

## De ingressantes a concluintes/recém-egressos de cursos de licenciatura em Matemática: uma análise sobre as argumentações de uma questão algébrica

### From freshmen to graduates/recent graduates of undergraduate courses in Mathematics: an analysis of the arguments to an algebraic question

João Carlos Caldato<sup>1</sup>  
Lilian Nasser<sup>2</sup>

**Resumo:** Este texto trata de um recorte de uma pesquisa sobre argumentação, prova e demonstração, desenvolvida em duas etapas. Na primeira, os participantes eram ingressantes em cursos de licenciatura em Matemática, que responderam a um questionário. Na segunda, foram realizadas entrevistas com 14 desses participantes, que agora são concluintes/recém-egressos dos cursos. Em vista disso, o objetivo deste texto é analisar e relacionar as argumentações de uma questão algébrica, ao comparar as respostas apresentadas em cada uma das etapas. Os modelos teóricos adotados foram a tipologia de provas e os esquemas de prova. Os resultados indicam que, apesar de os participantes perceberem a limitação das provas pragmáticas, houve pouco progresso na direção de construir provas conceituais.

**Palavras-chave:** Argumentação e prova. Raciocínio dedutivo. Formação inicial de professores.

**Abstract:** This text is an excerpt from a research on argumentation, proof and demonstration, developed in two stages. In the first stage, participants were starting undergraduate Mathematics courses, who responded to a questionnaire. In the second stage, interviews were carried out with 14 of these participants, who are now completers/recent graduates of the courses. In view of this, the objective of this text is to analyze and relate the argumentations to an algebraic question, by comparing the answers presented in each of the stages. The theoretical models adopted were the proof typology and proof schemes. The results indicate that, although participants perceived the limitations of pragmatic proofs, there was little progress towards constructing conceptual proofs.

**Keywords:** Argumentation and proof. Deductive reasoning. Initial teacher training.

## 1 Introdução

Este texto apresenta um recorte de uma pesquisa sobre concepções de (futuros) professores de Matemática em relação à temática da argumentação, prova e demonstração, que foi desenvolvida em duas etapas. A pesquisa está vinculada ao Programa de Pós-Graduação em Ensino de Matemática (PEMAT) da Universidade Federal do Rio de Janeiro (UFRJ).

A primeira etapa resultou em uma dissertação de mestrado (Caldato, 2018) e um dos focos foi sobre as argumentações de licenciandos ingressantes para validar enunciados matemáticos. Essa etapa teve a participação de 78 ingressantes em cursos de licenciatura em Matemática, de três Instituições de Ensino Superior (IES) públicas, da região Sudeste. A produção de dados foi por meio da aplicação presencial de um questionário composto por sete questões, em 2017. Na ocasião, todos já haviam cursado o primeiro período do curso.

A segunda etapa, que consiste na continuidade da investigação do mestrado, encontra-se em fase de conclusão em um estudo de doutorado, desenvolvido por Caldato, sob a

<sup>1</sup> Instituto Federal do Rio de Janeiro • Paracambi, RJ — Brasil • ✉ [profjoaocaldato@gmail.com](mailto:profjoaocaldato@gmail.com) • ORCID <https://orcid.org/0000-0001-6951-3590>

<sup>2</sup> Universidade Federal do Rio de Janeiro • Rio de Janeiro, RJ — Brasil • ✉ [lnasser.mat@gmail.com](mailto:lnasser.mat@gmail.com) • ORCID <https://orcid.org/0000-0001-6050-4807>

orientação de Nasser. Nesta fase, 14 pessoas que fizeram parte da primeira etapa da pesquisa foram entrevistadas, sendo 3 concluintes dos cursos de licenciatura e 11 recém-egressos. A produção de dados foi por meio da realização de entrevistas semiestruturadas (virtuais, individuais e gravadas) com essa amostra intencional e por meio da triangulação dos dados (Araújo & Borba, 2004) obtidos no mestrado. Assim, analisamos as respostas dos 14 (futuros) professores em dois momentos extremos da formação inicial: ao ingressar na licenciatura em Matemática, em 2017, e ao concluir o curso (ou próximo de concluí-lo, em 2024).

Este recorte se debruça sobre os dados produzidos em relação à seguinte questão algébrica: “*Mostre que o produto de três números inteiros consecutivos é múltiplo de 3*”. Nos questionários aplicados na primeira etapa, cada um dos participantes deveria apresentar uma argumentação para validar o enunciado. E nas entrevistas realizadas na segunda etapa, após ver a projeção da respectiva resposta dada em 2017, cada um dos entrevistados deveria fazer considerações livres sobre a sua argumentação enquanto ingressante no curso.

Diante do contexto narrado anteriormente, este texto busca responder à seguinte questão: o que emerge nas considerações de concluintes/recém-egressos de cursos de licenciatura em Matemática a uma questão algébrica ao comparar com as argumentações dos mesmos participantes quando eram licenciandos ingressantes? Em vista disso, o nosso objetivo é analisar e relacionar as argumentações dos 14 participantes a essa questão nesses dois momentos. As respostas ao questionário, de quando eram ingressantes, são confrontadas com as considerações que eles fizeram durante as entrevistas, agora concluintes/recém-egressos dos cursos, a fim de observar o desenvolvimento de cada um dos (futuros) professores.

A importância para o campo da Educação Matemática de se investigar as concepções de (futuros) professores deve-se ao fato de elas influenciarem nas escolhas e nas práticas de ensino (bem-sucedidas ou não) em sala de aula (Thompson, 1992). Em particular, um conhecimento limitado sobre a temática abordada nesta pesquisa pode suscitar sentimentos de incerteza e falta de confiança quando se trata de ensinar um conceito (Varghese, 2009). Ademais, possibilitar que concluintes/recém-egressos avaliem o argumento proposto quando eram ingressantes, a fim de que eles tenham a oportunidade de (re)produzir (ou não) uma nova justificativa para uma dada questão, configura-se como uma pesquisa inédita no contexto do Ensino Superior, pelo menos, à luz da literatura.

A revisão de literatura mostrou a existência de dissertações e teses brasileiras, cuja temática era semelhante à proposta nesta pesquisa e que utilizaram: licenciandos em qualquer fase do curso (Ferreira, 2016); licenciandos cursando os últimos períodos da graduação (Ordem, 2015); professores em exercício e livros didáticos (Nascimento, 2022); professores em exercício e alunos da Educação Básica (Aguilar Junior, 2012); somente estudantes do Ensino Básico (Krakecker, 2022). Contudo, em nenhum desses estudos foi realizada uma investigação com os mesmos participantes, em dois momentos distintos e extremos da formação inicial de professores, conforme propõe a nossa pesquisa.

Todavia, apesar dos estudos supracitados, ao realizar duas buscas virtuais, consideramos que a temática abordada nesta pesquisa, no contexto da Educação Matemática, tem espaço para ser expandida no Brasil. A primeira busca foi no Diretório dos Grupos de Pesquisa no Brasil, do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq). Constatamos que no país existem apenas dois grupos que contêm “*argumentação*” e “*matemática*” em seus nomes: o Grupo de Pesquisa em Avaliação e Argumentação em Matemática (GPA<sup>2</sup>M) da UFRJ, do qual fazemos parte, e o de Argumentação, Inclusão e Educação Matemática da Universidade Federal de Sergipe (UFS). Além disso, constatamos que nos próprios eventos científicos da Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM), não há nenhuma sessão temática

exclusiva sobre argumentação, prova e demonstração.

