múltiplo. Devido à importância de uma compreensão conceitual de frações para o estudo da matemática mais avançada e o papel do conhecimento de docentes na aprendizagem de seus estudantes, é indispensável que educadores da Educação Matemática saibam quais ideias falsas acerca de ideias básicas sobre números fracionários possuem professores de Matemática e professores que ensinam matemática e, a partir daí, surjam movimentos para mitigá-las.

Na sequência deste relato de pesquisa, descrevemos estudos prévios relacionados a nossa investigação, seguido de nossos fundamentos teóricos. Posteriormente, apresentamos os procedimentos metodológicos, a análise e discussão dos resultados em sintonia com a literatura existente, finalizando com nossas considerações finais.

2 Literatura relacionada

Nesta seção apresentamos estudos que estão em sintonia com nosso objetivo investigativo, ou seja, pesquisas que tenham a ver com a compreensão de professores e alunos sobre conhecimentos de frações. A iniciar pelo estudo de Souza (2022), que pesquisou se a unidade de referência de frações apoiava a análise de tarefas com números fracionários ou em suas representações. Os 121 participantes — 28 professores de Matemática, 75 pedagogos e professores de disciplinas não matemáticas, e 18 gestores educacionais — todos atuantes no ensino básico brasileiro, responderam a quatro tarefas que requeriam compreensão da unidade de medida (unidade de referência) com números ou representações fracionárias.

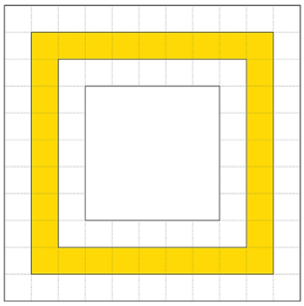
Majoritariamente, a fração unitária não funcionou como uma referência para as quatro tarefas propostas. Uma delas pedia que os participantes declarassem a fração que correspondia à parte de um todo que era um círculo. Embora círculos sejam representações tradicionais de fração em livros didáticos brasileiros (Scheffer & Powell, 2019), apenas nove dos 121 participantes responderam corretamente e identificaram a unidade de referência. O resultado foi similar com as outras três tarefas. Como ilustração, 75 participantes não demonstraram atenção na magnitude de objetos ao compararem as frações $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{3}$.

ISSN 2764-3158

Ciosek e Samborska (2016) e Powell *et al.* (2022) investigaram o conhecimento de fração por meio de um problema não típico denominado Tarefa da Moldura. Nessa tarefa, a partir da Figura 1, participantes foram convidados a responder à pergunta “A parte sombreada é $1/3$ da ‘moldura’?”. Em ambos os estudos, os participantes foram entrevistados individual e reservadamente, sendo presencialmente para Ciosek e Samborska (2016) e virtualmente para Powell *et al.* (2022).

Figura 1: Tarefa da Moldura

A parte sombreada é 1/3 da “moldura”?



Fonte: Ciosek e Samborska, (2016, p. 22, tradução livre)

A investigação de Ciosek e Samborska (2016) envolveu 174 participantes na Polônia - alunos do 4º ao 6º ano do Ensino Fundamental de três escolas ($n = 33$), alunos do Ensino Médio de dez escolas ($n = 69$), estudantes universitários de três universidades ($n = 10$), professores de Matemática em formação e em exercício de uma universidade e de oito escolas ($n = 50$) e graduados de departamentos universitários de Ciência e Tecnologia de quatro universidades ($n = 12$). O estudo de Powell *et al.* (2022) contou com 19 professores de Matemática, atuantes do 1º ao 5º ano do Ensino Fundamental estadunidense. Todos receberam a Tarefa da Moldura na qual deveriam apresentar sua solução, após a compreensão de que a moldura é toda a figura externa ao quadrado central. Em seguida, eles foram convidados a relatar ao entrevistador suas justificativas.

A intenção em ambas as pesquisas era explorar se um procedimento iterativo de desmembrar algo em n partes iguais para construção de uma fração $\frac{1}{n}$, poderia levar à falsa crença de que se um todo é dividido em n partes desiguais, nenhuma delas poderia ser $\frac{1}{n}$ de seu tamanho. Essa ideia foi confirmada nos dois estudos. Em Ciosek e Samborska (2016), embora poucos participantes tenham respondido “sim” ou “acho que sim, vou verificar”, suas justificativas não estavam corretas. Os outros 165 participantes responderam “não” ou “acho que não, vou verificar”. Na investigação de Powell *et al.* (2022), cinco professores responderam “sim” e justificaram corretamente pela contagem dos pequenos quadrados sombreados em relação à quantidade de quadrados não sombreados. Seis responderam “sim”, mas justificaram que a parte sombreada representava uma de três partes. Oito responderam “não”, porque as três partes não eram do mesmo tamanho. Em síntese, 14 de 19 professores possuíam a falsa crença de que para se ter $\frac{1}{3}$ de uma quantidade, a parte precisava ser uma de três ou uma parte não poderia ser $\frac{1}{3}$ de um todo, se esse todo fosse particionado em partes desiguais.

A confirmação da falsa crença por participantes poloneses (Ciosek & Samborska, 2016) e estadunidenses (Powell *et al.*, 2022) remeteu-nos à atenção com as unidades de referência e à unitização para ensino de frações. Esse tema também foi pesquisado por Amaral *et al.* (2023) em um estudo revisional em sete bases com amplo acervo na área de Educação e Ensino de Matemática, sem limites temporais, com propósito de conhecer noções de professores e futuros professores que ensinam matemática sobre unidade de referência e fração unitária, a partir de trabalhos científicos. O protocolo da revisão integrativa (sistemática e narrativa) contou com descritores na língua inglesa e critérios de inclusão e exclusão, de acordo com o objetivo central da investigação.

Embora inquietações da comunidade acadêmica, científica e escolar com o conhecimento conceitual de docentes sobre frações não seja recente (veja, por exemplo, Abrahão, 2016; Copur-Gencturk & Ölmez, 2022; Elias, Savioli & Ribeiro, 2017; Fernandes & Leite, 2015; Lin, Becker, Byun, Yang & Huang, 2013), a investigação de Amaral *et al.* (2023) revelou que o interesse sobre conhecimentos de professores acerca da unidade de referência ou fração unitária datam, pelo menos, dos últimos 11 anos como comunicados em nove artigos. Esses trabalhos destacaram a importância desse tema para desenvolvimento do senso numérico dos racionais e a relevância das frações unitárias para a resolução de problemas, além de apontarem limitações na concepção da unidade de referência de professores. À guisa de exemplificação, essa carência parece prejudicar como lidar com frações que possuem unidades de referências diferentes. As restrições conceituais de professores e alunos identificados por Ciosek e Samborska (2016), Powell *et al.* (2022) e Amaral *et al.* (2023) nos direcionaram à necessidade de ampliação de investigações e discussões como as trazidas neste trabalho, sobretudo no seio de formações profissionais de professores.

3 Fundamentos teóricos

Usando a Tarefa de Moldura (Ciosek & Samborska, 2016; Powell *et al.,* 2022), objetivamos entender reflexões de professores de Matemática e professores que ensinam matemática sobre a relação entre uma fração unitária e a unidade de referência associada. Para contextualizar nosso objeto de estudo, apresentamos nossas conceitualizações sobre fração, unidade de referência, fração unitária e perspectivas ontológicas sobre frações.

Defendemos que a noção de números fracionários tem duas fontes ou perspectivas ontológicas. Descrevendo a caracterização, origens e implicações das duas perspectivas, Powell (2023) explicou diferenças cognitivas e matemáticas sutis, porém significativas, entre elas. Em cada uma das duas perspectivas, uma fração, $\frac{p}{q}$ representa uma relação entre duas magnitudes, p e q, de quantidades, sendo p e q números naturais. Como os números naturais podem ser definidos como o conjunto de números inteiros não negativos $\{0,1,2,3,...\}$ ou como o conjunto de números inteiros positivos $\{1,2,3,...\}$, para nossa discussão optamos por considerar a última definição quando nos referirmos aos números naturais. O motivo de nossa opção é que, na ontologia de cada perspectiva, não seria materialmente possível que um denominador fosse igual a zero, consequentemente, não indicaremos que o denominador de uma fração seja diferente de zero.

As relações quantitativas entre as magnitudes de duas quantidades podem ser aditivas ou multiplicativas. Com respeito às frações,

> a relação é multiplicativa e comparativa entre duas quantidades p com q que são número naturais. Essa comparação multiplicativa significa que, para alguns números naturais, m e n, $n \times p = m \times q$. Portanto, $\frac{n}{m} \times p = q$ e $\frac{m}{n} \times q = p$. Assim, uma fração representa um "quociente de duas quantidades da mesma dimensão, expressas na mesma unidade" (Vergnaud, 1983, p. 162). (Powell, 2023, p. 78, nossa tradução)

Para nosso relato de pesquisa, vale a pena destacar que a última palavra que Vergnaud usou, "unidade", é curta para outras duas expressões que usamos "unidade de referência" e

ISSN 2764-3158

"unidade de medida". Resumindo, uma fração indica uma comparação multiplicativa entre duas quantidades comensuráveis do mesmo tipo e cuja unidade de medida é a mesma.

Juntamente com a ideia da unidade de referência de uma fração, existe o objeto matemático chamada fração unitária, ou seja, uma fração cujo numerador é igual a 1, como $\frac{1}{q}$, q sendo um número natural. Como Powell *et al.* (2022) expressaram,

> uma fração unitária, $\frac{1}{n}$, quantifica uma relação multiplicativa específica entre duas quantidades do mesmo tipo (por exemplo, comprimentos, áreas ou coleções). Especificamente, a relação multiplicativa é quando n iterações de uma quantidade medem a outra quantidade considerada a unidade de medição. (p. 235)

Enfim, afirmamos uma relação entre uma fração unitária e uma unidade de referência: "uma quantidade é $\frac{1}{n}$ de uma unidade se e somente se n iterações da quantidade forem iguais à unidade" (Powell *et al.*, 2022, p. 236).

Junto com essa definição de fração, existem duas perspectivas ontológicas, cujas questões históricas, filosóficas e tecnológicas caracterizam o surgimento das duas perspectivas, também é significativa a diferente relação material que as duas quantidades têm entre si (Powell, 2023). A relação material se manifesta de duas situações. Como afirma Vergnaud (1983), "ou uma quantidade é parte da outra (caso inclusivo), ou não há relação de inclusão óbvia (exclusivo)" (p. 162, nossa tradução). No caso inclusivo, há uma quantidade, q, e uma parte dela, p, de modo que temos 'p de q'. Em contraste, no caso exclusivo, há duas quantidades distintas, p e q, que não têm relação de inclusão, portanto, temos 'p para q'. Nos dois casos, q é a unidade de referência.

Os casos inclusivo e exclusivo de Vergnaud (1983) refletem o que está nos materiais curriculares de escolas. A Figura 2 abaixo mostra os dois casos, Modelo I e II, respectivamente. O Modelo I apresenta dois gráficos familiares usados para introduzir frações: uma área no Exemplo A e uma reta numérica no Exemplo B. O Exemplo A mostra um retângulo repartido em sete retângulos menores com dois sombreados, mostrando $\frac{2}{7}$ da área original. No Exemplo B, em uma reta numérica, um ponto verde é distinguido no meio do caminho entre duas marcas de escala. Como as três marcas de escala equiparam o comprimento entre 0 e 1, elas representam as frações $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{4}$ e $\frac{3}{4}$; então, o ponto verde está a $\frac{7}{8}$ da distância do zero (Powell, 2023).