A segunda busca foi pelos radicais “*argument-*”, “*prov-*” e “*demonstr-*”, nos títulos, resumos e palavras-chave dos trabalhos publicados nos anais das duas últimas edições do Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática (SIPEM), realizadas nos anos de 2018 e 2021. Constatamos que apenas 5 dos 226 trabalhos (cerca de 2%) apresentados no VII SIPEM continham pelo menos um dos radicais, no sentido semelhante ao abordado nesta pesquisa, e somente 9 dos 226 trabalhos (cerca de 4%) difundidos no VIII SIPEM envolviam pelo menos um desses radicais.

Na próxima seção, restringimos a busca aos trabalhos publicados nos anais das duas últimas edições do SIPEM, e que foram apresentados no Grupo de Trabalho (GT 04), denominado “Educação Matemática no Ensino Superior”.

## 2 Argumentação, prova e demonstração no GT 04 (VII e VIII SIPEM)

Ao restringir a busca mencionada anteriormente, encontramos apenas 3 trabalhos, sendo dois do nosso grupo GPA<sup>2</sup>M. No primeiro trabalho analisado, referente ao VII SIPEM, Nasser e Caldato (2018) problematizaram se os cursos de licenciatura em Matemática fomentavam o desenvolvimento do processo dedutivo nos futuros professores, a partir da análise de quatro questões discursivas do Exame Nacional de Desempenho de Estudantes (ENADE), dos anos de 2008, 2011, 2014 e 2017, e dos respectivos relatórios dos resultados. Em vista disso, destacamos a seguir duas dessas questões que possuem correlação com este texto.

A questão geométrica analisada do ENADE 2008 foi aplicada, simultaneamente, aos licenciandos ingressantes e concluintes, porém de um modo diferente da nossa investigação, em que analisamos as respostas dos mesmos participantes, num espaçamento temporal de seis anos. A porcentagem de respostas em branco e de notas zero desta questão superou a marca de 70% em ambos os grupos e os desvios-padrão indicam que a variabilidade entre ingressantes e concluintes foi similar. Consequentemente, o desempenho médio também foi semelhante.

A questão algébrica analisada do ENADE 2017, que foi aplicada apenas aos concluintes, é semelhante à que investigamos neste texto. O comando era para provar que “se  $n$  é um número inteiro positivo, então  $2n^3 - 3n^2 + n$  é divisível por 6”. Contudo, na época do VII SIPEM, ainda não tínhamos acesso ao relatório dos resultados. Ao realizar uma busca na plataforma do Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais (INEP), observamos que quase 90% dos licenciandos concluintes que fizeram este exame não pontuaram nesta questão. De acordo com o relatório, “a questão pode ser considerada fácil e não deveria ter oferecido dificuldades aos estudantes [...], uma vez que o problema apresentado é absolutamente semelhante àqueles tradicionalmente utilizados como exemplos iniciais da aplicação do Princípio da Indução Finita, ou da consideração de congruências modulares” (Brasil, 2017, p. 263-264).

No segundo trabalho analisado, referente ao VIII SIPEM, Caldato, Costa e Nasser (2021) investigaram como os licenciandos em Matemática mobilizam os processos dedutivos, a partir de provas visuais. Ao todo, 58 futuros professores de diferentes IES responderam a um questionário virtual. Por meio da análise de dois problemas, os dados indicaram que a abstração geométrica dedutiva (Costa, 2020) não estava sendo explorada com êxito nos cursos de licenciatura em Matemática, o que poderia impactar negativamente o ensino de geometria. Tal abstração é marcada pela vivência com argumentações, conjecturas, provas e demonstrações de natureza tanto intuitiva como dedutiva.

E no terceiro trabalho analisado, também do VIII SIPEM, a partir da discussão de duas tarefas exploratórias, Trevisan (2021) apresentou algumas possibilidades para a promoção do

raciocínio matemático em aulas de Cálculo I, com destaque para os conceitos mobilizados por futuros engenheiros, ao elaborarem argumentos para justificar as suas resoluções. Ademais, o pesquisador destacou que o uso de tarefas exploratórias pode favorecer o desenvolvimento do raciocínio matemático nos estudantes, auxiliando-os a compreender que as demonstrações não são baseadas em argumentos por autoridades, senso comum ou exemplos particulares.

Na próxima seção, apresentamos os nossos aportes teóricos. É importante destacar que, durante a busca por trabalhos publicados nos anais das duas últimas edições do SIPEM, constatamos que, além de Nasser e Caldato (2018), a tipologia de provas também foi utilizada por Krackecker e Freitas (2021), numa pesquisa vinculada ao GT 02, denominada “Educação Matemática nos anos finais do Ensino Fundamental e Ensino Médio”.

### 3 Tipologia de Provas e Esquemas de Prova

Os referenciais teóricos adotados nesta pesquisa foram a tipologia de provas de Balacheff (1988) e os esquemas de prova de Harel e Sowder (1998). Mas, antes de apresentá-los, conceituaremos, à luz de Balacheff (1987, 2022), os significados das noções de argumentação, prova e demonstração no contexto da Educação Matemática.

A partir de um esquema proposto em Balacheff (2022), a *argumentação* é caracterizada como um discurso (oral ou escrito) orientado (visa à validade de uma afirmação), crítico (analisa, apoia e defende) e intencional (visa modificar um julgamento). O fato de uma determinada comunidade aceitar que uma argumentação estabelece a validade de uma solução altera seu *status* para *prova* pelo caráter público que adquire. Entre as diferentes provas, as que satisfazem uma estrutura particular validada pela comunidade de matemáticos são chamadas de *demonstrações* (ou provas matemáticas). “Elas são uma sequência de enunciados seguindo regras determinadas: um enunciado é conhecido como verdadeiro, ou é deduzido daqueles que o precedem por meio de uma regra de dedução tomada num conjunto bem definido de regras” (Balacheff, 1987, p. 148, tradução nossa).

A tipologia de provas de Balacheff (1988) foi elaborada a partir de uma investigação com jovens alunos franceses, com foco nas argumentações para validar uma questão geométrica. Note que a abordagem experimental do pesquisador francês se assemelha ao que propomos neste texto. Como resultado desse experimento, esse pesquisador elaborou uma tipologia organizada em *provas pragmáticas* e *provas conceituais* (ou intelectuais). A primeira se apoia na verificação empírica (exemplos numéricos, desenhos, percepções) para justificar uma afirmação, enquanto a segunda é caracterizada pelo raciocínio dedutivo, pela linguagem matemática e baseada em teorias que permitam a validação de um enunciado.

Além disso, Balacheff (1988) destaca quatro principais tipos, considerando os raciocínios apresentados ao elaborar uma prova: *empirismo ingênuo*, *experiência crucial*, *exemplo genérico* e *experiência mental*. O Quadro 1 apresenta a descrição de cada um desses tipos, além de exemplificá-los com base na seguinte afirmação: “A multiplicação de dois números pares resulta em um número par”.