Figura 2: Modelos ilustrando os casos inclusivos e exclusivos

Modelo I	Modelo II
Dois exemplos do caso inclusivo para ilustrar frações	Dois exemplos do caso exclusivo para ilustrar frações

Fonte: Powell (2023, pp. 79 e 80)

A Figura 2 contém dois exemplos do caso exclusivo de representação de frações. Os gráficos nos exemplos do Modelo II empregam uma representação bidimensional das barras de Cuisenaire (veja Figura 3).

Figura 3: As diferentes barras de Cuisenaire

Fonte: Acervo dos autores

Um conjunto de barras de Cuisenaire é constituído por dez paralelepípedos retangulares ou cuboides de tamanhos diferentes; o comprimento de cada um é um múltiplo do menor — um cubo de um centímetro. Cada tamanho é colorido de forma única, do menor para o maior: branco, vermelho, verde, roxo, amarelo, verde escuro, preto, marrom, azul e laranja. No Modelo II, o comprimento das barras azul, roxa, verde escura e laranja é respectivamente igual a 9, 4, 6 e 10 centímetros (veja a Figura 3 acima). O Exemplo C representa a fração $\frac{9}{4}$ ou $\frac{4}{9}$, dependendo de qual barra é considerada a unidade de referência ou medida. Da mesma forma, novamente em relação a qual barra é designada como unidade de medida, o Exemplo D mostra as frações $\frac{6}{10}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{10}{6}$ ou $\frac{5}{3}$ (Powell, 2023).

Refletindo sobre os movimentos cognitivos e matemáticos envolvidos quando pensamos sobre frações por meio de cada um dos Modelos I e II, na Tabela 1 abaixo, podemos enumerar diferenças.

Tabela 1: Características cognitivas e matemáticas de duas perspectivas do conhecimento de frações

Modelo I **Partição**	**Modelo II** **Medição**
1. Uma quantidade ou um todo equiparticionado, discretizado 2. Uma unidade é implícita e predeterminada ou "preordenada" 3. Requer contagem 4. A fração unitária também é predeterminada 5. Uma fração denota contagens de entidades discretas: número de partes destacadas em relação ao número total de partes.	1. Duas quantidades contínuas distintas 2. Uma quantidade é a unidade explícita 3. Precisa estimar ou medir 4. Uma fração unitária tem de ser determinada 5. Uma fração expressa uma relação multiplicativa: uma quantidade medida por uma outra quantidade do mesmo tipo.

Fonte: Powell (2023, p. 80, tradução nossa)

Na Tabela 1, Powell (2023), e em outras publicações (por exemplo, Powell, 2019), rotula o Modelo I e II como a perspectiva de partição e perspectiva de medição, respectivamente. Referindo-se à Tabela 1, ele descreve as diferenças entre os movimentos cognitivos e matemáticos em cada modelo assim:

> O Modelo I revela cinco atributos cognitivos e matemáticos. Primeiro, seja como uma área, uma reta numérica ou um conjunto, a representação é uma quantidade equiparticionada, discretizada. Segundo, como tal, ela requer ou convida à contagem

ISSN 2764-3158

> de objetos discretos. Terceiro, da perspectiva do aluno, o todo ou a unidade é implícito e predeterminado. Quarto, devido à característica anterior, a fração unitária, cujo numerador é igual a 1, também é predeterminada. Por fim, uma fração é uma quantidade que denota contagens de entidades discretas, o número de partes destacados — área sombreada, marcas em uma reta numérica ou objetos de uma coleção — em relação ao número total de partes. […]
> Paralelamente ao modelo anterior, o Modelo II inclui cinco atributos. Primeiro, a representação contém dois objetos com uma quantidade comum, como comprimento (ou até mesmo área, volume ou peso). Segundo, a quantidade de um objeto é considerada a unidade de medida e usada para comparar a quantidade do outro objeto de forma multiplicativa. Em terceiro lugar, a comparação dos dois objetos de forma multiplicativa exige a estimativa ou a medição. Em quarto lugar, a medição requer a decisão de qual será a fração unitária e sua iteração para determinar a medida do objeto que não é a unidade de medida. Por fim, uma fração expressa uma relação, uma comparação multiplicativa entre duas quantidades do mesmo tipo. (Powell, 2023, p. 80, nossa tradução)

Com base nessa análise, é crítico salientar um contraste fundamental entre os modelos sobre os dois atributos: a unidade de referência e, por consequência, a fração unitária. Na perspectiva de partição, a quantidade discretizada significa que aqueles dois atributos são dados. Em contrapartida, na perspectiva de medição as duas quantidades contínuas indicam que qualquer uma pode ser a unidade de referência e, uma subunidade das duas quantidades se torna a fração unitária. Ou seja, o que vem a ser a unidade de referência e a fração unitária são escolhas a serem feitas. Então, a última perspectiva requer atenção mental e envolvimento cognitivo.

Além da diferença de raciocínios entre as perspectivas de conhecimento fracionário, existe um outro problema essencial na perspectiva de partição que é bem documentado na literatura em Educação Matemática (veja, por exemplo, Campos & Rodrigues, 2007; Mack, 1990; Tzur, 1999). Quando as relações parte-todo são representadas pictoricamente, dada uma unidade de referência — uma figura geométrica ou uma coleção — nenhuma fração pode exceder a magnitude da representação. Claro, em um escopo mais amplo, $\frac{p}{q}$ pode assumir qualquer magnitude.

A seguir, apresentamos os procedimentos que usamos para produzir e analisar nossos dados, cujos entendimentos são influenciados pelas ideias de fração, unidade de referência, fração unitária e perspectivas ontológicas sobre frações que acabamos de abordar.

4 Procedimentos Metodológicos

A estratégia de pesquisa é qualitativa, envolvendo entrevistas semiestruturadas (Creswell & Creswell, 2021) com foco em uma tarefa matemática com futuros e atuais professores brasileiros. Especificamente, o objetivo da pesquisa visou a entender como os participantes pensam a relação entre uma fração unitária e a unidade de referência associada, e para atingir o objetivo, uma equipe de pesquisadores aplicou a Tarefa da Moldura.

A equipe de pesquisadores foi composta por sete professores que atuam, em um nível ou outro, em Educação Matemática, e além dos dois autores deste trabalho, os outros consistem em Poliana F. C. Rodrigues (Instituto Federal Fluminense), Camila A. do N. Amaral (Secretaria de Educação do Estado do Espírito Santo), Marcelene A. Duarte (Secretaria Municipal de Anchieta-ES), Severiano Machado Neto (Secretaria Municipal de Guarapari-ES) e Filipe A. P. dos Santos (Serviço Social da Indústria-SP). Essa equipe se reunia semanalmente por videoconferência para discutir a literatura sobre o tópico da pesquisa e planejar as ações, como recrutamento e, acima de tudo, ensaiar o protocolo de entrevista e outros procedimentos para capturar e analisar os dados. Dos pesquisadores, três conduziram as entrevistas e os outros foram responsáveis pelo recrutamento, agendamento e documentação da concordância espontânea dos entrevistados[3]. Inicialmente, um par de pesquisadores codificou a produção de dados emersa das conferências em uma planilha eletrônica. Logo após, outro par realizou uma revisão da codificação. A divergência em alguma interpretação era debatida pelo par até o consenso.

Recrutamos participantes de três estados brasileiros que trabalhavam em instituições brasileiras de ensino onde um membro da equipe de pesquisadores tinha contato profissional. Portanto, é uma amostra de conveniência. Ao final, a amostra incluiu 68 professores, divididos entre 37 professores pedagogos (PP), 20 professores de Matemática (PM) e 11 professores com outras graduações (PG), mas que atuavam de modo interdisciplinar com os professores que ensinam matemática na mesma instituição de ensino. Cada professor recebeu um único número de identificação de participante (NIP) com dois dígitos, precedido de duas letras que indicam sua graduação — PP, PM e PG, visando ao anonimato ético necessário.

Semelhantemente à investigação de Powell *et al.* (2022), as entrevistas ocorreram individualmente e reservadamente, com duração média de 14 minutos e foram gravadas por videoconferência (no ambiente Zoom) entre os meses de novembro de 2023 e abril de 2024, com o seguinte protocolo: em horário agendado, um entrevistador aguardava remotamente que outro membro da equipe de pesquisadores posicionasse, presencialmente no computador, um a um participante a ser entrevistado, se ausentando logo depois do local. No início, para estreitar o relacionamento, o entrevistador investiu alguns minutos conversando sobre a vida profissional do entrevistado. Logo após, se assegurava do conhecimento do participante sobre manuseio da ferramenta de anotações do Zoom, caso desejasse usá-la durante sua resolução da tarefa. Além disso, ele se assegurava da compreensão pelo participante do que estava sendo considerado como moldura na figura.

Na sequência, com a Tarefa da Moldura vista nas telas dos computadores do entrevistador e entrevistado, o entrevistador solicitava ao participante a leitura em voz alta da pergunta — "A parte sombreada é 1/3 da moldura?" — e a sua resposta e justificativa: Se a resposta fosse "sim" seguida de justificativa correta, o entrevistador requisitava uma explicação alternativa. Se a resposta fosse "sim" ou "não", seguida de uma argumentação incorreta, o pesquisador buscava compreender as razões para aquela alegação. Diante da incorreção, o entrevistador apresentava uma das três seguintes situações monetárias visando ao estabelecimento de uma conexão desta com a situação visual da Tarefa da Moldura:

- Suponha que 90 reais são repartidos em 15 reais, 30 reais e 45 reais. Algum desses valores é um terço de 90 reais?
- Suponha que 90 reais são repartidos em 25 reais, 25 reais e 40 reais. Algum desses valores é um terço de 90 reais?
- Suponha que 90 reais são repartidos em 5 reais, 10 reais, 30 reais e 45 reais. Algum desses valores é um terço de 90 reais?

A primeira situação era apresentada pelo entrevistador quando a justificativa dada, por exemplo, era de que a parte sombreada não era um terço da moldura porque a moldura estava repartida em três partes de tamanhos diferentes e, desse modo, não seria possível realizar a identificação de uma fração. A segunda era apresentada, como um contraexemplo, nos casos em que a justificativa considerava que a parte sombreada era um terço da moldura apenas pelo fato de ela representar uma de três partes. Finalmente, a terceira só foi apresentada depois da

[3] Parecer Consubstanciado do Comitê de Ética em Pesquisa - CAAE 68847523.2.0000.5072, em 05/06/2023.

primeira quando o entrevistador suspeitava de a resposta estar baseada apenas em três partições.

Após nova reflexão do participante, ele era convidado a retornar à Tarefa da Moldura, podendo alterar sua resposta e justificativas iniciais, se desejasse. A entrevista continuou acerca de estímulos do entrevistador e reflexões dos participantes até que a conferência fosse encerrada após os agradecimentos. Finalmente, como provavelmente alguns colegas do entrevistado ainda iriam participar da entrevista, para não os influenciar, o entrevistador solicitou sigilo sobre a tarefa.