**Quadro 1:** Descrição e exemplos para os tipos de prova proposto por Balacheff

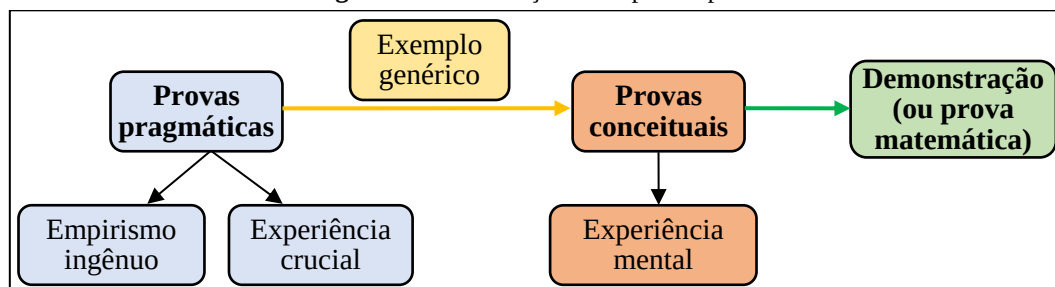
| TIPOS                    | DESCRIÇÃO                                                                                                                                     | EXEMPLOS                                                                                                         |
|--------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Empirismo ingênuo</b> | O estudante valida uma conjectura por meio da verificação de poucos e simples casos, sem questionamento algum quanto às suas particularidades | O estudante verifica a validade da afirmação testando alguns exemplos:<br>$2 \times 4 = 8$<br>$6 \times 10 = 60$ |

|                            |                                                                                                                                                                                                    |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                             |
|----------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Experiência crucial</b> | O estudante utiliza um experimento particular para investigar a veracidade de uma proposição, com indícios de uma possível generalização.                                                          | O estudante julga que, mostrando que a afirmação vale com números muito grandes, valerá para todos os demais.<br>$124 \times 246 = 30.504$<br>$10.236 \times 4.970 = 50.872.920$                                                                                                                                                            |
| <b>Exemplo genérico</b>    | O estudante elege um exemplo como representante da classe de objetos para explicitar as razões que validam a propriedade, com o intuito de deduzir as características que representam essa classe. | O estudante elege o produto $6 \times 10$ como representante da classe de objetos. Como 6 e 10 são números pares, podemos escrevê-los como $2 \times 3$ e $2 \times 5$ . Ao observar a existência de pelo menos um fator 2, ele conclui que o produto também é par, pois,<br>$6 \times 10 = 2 \times (3 \times 2 \times 5) = 2 \times 15$ . |
| <b>Experiência mental</b>  | O estudante se baseia no raciocínio dedutivo para garantir a validade de uma propriedade para toda a classe de objetos.                                                                            | O estudante raciocina que se $p$ e $q$ são dois números pares, então existem inteiros $k_1$ e $k_2$ , tais que $p = 2k_1$ e $q = 2k_2$ . Portanto, $p \times q = 2k_1 \times 2k_2 = 2 \times (2k_1k_2)$ . Logo, a multiplicação também é par.                                                                                               |

Fonte: Elaborado pelos autores

A Figura 1 apresenta um diagrama com a nossa interpretação da tipologia de provas:

Figura 1: Classificação dos tipos de prova



Fonte: Elaborado pelos autores

É importante ressaltar que Balacheff (2022) chama a atenção que este modelo teórico tem sido erroneamente interpretado como uma série de “estágios”. Contudo, com base em nossa interpretação ilustrada na Figura 1 e na citação descrita a seguir, é possível verificar que os tipos de prova remetem a uma transição evolutiva (do empirismo ingênuo à experiência mental) da noção de demonstração (ou prova matemática):

A mudança do empirismo ingênuo para a demonstração pode, em uma fórmula rápida, descrever o movimento do aprendizado da prova na matemática. Esta passagem das provas pragmáticas às provas intelectuais necessárias para ir em direção à demonstração é também a de uma problemática pragmática a uma problemática teórica e, portanto, de uma evolução da leitura das situações em que a atividade matemática se desenvolve e do estatuto dos conhecimentos mobilizados. (Balacheff, 2022, p. 792)

Por sua vez, Harel e Sowder (1998) desenvolveram um estudo para investigar o modo como os estudantes averiguam ou persuadem outrem sobre a validade de enunciado matemático. A terminologia usada para se referir a isso foi *esquemas de prova*. Ao contrário da tipologia, essa noção é centrada no sujeito. Por essa razão, a maior preocupação está em caracterizar o que, na perspectiva do indivíduo, pode ser considerado como prova.

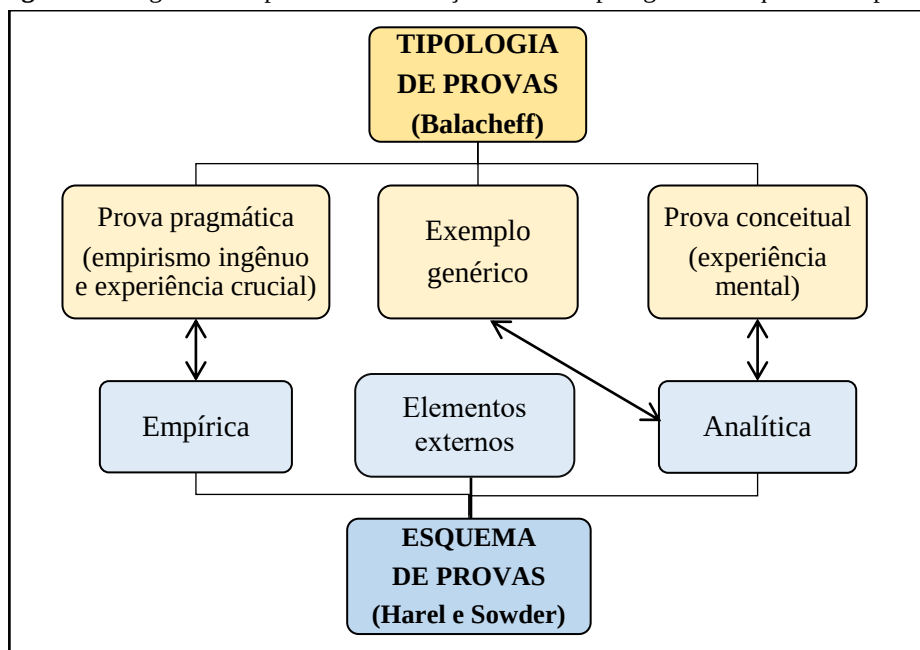


Como resultado desse estudo exploratório, Harel e Sowder (1998) identificaram três categorias principais de esquemas de prova: *esquema de prova baseado em elementos externos*, *esquema de prova empírica* e *esquema de prova analítica (ou dedutiva)*. E cada uma destas categorias possui suas subcategorias. Sem pormenorizar, no esquema baseado em elementos externos (prova autoritária, prova ritual e prova simbólica) são fatores externos ao problema que influenciam na convicção do indivíduo. Esses fatores estão relacionados, por exemplo, ao uso de argumento de autoridade ou ao modo como ele é apresentado. Já o esquema empírico (prova indutiva e prova perceptiva) ocorre quando a validade de uma afirmação é influenciada por evidências numéricas ou por meio da percepção. E o esquema analítico (provas transformacionais e provas axiomáticas) é identificado por apresentar três características essenciais: generalidade, pensamento operacional e dedução lógica.