No total, produzimos dois tipos de dados. Os dados primários produzidos pelos entrevistados foram registrados nas gravações das videoconferências. Para analisá-los, usamos *directed content analysis*[4] (Hsieh & Shannon, 2005), aproveitando os códigos de duas fontes na literatura (Ciosek & Samborska, 2016; Powell *et al.*, 2022), e ajustando para alinhamento com a realidade de nossas entrevistas. Usando os códigos, construímos dados derivados, registrados em uma planilha eletrônica na qual determinada coluna representava um código que foi catalogado a partir das entrevistas. Então, cada linha da planilha se constituiu como nosso sumário analítico de cada entrevista. Por fim, codificamos indutivamente para rotular as diferentes justificativas que os participantes ofereceram (consulte a Tabela 2 na próxima seção).

Em suma, a equipe de pesquisadores buscou captar (1) como os participantes responderam espontaneamente à pergunta da tarefa; (2) como eles justificaram suas respostas; (3) se eles verificaram suas respostas espontaneamente ou apenas quando solicitados pelo entrevistador; (4) como verificaram a exatidão de suas respostas; e (5) se mudaram suas respostas quando responderam equivocadamente, depois da oferta da situação monetária que desafiou suas respostas. A captação desses itens foi registrada na planilha eletrônica pelos membros da equipe que não se revestiram como entrevistadores. A planilha contém outras informações essenciais da entrevista, conforme os códigos, ou seja, resposta e justificativa iniciais do participante, as intervenções do(a) entrevistador(a), as reflexões, entre outros aspectos.

A seguir, apresentamos os resultados de nossa análise dos dados seguida da reflexão sobre eles à luz da literatura.

5 Resultados

O objetivo de nossa investigação é compreender como pensam professores em exercício sobre a relação entre uma fração unitária e a unidade de referência associada. Para atingir esse objetivo, por meio de entrevistas, solicitamos aos professores atuantes que decidissem se a parte sombreada de uma moldura composta por três partes quadradas era um terço da moldura (veja Figura 1). Realizamos nossa análise qualitativa das entrevistas com 68 participantes e com ênfase nas respostas à pergunta da tarefa e suas respectivas justificativas. Com base nessa parte das entrevistas, apresentamos os resultados de nossa análise na Tabela 2.

A Tabela 2 tem quatro colunas. A primeira coluna indica uma das três categorias que caracterizam as respostas dadas pelos participantes: (a) "sim" inicialmente ou depois de uma verificação, (b) "não" no início ou após verificação e (c) "não sabe explicar" para indicar quando não sabiam como resolver ou não deram uma explicação matematicamente de forma coerente. A segunda coluna contém trechos de diferentes discursos proferidos como justificativa para as respostas. Então, cada linha das duas primeiras colunas consiste em exemplos de diferentes trechos de respostas completas à Tarefa da Moldura.

[4] Talvez, a tradução para língua portuguesa seja "análise direcionada de conteúdo".

A terceira coluna da Tabela 2 apresenta o número total de entrevistados que responderam como o exemplo dado na linha. Finalmente, a quarta coluna indica o código que atribuímos ao exemplo e às outras justificativas similares a ele. Se a justificativa fosse *incorreta*, indicamos o respectivo código em itálico. Como já dissemos, a sua contagem pode ser encontrada na terceira coluna.

Tabela 2: Trechos de respostas completas, totais e porcentagens e códigos indutivos de justificativa

Trechos de Respostas Completas		Totais (Porcentagens)	Códigos Indutivos de Justificativas Corretas e *Incorretas*
Respostas	Trechos de Justificativas Associadas		
SIM	(1) “Eu calculei quantos quadradinhos tinham cada área, né, a área mais externa, a área interna, somei e o da área sombreada contei e comparei, né, calculei. Aparentemente, parece que não, mas, é sim”. (PM10)	4 (5,88)	A razão entre o número de quadradinhos da parte sombreada e o total de quadradinhos da moldura é de trinta e dois em noventa e seis ou um terço.
	(2) “um, dois, três, …, onze [contando os quadradinhos da parte branca superior]; um, dois, três, …, sete [contando os quadradinhos brancos da parte interna inferior]; Dezoito. [11+7]; um, dois, três, …, nove [contando os quadradinhos amarelos; [...] É sim, é um terço da moldura por conta da quantidade que os de cima, mais os de baixo, dá [dão] o dobro desse daqui. [$11 + 7 = 2 \times 9$]”. (PG09)	2 (2,94)	Na moldura, a soma dos quadradinhos das partes não-sombreadas é o dobro da parte sombreada.
	(3) “Eu analisei [...] quantas linhas e quantas colunas tinham no quadrado [da moldura]. Na moldura externa, … e na moldura mais interna. A externa [...] tem onze e na mais interna tem sete, e aí, dariam dezoito. E [é] exatamente o que tem a do meio ali [a parte sombreada], ela tem também nove. Então, os nove [...] mais dezoito, [que são] vinte e sete, que é um terço [...] do total”. (PG10)	1 (1,47)	Com base na simetria do quadrado, a razão entre um lado sombreado e os dois lados não-sombreados da moldura.
	(4) “Por fora tem quarenta quadradinhos, no amarelo são trinta e dois e no branco, mais próximo ao quadrado, são vinte e quatro, total de noventa e seis, dividido por três, trinta e dois. Então, como o amarelo é trinta e dois, [...] é um terço da moldura.” (PP32)	8 (11,76)	O total de quadradinhos divididos por três coincide com a quantidade de quadradinhos na parte sombreada.
	(5) “É um terço aqui, pois são três partes, né, um, dois são três partes da moldura, né, então, daria um terço”. (PM01)	24 (35,29)	*A parte sombreada é um terço da moldura sendo uma de três partes.*
NÃO	(1) “Eu acho que não é … porque a moldura não tem partes iguais para eu fazer um comparativo de um terço”. (PP34)	13 (19,13)	*As três partes da moldura não são iguais em área*
	(2) “é meio. … Porque eu vejo que está entre uma parte e outra parte, está no meio das duas”. (PP20)	3 (4,41)	*A parte sombreada é a metade por estar no meio das outras partes.*