É possível observar algumas articulações entre os dois modelos apresentados. A noção de prova pragmática cunhada por Balacheff (1988), em que se enquadram os tipos de prova intitulados empirismo ingênuo e experiência crucial, remete à definição de Harel e Sowder (1998) para o esquema de prova empírica, visto que essas terminologias se referem ao uso de argumentos empíricos para validar uma afirmação. Já a noção de prova conceitual, em que está situado o tipo de prova intitulado experiência mental, remete à descrição do esquema de prova analítica, pois faz menção ao uso de argumentos dedutivos para validar um enunciado. Quanto ao tipo de prova denominado exemplo genérico, que consiste num estágio de transição entre a prova pragmática e conceitual, também remete à descrição do esquema de prova analítica, por satisfazer as três características essenciais mencionadas anteriormente.

Com base nisso, a Figura 2 apresenta um diagrama sobre a nossa interpretação acerca da verossimilhança entre a classificação proposta em ambos os modelos teóricos:

**Figura 2:** Diagrama das possíveis articulações entre a tipologia e os esquemas de prova



**Fonte:** Elaborado pelos autores

De acordo com a Figura 2, não foi possível relacionar o esquema de prova baseado em elementos externos com nenhum tipo de prova. É importante destacar que a principal diferença entre os modelos teóricos é com relação ao nível epistemológico. A tipologia foi elaborada por meio de uma abordagem experimental, em que Balacheff (1988) analisou as respostas apresentadas pelos alunos para validar certa afirmação matemática. Nesse modelo, é possível

observar tipos de prova que remetem a uma transição evolutiva da noção de demonstração (do empirismo ingênuo à experiência mental). Já o esquema de provas, por ter sido elaborado por meio da metodologia *teaching experiment*, permitiu que Harel e Sowder (1998) levassem em consideração não apenas as respostas escritas pelos estudantes, mas também o modo como eles averiguavam ou persuadiam outrem sobre a validade de uma conjectura.

Na próxima seção, apresentamos as análises *a priori* e *a posteriori* da questão algébrica investigada, isto é, as respectivas análises antes e depois da realização das entrevistas na segunda etapa da pesquisa.

#### 4 Análise dos Dados

A análise *a priori* é constituída pelas motivações para a escolha desta questão algébrica, possíveis soluções e uma síntese das argumentações dos 14 participantes nos questionários, quando eram licenciandos ingressantes.

A escolha pela questão “*mostre que o produto de três números inteiros consecutivos é múltiplo de 3*” foi motivada por duas razões principais. Primeiramente, a justificativa para esse enunciado não depende de conhecimentos prévios sobre o Princípio da Indução Finita (PIF) e sobre aritmética modular, uma vez que, na época, a maioria dos ingressantes não haviam estudado esses tópicos no primeiro período do curso. Bastaria, portanto, ter a real compreensão do que é ser múltiplo de três para justificar o enunciado. Além disso, trata-se de uma questão que poderia ser problematizada no âmbito da Educação Básica.

A seguir, descrevemos, em detalhes, uma possível solução para validar que o produto de três números inteiros consecutivos é sempre múltiplo de três. De acordo com a nossa interpretação, esta argumentação por meio da noção de multiplicidade por três, denominada de solução I, pode ser classificada como uma prova conceitual (Balacheff, 1988) ou como um esquema de prova analítica (Harel & Sowder, 1998). Ademais, uma segunda solução, descrita em Caldato (2018), seria pelo uso da aritmética modular. E uma terceira solução possível seria utilizar o PIF, desde que a questão fosse validada para os inteiros positivos e não positivos.

Solução I: sejam  $n$ ,  $n + 1$ ,  $n + 2$ , onde  $n \in \mathbb{Z}$ , três números inteiros consecutivos. Como os três são consecutivos, necessariamente um deles é múltiplo de 3, por definição. Sem perda de generalidade, suponha que  $n + 1$  seja o múltiplo de 3, logo seria possível escrevê-lo da forma,  $n + 1 = 3m$ ,  $m \in \mathbb{Z}$ . Com efeito, seria possível escrever o produto  $n \cdot (n + 1) \cdot (n + 2) = n \cdot (3m) \cdot (n + 2) = 3m'$ , onde  $m' \in \mathbb{Z}$ , como múltiplo de 3.

No Quadro 2, categorizamos as argumentações apresentadas nos questionários de cada um dos 14 participantes, quando eram ingressantes nos cursos em 2017. Observe que apenas cerca de 21,5% deles conseguiram, na época, construir uma prova conceitual, a partir de argumentações semelhantes à solução I.

É importante mencionar que tais categorias emergiram durante a análise dos dados. As suas nomenclaturas são pautadas nos modelos teóricos apresentados anteriormente. Além disso, cada um dos participantes foi associado a um pseudônimo.

**Quadro 2:** Argumentação dos participantes quando eram ingressantes em 2017

| ARGUMENTAÇÃO                               | PARTICIPANTES (FREQUÊNCIA)     |
|--------------------------------------------|--------------------------------|
| Sem justificativa                          | Agda, Hugo e Joice (3)         |
| Provas pragmáticas                         | Elion, Freud, Isa e Karla (4)  |
| Esquemas de prova ritual e simbólico (PIF) | Cata, Dulce, Laís e Nathan (4) |
| Provas conceituais (solução I)             | Bento, Girassol e Marie (3)    |

Fonte: Caldato (2018)

A análise *a posteriori* é constituída pelos discursos dos 14 participantes durante as entrevistas. Essa análise utiliza as categorias descritas no Quadro 2 como elementos norteadores, e, para cada um dos entrevistados, relacionamos as considerações que eles fizeram com as argumentações propostas quando eram licenciandos ingressantes.

Na primeira categoria do Quadro 2, “sem justificativa”, enquadramos os três ingressantes – Agda, Hugo e Joice – que deixaram a questão em branco ou que afirmaram não saber justificar o resultado.

Agda, por exemplo, quando era ingressante, escreveu “*desculpa, não me sinto apta a responder*”. Durante a entrevista, a recém-egressa confirmou que, “*de fato, não estava apta a responder*”, e que a pergunta passou a fazer mais sentido em sua cabeça, apesar de não se sentir totalmente apta a responder. Diante desse contexto, quando a questionamos se teria alguma ideia sobre como construir uma argumentação para validar o resultado, ela respondeu que “*tentaria dar uma olhada nos esboços de teoria dos números [...] para ter os exemplos, ter uma estrutura [...] para provar que essa sentença é verdadeira. Através de um exemplo geral, trazer os exemplos numéricos*”. Porém, ao enfatizarmos como seria esse raciocínio, a entrevistada não conseguiu formular nenhuma justificativa. De acordo com a nossa interpretação, consideramos que esse “*exemplo geral*” dialoga com o exemplo genérico proposto por Balacheff (1988), uma vez que Agda, embora não tenha conseguido formular uma demonstração, também não recorreu à formulação de uma prova pragmática.