ISSN 2764-3158

	(3) "A parte maior da moldura como sendo [...] um quadrado [...] daria cento e vinte e um quadrados menores […]. A parte sombreada, então aqui […] tem trinta e dois, então ela não representa um terço da figura, não". (PM17)	2 (2,94)	*A área da parte sombreada, que é de trinta e dois quadradinhos, não é igual a um terço de toda a moldura (a unidade), que é de cento e vinte e um quadradinhos.*
Não sabe explicar	Vou ser bem objetiva, matemática não é o meu forte. Então, [...] eu falaria que seria um terço da moldura. Mas hoje, agora, não sei fazer esse cálculo". (PP16) "não saberei te explicar, no caso, seria [...] uma visão minha". (PP22)	11 (16,18)	*Matematicamente inconsistente.*
	Total	68 (100)	

Fonte: Dados da pesquisa

Na próxima seção, interpretamos nossos resultados, que se encontram resumidos na Tabela 2 acima, e em seguida, na última seção, apresentamos as considerações finais.

6 Discussão

Considerando as três categorias de respostas — sim, não e não sabe explicar — aplicamos 5, 3 e 1 códigos, respectivamente. Para a última categoria, aplicamos o rótulo matematicamente inconsistente para as argumentações que faltaram uma explicação matemática ou cuja explicação apresentou uma desorganização de conceitos matemáticos como a deste participante:

> não daria os trinta por cento ainda [se referiu ao fato de a parte amarela não ter alcançado trinta por cento do todo]. [...] no caso aí, a moldura seria essa, essa [parte] amarela seria metade, né? […] Entre a parte amarela seria metade da moldura, né? Seria, né? Se a gente fosse ver, então seria cinquenta por cento, né. (PM09)

Nesse trecho, o participante PM09 usou uma combinação das ideias de porcentagem e frações sem coerência matemática, exceto que ambas são representações de números racionais. Dos 68 participantes, rotulamos 11 justificativas com o mesmo código de PM09.

Subindo na Tabela 2, a próxima categoria de respostas é de professores que responderam e justificaram que a parte sombreada da moldura não é um terço dela. Embora no início da entrevista tenham concordado com o entrevistador sobre o que consideraram como moldura, ou seja, a unidade de referência, alguns participantes, como PM17, calcularam a unidade para ter uma área igual a 121 quadradinhos em vez de 96 e concluíram que a parte sombreada, igual a 32 quadradinhos, não era um terço da moldura. Ainda outros participantes, por exemple, PP20, talvez com base na posição física da parte sombreada da figura situada entre duas outras partes não sombreadas, defenderam que ela não se tratava de um terço, mas de metade, revelando uma conceitualização deficiente da forma como uma fração unitária herdou o seu valor numérico ou de estar proporcionalmente relacionada com a sua unidade de referência.

Continuando a subir na Tabela 2, nas duas categorias de respostas seguintes — NÃO (1) e SIM (5) — estão profundamente relacionadas. Elas emergiram de uma conceitualização equivocada (ou ruim) da relação entre a unidade de referência e uma fração unitária que, devido à sua omnipresença nos manuais escolares (Scheffer & Powell, 2019) e, por consequência, na instrução, provieram muito provavelmente da perspectiva de partição (ou parte/todo). Nessa perspectiva, temos esta afirmação: se uma unidade de referência for dividida em n partes iguais, uma parte é $\frac{1}{n}$ da unidade. Tal como discutimos na seção sobre fundamentos teóricos, uma vez que, na perspectiva da partição, a unidade é dada e os alunos raramente têm de pensar em identificá-la (veja Tabela 1), podem concluir incorretamente pelo inverso da afirmação: se uma parte de uma unidade é $\frac{1}{n}$ da mesma, então a unidade está dividida em n partes iguais (Ciosek & Samborska, 2016).

Além disso, por meio da perspectiva de partição, como, pelo menos, 37 professores de nossa investigação, aprendizes podem acreditar em versões destas duas afirmações falsas: (a) se uma unidade de referência é dividida em n partes, uma parte é $\frac{1}{n}$ da unidade; (b) se uma unidade de referência é dividida em n partes desiguais, uma não pode ser igual a $\frac{1}{n}$ da unidade (Ciosek & Samborska, 2016).

A primeira versão das duas afirmações acima é a justificativa dada por "sim", por exemplo, pelo participante PM01. Também, outros 23 dos 68 participantes raciocinaram da mesma maneira. Além disso, a segunda versão acima é a justificativa dada por "não" que o participante PP34 e outros 12 entrevistados defenderam.

Na Tabela 2, nossos outros quatro códigos rotularam em justificativas diferenciadas e corretas e 15 dos 68 professores entrevistados estão distribuídos entre essas categorias. Embora sejam diferentes, cada justificativa envolveu uma contagem de quadradinhos sombreados e não sombreados para chegar a uma conclusão. Devido à limitação de espaço, destacaremos apenas o raciocínio matemático de duas das quatro categorias de justificativas corretas. Essas categorias são novas, pois não apareceram na literatura sobre a Tarefa da Moldura, nem em Ciosek e Samborska (2016), nem em Powell *et al.* (2022).

Nosso terceiro código se refere a uma justificativa que não só usou contagem, mas também reconheceu e utilizou uma propriedade geométrica da moldura. Na Figura 1, a figura geométrica da moldura é um quadrado de 11x11 quadradinhos faltando no meio dele um quadrado de 5x5 quadradinhos, resultando em uma área entre dois quadrados concêntricos e, por consequência, simétricos. Sendo simétricos, a quantidade de quadradinhos em cada lado da moldura é a mesma. Com base na simetria da moldura, o participante PG10 raciocinou que a razão entre um lado sombreado e os dois lados não-sombreados era de 9 em 27 e concluiu que a parte sombreada da moldura era de um terço. Implicitamente, esse participante estabeleceu uma relação para uma unidade de referência considerando apenas um dos lados da moldura e, em seguida, tornando-a verdadeira para os outros lados.

Além de PG10, outro professor também utilizou essa percepção sobre a simetria da moldura, mas adicionalmente, empregou uma relação que existe entre uma fração unitária e outras frações que com ela somam a unidade de referência, ou seja, a um. Na sua entrevista, um professor argumentou assim:

> um, dois, três, …, onze [contando os quadradinhos da parte superior]; um, dois, três, …, sete [contando os quadradinhos da parte inferior]; Dezoito. [11+7]; um, dois, três, …, nove [contando os quadradinhos amarelos]; [...] É sim, é um terço da moldura por conta da quantidade que os de cima, mais os de baixo, dá [dão] o dobro desse daqui [$11 + 7 = 2 \times 9$]. (PG09)

Especificamente, o participante, PG09 raciocinou que, em um lado da moldura, a soma dos quadradinhos das partes não-sombreadas era o dobro da parte sombreada e, então, a parte

ISSN 2764-3158

sombreada era um terço da moldura. Simbolicamente, se x e z são os valores das áreas das partes externas e y é da parte interna (a parte sombreada), então, $x + z = 2y \Leftrightarrow y = \frac{1}{3}(x + y + z)$.

A resposta de PG09 refletiu um entendimento relacional das frações. Esse entendimento se apoiou no fato de uma fração não-unitária ser múltipla de uma fração unitária. Então, y é um terço da área da moldura ou a metade da soma das áreas das partes externas, $x + z$; ou a soma das partes externas, são iguais a duas vezes a área da parte interna, y. Essa percepção pode ser generalizada para uma fração unitária, $\frac{1}{n}$.

7 Considerações finais

Por meio desse estudo, investigamos como pensam alguns professores em exercício sobre a relação entre uma fração unitária e a unidade de referência associada. Encontramos em três tipos de respostas na Tarefa de Moldura nove diferentes códigos representando como nossa amostra de 68 professores em três estados do Brasil raciocinaram sobre aquela tarefa. Além das duas categorias de justificativas corretas — (2) e (3) (veja na Tabela 2) — que não foram antes documentadas na literatura, encontramos uma nova categoria de respostas para professores atuantes que é o código “matematicamente inconsistente”. Diferentemente das duas pesquisas anteriores com a Tarefa de Moldura — Ciosek & Samborska, 2016; Powell *et al.*, 2022 —, nossa amostra contou com professores pedagogos, matemáticos e de outras licenciaturas, mas atuantes em conjunto com algum dos dois primeiros em projetos interdisciplinares, que pouco ou nada entenderam da matemática subjacente à tarefa ou falharam no modo de se expressar de forma matematicamente consistente. Nesses casos, durante as entrevistas, os entrevistadores tinham de explicar a matéria matemática para que os entrevistados daquela categoria pudessem entender a natureza da tarefa.

Embora ter de explicar a matemática para professores seja preocupante, ele informa aos educadores de matemática sobre qual base conceitual as frações precisam ser trabalhadas. Ainda mais, ele chama a atenção para a necessidade de aprimoramento nos programas e cursos de formação de futuros e atuais professores, particularmente sobre conceitos de números fracionários. Nesses movimentos de formação, é essencial incluir discussões não apenas sob a perspectiva da partição (parte/todo), mas também da medição. Essa última perspectiva informa uma relação entre uma fração unitária e uma unidade de referência do seguinte modo: “uma quantidade é $\frac{1}{n}$ de uma unidade se e somente se n iterações da quantidade forem iguais à unidade” (Powell *et al.*, 2022, p. 236). Seria importante pesquisar como esse entendimento mitiga concepções lógicas incorretas como as que observamos entre professores de nossa amostra.

Uma vez que os professores desempenham um papel significativo no ensino e na aprendizagem de determinado conceito, é importante que eles tenham um conhecimento profundo dos conceitos básicos que ensinam. Estudar o conhecimento dos professores para o ensino das frações é, de fato, importante, uma vez que a natureza do tópico é complexa para aprender e ensinar.

Agradecimentos

Agradecemos à equipe de pesquisadores e aos professores entrevistados o desenvolvimento desta investigação, bem como o auxílio financeiro da Fundação de Amparo à Pesquisa e Inovação do Espírito Santo à segunda autora. Do mesmo modo, ao Instituto Federal do Espírito Santo e à Rutgers University – Newark pelo pós-doutoramento da segunda autora.

Referências

Abrahão, A. M. C. (2016). Frações e decimais: Compreender para ensinar números racionais. *Perspectiva da Educação Matemática, 9*(21), 680-701.

Agathangelou, S. A.; Charalambous, C. Y. & Koutselini, M. (2016). Reconsidering the contribution of teacher knowledge to student learning: Linear or curvilinear effects? *Teaching and Teacher Education, 57*, 125-138.

Alqahtani, M. M., Powell, A. B., Webster, V. & Tirnovan, D. (2022). How a measuring perspective influences pre-service teachers' reasoning about fractions with discrete and continuous models. *International Electronic Journal of Elementary Education, 14*(3), 441-458.