Em 2017, Hugo escreveu “*não sei*” e, na entrevista realizada, ele afirmou que continua com o mesmo pensamento de seis anos atrás. A partir disso, tentamos confrontá-lo sobre ele ter (ou não) alguma ideia de como iniciar essa argumentação. Após uma pausa, o participante respondeu: “*Então, como eu comecei, colocando variável. Botei x, mais y, mais z, igual, vai ser o número divisível. Ai eu parei mesmo*”. Diferentemente de Agda, podemos observar que o concluinte Hugo teve a iniciativa de tentar algebrizar a resolução, a fim de mostrar que o resultado é válido para todos os números inteiros. Porém, utilizar três incógnitas distintas para encaminhar essa justificativa algébrica, não foi a melhor escolha possível.

A terceira e última ingressante, que também não havia apresentado uma justificativa para a questão, por deixá-la em branco, foi a Joice. Ao ser questionada se possui alguma noção de como construir uma justificativa para a questão, a concluinte Joice declarou: “*acho que sim, mas eu precisaria estudar antes algumas alternativas. De cabeça não tenho, mas já é mais claro para mim do que quando eu li em 2017, tenho certeza*”. Na continuidade da entrevista, assim como ficou observado na de Hugo, constatamos que Joice “*buscaria realmente uma solução, uma demonstração matemática para isso*”, e não apenas uma possível verificação empírica.

Na segunda categoria do Quadro 2, “provas pragmáticas”, enquadramos os quatro ingressantes – Elion, Freud, Isa e Karla – que haviam utilizado argumentos empíricos para validar o resultado, isto é, dois ou três exemplos numéricos. As argumentações de Isa e Karla, ilustradas na Figura 3, respectivamente à esquerda e à direita, representam essa categoria:

**Figura 31:** Argumentação de Isa e de Karla quando eram ingressantes

|                                                                                                                                 |                                                                                                                                                                             |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| $1 \cdot 2 \cdot 3 = 6 \quad \checkmark$ $2 \cdot 3 \cdot 4 = 24 \quad \checkmark$ $-3 \cdot -2 \cdot -1 = -6 \quad \checkmark$ | $1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$ $4 \cdot 5 \cdot 6 = 120$ $\left. \begin{array}{l} 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6 \\ 4 \cdot 5 \cdot 6 = 120 \end{array} \right\} \text{são múltiplos de 3}$ |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

Fonte: Caldato (2018)

Em Caldato (2018), as argumentações de Elion, Freud, Isa e Karla foram classificadas



como provas pragmáticas, porém, com diferenças em relação aos tipos. Ao contrário dos demais, Isa foi a única que teve a iniciativa de verificar numericamente o enunciado para os números inteiros positivos e negativos, uma vez que o enunciado era sobre o conjunto  $\mathbb{Z}$ . Devido a esse cuidado e pelo raciocínio ligeiramente mais genérico, classificamos a resposta da Isa como experiência crucial, e as respostas de Elion, Freud e Karla como empirismo ingênuo.

Durante as entrevistas, ao serem confrontados com as suas resoluções em 2017, esses participantes tiveram reações distintas. Elion, por exemplo, apesar de já ter a noção de que os exemplos numéricos não são suficientes para validar um enunciado, menciona que, por não saber como elaborar de prontidão uma “*prova trazendo variáveis*”, sem um estudo prévio, possivelmente utilizaria de novo exemplos numéricos para ter alguma evidência heurística sobre a validade do enunciado.

Já o entrevistado Freud, ao analisar a sua resolução como ingressante, declarou que “*faltou fazer de uma forma geral [...] faltou fazer alguma coisa mais elaborada, eu acho*”. No prosseguimento da entrevista, o participante evidenciou que, apesar das dificuldades com álgebra, tentaria resolver a questão: “*Eu tentaria fazer o que eu lembro que eu aprendi. Fazer para um  $x$  qualquer, e para um  $x + 1$* ”. Contudo, não mencionou o PIF e ao questionarmos como iniciaria essa argumentação, confessou que “*teria que dar uma estudada*”.

Isa, que havia verificado empiricamente a questão para os números inteiros positivos e negativos, destacou que não mostrou “*que o produto de todos os três números inteiros consecutivos seria múltiplo de 3*”. Ela destacou ainda que a expressão “*mostre que*” tinha um significado diferente no início do curso. Em sua concepção como ingressante, ela precisava “*fazer ali uma conta e mostrar que vai dar um múltiplo*”. Contudo, a recém-egressa passou a compreender que precisaria argumentar que “*isso sempre vai acontecer*”, ou seja, “*o mostre que é o demonstrar*”. Na continuidade da entrevista, Isa explicou como seria o raciocínio para resolver a questão: “*seja  $x$  o primeiro inteiro, seja  $x$  mais 1, o próximo  $x$  mais 2, montaria ali a multiplicação e conseguiria mostrar que isso daria o múltiplo de 3*”. Com o intuito de obter mais detalhes sobre o raciocínio, questionamos se ela conseguiria, de fato, elaborar uma demonstração: “*Acho que essa eu conseguiria demonstrar. Estou meio enferrujada, mas acho que daria para sair*”.

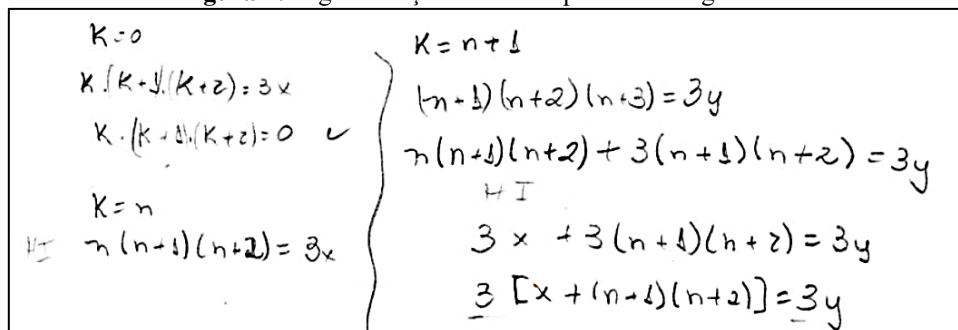
É importante demarcar esta limitação metodológica que ocorreu na segunda etapa da pesquisa. Ao propor entrevistas virtuais, não obtivemos as respostas escritas dos entrevistados. Sendo assim, partimos do princípio de confiar nos depoimentos de cada um. Contudo, deixamos a reflexão de que a multiplicação proposta por Isa,  $x(x + 1)(x + 2) = x^3 + 3x^2 + 2x$  resulta numa expressão em que não é imediata a relação com a multiplicidade por três.

Na mesma direção dos depoimentos de Isa, estão as declarações da concluinte Karla. Inicialmente, Karla considerou que ela havia criado uma argumentação, mas não havia elaborado uma demonstração ou uma prova matemática. De acordo com o relato da concluinte, ela “*tentaria fazer de outra forma, fazer algo mais... né, mais genérico [...]. Algebricamente,  $x$ ,  $x$  mais um,  $x$  mais dois*”. E assim como Isa, Karla também declarou que achava que conseguiria construir uma prova a partir da multiplicação destes fatores, porém, não concedeu maiores detalhes sobre o desenvolvimento do raciocínio.

Na terceira categoria do Quadro 2, “esquemas de prova ritual e simbólica”, enquadrados os quatro ingressantes – Dulce, Laís, Nathan e Cata – que tentaram utilizar o PIF em 2017. Atribuímos esse nome para a categoria, pois, na época, todas as tentativas apresentaram algum equívoco no desenvolvimento da prova por indução finita, a qual requer uma construção passo a passo (ritual) e uma linguagem algébrica (simbólica).

Dulce e Laís, por exemplo, apesar do equívoco ser sutil, validaram a afirmação em 2017 apenas para um subconjunto dos números inteiros. A argumentação de Dulce, ilustrada na Figura 4, representa esse tipo de resposta:

**Figura 4:** Argumentação de Dulce quando era ingressante

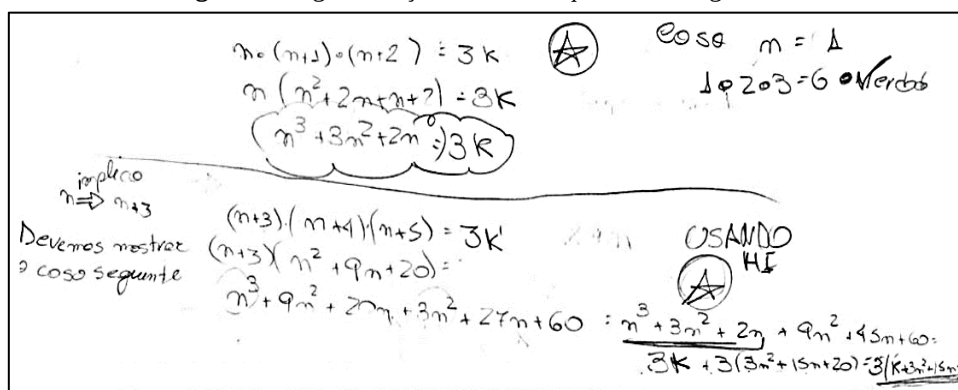


Fonte: Caldato (2018)

Note que Dulce e Laís utilizaram corretamente o PIF, ao validar a afirmação no conjunto dos inteiros não negativos. Contudo, enquanto ingressantes, elas não se atentaram que tais argumentações não garantem a validade no conjunto dos números inteiros. E, durante a entrevista, nenhuma das professoras evidenciou esse fato e ambas validaram as suas respectivas respostas de 2017.

Nathan, enquanto ingressante, além de se restringir aos números inteiros positivos, ele não utilizou o conceito de indução de um modo totalmente correto. Observe na Figura 5, que após validar o caso para  $n = 1$  e supor a hipótese de indução para  $n$ , ele verificou que o enunciado era válido a partir de  $(n + 3)(n + 4)(n + 5)$ , sem ter o cuidado de verificá-lo anteriormente para os casos  $(n + 1)(n + 2)(n + 3)$  e  $(n + 2)(n + 3)(n + 4)$ .

**Figura 5:** Argumentação de Nathan quando era ingressante

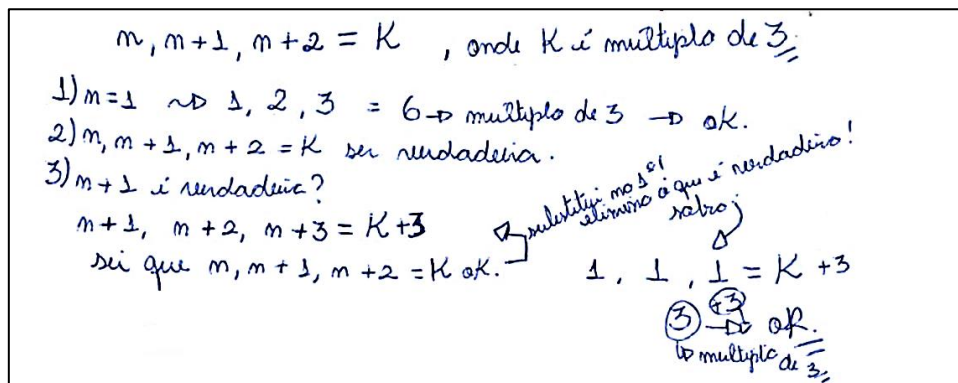


Fonte: Caldato (2018)

Durante a entrevista, ao ser projetada a sua resolução, Nathan destacou que na sua justificativa “ficou faltando algumas coisas”, porém, durante a explicação, ele não fez menção ao desenvolvimento do último passo, no qual não foram verificados os casos  $n + 1$  e  $n + 2$ . Ademais, Nathan foi o único participante que havia utilizado o PIF enquanto ingressante e que observou a necessidade de estender a justificativa para além dos inteiros positivos.

Cata, assim como os outros três ingressantes que haviam utilizado o PIF, elaborou uma argumentação que era restrita a um subconjunto dos números inteiros. Contudo, na época, ela apresentou uma resposta muito confusa, já que não utilizou nenhum sinal operador entre os termos, conforme ilustra a Figura 6:

**Figura 6:** Argumentação de Cata quando era ingressante



Fonte: Caldato (2018)

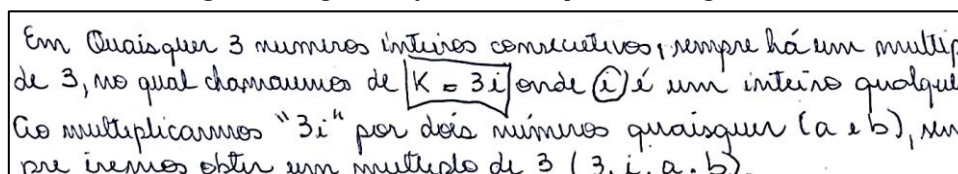
Ao analisar a Figura 6, inicialmente tivemos a sensação de que Cata havia tentado justificar a questão para a soma de três inteiros consecutivos, mas ao investigar o caso  $n = 1$ , verifica-se que ela efetuou o produto dos números. E apesar de a argumentação ser baseada no PIF, apontamos uma falta de organização em seu raciocínio matemático, uma vez que a linguagem e a conclusão da ingressante não são muito compreensíveis (Caldato, 2018). Ao ser confrontada com a sua resposta de 2017, Cata também enfatizou que a resolução estava confusa, apesar de ser uma boa tentativa: “Eu não sei se eu fiz isso, tipo, extremamente confiante de que isso aí estava bom. Ou se eu fiz, tipo, aí, não sei, vou tacar isso aqui, não sei. Mas eu não saquei o que eu fiz aqui, não”.

Além disso, durante a entrevista, Cata não fez menção explicitamente ao uso do PIF, mas afirmou que tentou utilizar algo que havia aprendido: “Eu entendi meu raciocínio ali, falei, ah, vou tentar usar o negócio que eu aprendi”. Posteriormente, questionamos como a entrevistada resolveria o exercício na atualidade. A participante declarou que “se eu fosse refazer, não sei como é que eu iria refazer [...] teria que pensar e não saberia te dizer de imediato como eu ia resolver isso não”.

Por fim, na quarta e última categoria do Quadro 2, “provas conceituais (solução I)”, classificamos as respostas dos três ingressantes – Bento, Marie e Girassol – que construíram uma justificativa que validava matematicamente a questão algébrica, utilizando argumentos semelhantes aos que descrevemos na solução I.

A resposta dada por Bento em 2017 está ilustrada na Figura 7, em que o participante utiliza o fato de que dados três números inteiros consecutivos, sempre haverá um que é um múltiplo de três:

**Figura 7:** Argumentação de Bento quando era ingressante



Fonte: Caldato (2018)

Bento fez uma leitura cuidadosa da sua resolução e ao final concluiu que: “Realmente, essa demonstração continua, na minha opinião, sendo válida diante daqueles contatos que eu tive ao longo da minha formação com essas estratégias”.