Amaral, C. A. d. N., Rodrigues, P. F. C., Souza, A. M. & Powell, A. B. (2023). Unidades de referência e frações unitárias em tarefas Matemáticas: Uma revisão sistemática de literatura. *Perspectivas da Educação Matemática, 16*(42), 1-24. Bailey, D. H.; Hoard, M. K.; Nugent, L. & Geary, D. C. (2012). Competence with fractions predicts gains in mathematics achievement. *Journal of Experimental Child Psychology, 113*(3), 447-455.

Booth, J. L.; Newton, K. J.; Pendergast, L. H. & Barbieri, C. (2018). Opening the door to algebra: The role of fraction knowledge in algebra learning. In *ICLS 2018 Proceedings* (pp. 1581-1582).

Campos, T. M. M. & Rodrigues, W. R. (2007). A idéia de unidade na construção do conceito do número racional. *REVEMAT - Revista Eletrônica de Educação Matemática, 2*(4), 68-93.

Charalambous, C. Y.; Hill, H. C.; Chin, M. J. & McGinn, D. (2020). Mathematical content knowledge and knowledge for teaching: exploring their distinguishability and contribution to student learning. *Journal of Mathematics Teacher Education, 23*(6), 579-613.

Ciosek, M. & Samborska, M. (2016). A false belief about fractions – What is its source? *The Journal of Mathematical Behavior, 42*, 20-32.

Copur-Gencturk, Y. (2021). Teachers' conceptual understanding of fraction operations: Results from a national sample of elementary school teachers. *Educational Studies in Mathematics, 107*, 525-545.

Copur-Gencturk, Y. & Ölmez, I. B. (2022). Teachers' attention to and flexibility with referent units. *International Journal of Science and Mathematics Education, 20*(6), 1123-1139.

Creswell, J. W. & Creswell, J. D. (2021). *Projeto de pesquisa: Métodos qualitativo, quantitativo e misto* (S. M. M. d. Rosa, Trans.; 5° ed.). Porto Alegre, RS, Penso.

Elias, H. R.; Savioli, A. M. P. D. & Ribeiro, A. J. (2017). Números racionais e estrutura algébrica corpo: problematizando o currículo da formação inicial de professores de Matemática. *Educação Matemática Pesquisa, 19*(3), 182-208.

Fazio, L. K.; Bailey, D. H.; Thompson, C. A. & Siegler, R. S. (2014). Relations of different types of numerical magnitude representations to each other and to mathematics achievement. *Journal of Experimental Child Psychology, 123*, 53-72.

Fernandes, J. A. & Leite, L. (2015). Compreensão do conceito de razão por futuros educadores e professores dos primeiros anos de escolaridade. *Bolema, 29*(51), 241-262.

Gerardi, K.; Goette, L. & Meier, S. (2013). Numerical ability predicts mortgage default. *Proceedings of the National Academy of Sciences, 110*(28), 11267-11271.

ISSN 2764-3158

Hill, H. C. & Chin, M. (2018). Connections between teachers' knowledge of students, instruction, and achievement outcomes. *American Educational Research Journal, 55*(5), 1079-1112.

Hsieh, H.-F. & Shannon, S. F. (2005). Three approaches to qualitative content analysis. *Qualitative Health Research, 15*(9), 1277-1288.

Lin, C.-Y.; Becker, J.; Byun, M.-R.; Yang, D.-C. & Huang, T.-W. (2013, 01/01/). Preservice teachers' conceptual and procedural knowledge of fraction operations: A comparative study of the United States and Taiwan. *School Science and Mathematics, 113*(1), 41-51.

Mack, N. K. (1990). Learning fractions with understanding: Building on informal knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education, 21*(1), 16-32.

Morano, S. & Riccomini, P. J. (2019). Demonstrating conceptual understanding of fraction arithmetic: An analysis of pre-service special and general educators' visual representations. *Teacher Education and Special Education*.

Powell, A. B. (2019). Como uma fração recebe seu nome? *Revista Brasileira de Educação em Ciências e Educação Matemática, 3*(3), 700-713.

Powell, A. B. (2023). Two perspectives of fraction knowledge: characterization, origins and implications. *Caminhos da Educação Matemática em Revista, 13*(1), 76-92.

Powell, A. B., Alqahtani, M. M., Tirnovan, D. & Temur, Ö. D. (2022). 'One of three parts, but they are unequal': Elementary school teachers' understanding of unit fractions. *Boletim Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática (GEPEM)*(80), 231-248.

Powell, S. R., Gilbert, J. K. & Fuchs, L. S. (2019). Variables influencing algebra performance: Understanding rational numbers is essential. *Learning and Individual Differences, 74*, 101758.

Scheffer, N. F. & Powell, A. B. (2019). Frações nos livros brasileiros do Programa Nacional do Livro Didático (PNLD). *Revemop, 1*(3), 476-503.

Siegler, R. S.; Duncan, G. J.; Davis-Kean, P. E.; Duckworth, K.; Claessens, A.; Engel, M.; Susperreguy, M. I. & Chen, M. (2012). Early Predictors of High School Mathematics Achievement. *Psychological Science, 23*(7), 691-697.

Souza, M. A. V. F. d. (2022). Fração: Conceito e aplicação da unidade de medida por professores e futuros professores. *Boletim Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática (GEPEM)*.

Toledo, R. V. F.; Abreu-Mendoza, R. & Rosenberg-Lee, M. (2023). Brazilian math teacher's magnitude representation and strategy use in fraction comparison: A mixed methods study. *Caminhos da Educação Matemática em Revista, 13*(1), 97 – 121.

Tzur, R. (1999). An integrated study of children's construction of improper fractions and the teacher's role in promoting that learning. *Journal for Research in Mathematics Education, 30*(4), 390-416.

Vergnaud, G. (1983). Multiplicative structures. In R. Lesh & M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes* (pp. 127-174). New York, NY, Academic.

ISSN 2764-3158