Enquanto ingressantes, Marie e Girassol iniciaram uma tentativa de resolução com uma linguagem algébrica. Todavia, como não conseguiram obter nenhuma conclusão, validaram a afirmação utilizando um texto que remete à ideia da solução I. A argumentação de Marie, ilustrada na Figura 8, representa esse tipo de resposta:

**Figura 8:** Argumentação de Marie quando era ingressante

$$\begin{aligned} x \cdot (x+1) \cdot (x+2) &= (x^2+x)(x+2) = x^3 + 2x^2 + x^2 + 2x = x^3 + 3x^2 + 2x \\ &= 3x^2 + x(x^2 + 2) \end{aligned}$$

~~~~~

A cada três números inteiros há um múltiplo de 3 obrigatoriamente,  
e multiplicando-se pelas outras dois termos um múltiplo de 3.

**Fonte:** Caldato (2018)

Durante a entrevista, Marie evidenciou que achava que a sua resolução estava incompleta e que a escrita de textos era uma estratégia comum no início da licenciatura: “*Eu não sei se eu concordo com essas coisas que eu escrevi, ficou meio faltando coisas. E essa era uma tentativa que eu fazia bastante na faculdade, no começo. Eu escrevia longos textos para me explicar*”. Ao mencionar que a sua resposta estava “*faltando coisas*”, questionamos se era na parte algébrica ou na parte do texto. A entrevistada afirmou que em ambas as partes. Na parte algébrica, destacou que, no resultado, na primeira parcela,  $3x^2$ , existe um fator três multiplicando, porém, na segunda parcela,  $x(x^2 + 2)$ , “*a justificativa não está ideal*”. Na parte do texto, ela afirmou “*também falta coisa*”. Diante deste contexto, questionamos:

Pesquisador: Você acha que esse texto precisa ser atravessado pelo algebrismo, de fato, mostrar que existe isso e aí complementar e ficar arrumadinho?

Marie: É, eu acho que eu deveria ter juntado os dois. E eu só saí colocando  $x$ ,  $x$  mais um,  $x$  mais dois, brotei assim as coisas.

Pesquisador: Aham.

Marie: Fiquei desordenada. Eu tentei seguir a lógica algébrica, mas não... devo ter ficado com dúvida. [Hoje] eu acho que eu tentaria mais pelo caminho algébrico. Mas no final, ali, eu mudaria. Eu faria essa separação. Mas aí eu ia ter que pensar.

Apesar de classificar as argumentações propostas por Marie e Girassol como provas conceituais é perceptível que Marie sentiu falta de uma linguagem matemática mais formal. Além disso, possivelmente este seria o caminho escolhido para refazer o exercício, ainda que ela tivesse que pensar sobre o assunto. Diferentemente de Marie, Girassol validou por completo a sua argumentação enquanto ingressante, ainda que ela estivesse no “*português*”. Durante a entrevista, constatamos que, a recém-egressa Girassol encaminharia a resolução do mesmo modo.

É importante sublinhar a frase em que Marie diz: “*E eu só saí colocando  $x$ ,  $x$  mais um,  $x$  mais dois, brotei assim as coisas*”. Isso porque as entrevistadas Isa e Karla também mencionaram que utilizariam esse raciocínio, porém, não forneceram os detalhes. Isso vale ser destacado, pois não se pode concluir, *a priori*, que o polinômio de grau 3 (Figura 8) obtido pelo produto de três números consecutivos quaisquer é múltiplo de três.

Para concluir esta seção, elaboramos um quadro comparativo (Quadro 3) entre as argumentações apresentadas na primeira etapa da pesquisa e as sínteses das considerações dos participantes na segunda etapa:



**Quadro 3:** Comparação das respostas dos participantes em cada etapa da pesquisa

|          | ARGUMENTAÇÃO<br>(INGRESSANTE)                | SÍNTESE DAS CONSIDERAÇÕES<br>(CONCLUINTE/RECÉM-EGRESSO)                                                                                                                                       |
|----------|----------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Agda     | Sem justificativa                            | Relatou que continua com dificuldade e precisa de um estudo prévio para resolver a questão                                                                                                    |
| Bento    | Prova conceitual<br>(solução I)              | Validou a argumentação                                                                                                                                                                        |
| Cata     | Esquema de prova<br>ritual e simbólico (PIF) | Apresentou dificuldades em compreender a argumentação e<br>relatou que precisaria estudar para resolver a questão                                                                             |
| Dulce    | Esquema de prova<br>ritual e simbólico (PIF) | Validou a argumentação, apesar de não ter destacado que a<br>justificativa se restringia a um subconjunto dos $\mathbb{Z}$                                                                    |
| Elion    | Prova pragmática                             | Relatou que não saberia demonstrar imediatamente o<br>resultado sem um estudo prévio e utilizaria exemplos<br>numéricos na argumentação, mesmo ciente de que essa<br>estratégia seja limitada |
| Freud    | Prova pragmática                             | Relatou que resolveria a questão de uma forma mais<br>genérica, possivelmente utilizando o PIF, apesar de não<br>descrever os detalhes da solução                                             |
| Girassol | Prova conceitual<br>(solução I)              | Apesar da dificuldade inicial em compreender a<br>argumentação, validou a justificativa                                                                                                       |
| Hugo     | Sem justificativa                            | Apesar da tentativa de algebrizar uma possível resolução,<br>relatou que continua com dificuldade                                                                                             |
| Isa      | Prova pragmática                             | Relatou que utilizaria um raciocínio mais algébrico numa<br>hipotética demonstração, apesar de não detalhá-la                                                                                 |
| Joice    | Sem justificativa                            | Relatou que buscaria uma demonstração e não apenas uma<br>verificação empírica, porém, precisaria de um estudo prévio                                                                         |
| Karla    | Prova pragmática                             | Relatou que utilizaria um raciocínio mais algébrico numa<br>hipotética demonstração, apesar de não detalhá-la                                                                                 |
| Laís     | Esquema de prova<br>ritual e simbólico (PIF) | Validou a argumentação, apesar de não ter destacado que a<br>justificativa se restringia a um subconjunto dos $\mathbb{Z}$                                                                    |
| Marie    | Prova conceitual<br>(solução I)              | Validou parcialmente a argumentação e afirmou que tentaria<br>uma resolução mais algébrica, apesar da necessidade de ter<br>que pensar sobre o assunto                                        |
| Nathan   | Esquema de prova<br>ritual e simbólico (PIF) | Validou parcialmente a argumentação ao afirmar<br>que a justificativa se restringia a um subconjunto dos $\mathbb{Z}$                                                                         |

**Fonte:** Elaborado pelos autores

## 5 Considerações Finais

Este texto buscou responder à questão: o que emerge nas considerações de concluintes/recém-egressos de cursos de licenciatura em Matemática a uma questão algébrica, ao comparar com as argumentações dos mesmos participantes quando eram ingressantes?

A partir dos dados resumidos no Quadro 3, há um indicativo de que houve pouco progresso no desenvolvimento do domínio do processo dedutivo durante o curso de licenciatura, em relação aos participantes envolvidos nesta pesquisa longitudinal, pelo menos, no que diz respeito à questão algébrica investigada. É possível constatar que, embora a maioria dos (futuros) professores reconheça que sua argumentação na primeira etapa da pesquisa foi insatisfatória, nenhum dos ingressantes que exibiram provas pragmáticas ou não apresentaram justificativa na primeira etapa foi capaz de construir uma prova conceitual na segunda etapa.

Em vista disso, parece que a hipótese levantada no relatório do ENADE de 2017, à questão algébrica proposta no exame, continua valendo, ainda que com alguma divergência em



relação à nossa pesquisa com concluintes/recém-egressos:

Os estudantes da Licenciatura tiveram um desempenho [...] com grande prevalência da mera apresentação de validações de casos particulares e de equívocos substanciais na aplicação do Princípio da Indução Finita. [...] [Isso] leva à hipótese de que conteúdos fundamentais da teoria dos números inteiros não vêm sendo apresentados, ou vêm sendo apresentados de forma insatisfatória. Além disso, houve um número significativo de respostas que mostravam uma evidente falta de organização no raciocínio matemático. (Brasil, 2017, p. 264-265)

Diferentemente do apontamento inicial descrito no relatório, um resultado positivo em relação ao amadurecimento do raciocínio dedutivo da nossa amostra é o fato de que todos se mostraram cientes da limitação das provas pragmáticas, uma vez que nenhum dos participantes utilizou casos particulares para validar a questão algébrica. Ademais, é possível observar nas considerações dos entrevistados algumas tentativas de argumentações mais genéricas.

Por outro lado, os resultados obtidos corroboram a hipótese descrita no relatório e evidenciam a dificuldade em construir um raciocínio matemático aceitável. Com exceção de Bento, Girassol e Marie que já haviam apresentado em 2017 uma argumentação válida (solução I), e de Nathan que percebeu a restrição do argumento proposto por meio do PIF, as considerações dos demais (cerca de 71,4% da amostra) não foram plenamente satisfatórias. Isso porque alguns mencionaram a necessidade de um estudo prévio para justificar a questão (Agda, Cata, Elion e Joice). Outros até formularam uma tentativa de prova, porém, não apresentaram os detalhes da construção de uma prova conceitual (Freud, Hugo, Isa e Karla). E outros não se atentaram à restrição do uso do PIF nesta questão (Dulce e Laís), em consonância com o apontamento sobre os equívocos substanciais descrito no relatório.

Tais resultados indicam que ainda há muito o que investir no desenvolvimento do processo dedutivo, uma vez que consideramos os dados alarmantes, afinal, os (futuros) professores que constituíram a nossa amostra são (ou estão sendo) formados por IES renomadas no Brasil. Em vista disso, o impacto desta pesquisa para o campo da Educação Matemática é a possibilidade de continuar esta investigação futuramente com professores formadores das IES. Acreditamos que é preciso conscientizar os docentes dos cursos de Licenciatura de que as argumentações e o raciocínio dedutivo precisam ser vivenciados pelos licenciandos, para que eles possam desenvolver atividades desse tipo em suas futuras práticas pedagógicas.

## Referências

- Aguiar Junior, C. A. (2012). *Postura de docentes quanto aos tipos de argumentação e prova matemática apresentados por alunos do ensino fundamental*. 2012. 144 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática). Universidade Federal do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro, RJ.
- Araújo, J. L. & Borba, M. C. (2004). Construindo pesquisas coletivamente em educação matemática. In: Borba, M. C. & Araújo, J. L. (Org.). *Pesquisa qualitativa em Educação Matemática*. (1. ed., pp. 25-46). Belo Horizonte, MG: Autêntica.
- Balacheff, N. (1987). Processus de preuve et situations de validation. *Educational Studies in Mathematics*, 18(2), 147-176.
- Balacheff, N. (1988). Aspects of proof in pupil's practice of school mathematics. In: Pimm, D. (Ed.). *Mathematics teachers and children*. (pp. 216-235). London: Hodder and Stoughton.
- Balacheff, N. (2022). A argumentação matemática: um precursor problemático da

- demonstração. Tradução de Almouloud, S. A. & Moretti, M. T. *Educação Matemática Pesquisa*, 24(1), 770-815.
- Brasil. Ministério da Educação. (2017). *Exame Nacional de Desempenho dos Estudantes: Relatório Síntese de Área: Matemática (Bacharelado/Licenciatura)*. Brasília, DF.
- Caldato, J. (2018). *Argumentação, prova e demonstração: uma investigação sobre as concepções de ingressantes no curso de licenciatura em Matemática*. 2018. 218 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática). Universidade Federal do Rio de Janeiro. Rio de Janeiro, RJ.
- Caldato, J. C.; Pereira da Costa, A. & Nasser, L. (2021). Analisando a interpretação de provas visuais por licenciandos de Matemática. In: *Anais do 8º Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática* (pp. 684-698). Uberlândia, MG (on-line).
- Costa, A. P. (2020). Abstrações em geometria: uma alternativa para análise do pensamento geométrico. *VIDYA*, 40(1), 137–158.
- Ferreira, M. B. C. (2016). *Uma organização didática em quadrilátero que aproxime o aluno de licenciatura das demonstrações geométricas*. 2016. 342 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo, SP.
- Harel, G. & Sowder, L. (1998). Students' proof schemes: Results from exploratory studies. In: Schoenfeld, A.; Kaput, J. & Dubinsky, E. (Eds.). *Research in Collegiate Mathematics Education III*. (pp. 234-283). Providence, RI: American Mathematical Society.
- Krakecker, L. & Freitas, J. L. M. (2021). Validação matemática no 9º ano do Ensino Fundamental numa escola pública de Mato Grosso. In: *Anais do 8º Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática* (pp. 398-411). Uberlândia, MG (on-line).
- Krakecker, L. (2022). *Validações matemáticas produzidas por alunos do nono ano do Ensino Fundamental: desafios e possibilidades*. 2022. 213 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática). Universidade Federal do Mato Grosso do Sul. Campo Grande, MS.
- Nascimento, E. S. (2022). *Argumentação no ensino de operações com números inteiros*. 2022. 155 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática). Universidade Federal de Sergipe. São Cristóvão, SE.
- Nasser, L. & Caldato, J. (2018). O desenvolvimento do processo dedutivo nos cursos de Licenciatura em Matemática. In: *Anais do 7º Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática* (pp. 1-12). Foz do Iguaçu, PR.
- Ordem, J. (2015). *Prova e demonstração em geometria plana: concepções de estudantes da licenciatura em ensino de Matemática em Moçambique*. 2015. 341 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo, SP.
- Thompson, A. G. (1992). Teachers' beliefs and conceptions: a synthesis of the research. In: Grouws, D. A. (Ed.). *Handbook of Research in Mathematics Teaching and Learning: a project of the National Council of Teachers of Mathematics*. (pp. 127-146). Reston, VA: NCTM.
- Trevisan, A. L. (2021). Promoção do raciocínio matemático em aulas de Cálculo. In: *Anais do 8º Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática* (pp. 877-891). Uberlândia, MG (on-line).
- Varghese, T. (2009). Concept maps to assess student teachers' understanding of mathematical proof. *The Mathematics Educator*, 12(1), 49-68.