Conhecimentos especializados de professores de Matemática para o ensino de equações diferenciais ordinárias de variáveis separáveis na Engenharia Civil a partir de um problema de Transferência de Calor

Mathematics teachers' specialized knowledge for teaching ordinary differential equations of separable variables in Civil Engineering based on a Heat Transfer problem

Rieuse Lopes[1]
Gabriel Loureiro de Lima[2]

Resumo: Neste artigo, tendo por base o modelo MTSK, são analisados os conhecimentos especializados que um professor de Matemática precisa desenvolver ou mobilizar para elaborar e implementar um problema objetivando ensinar equações diferenciais ordinárias (EDO) de variáveis separáveis em cursos de Engenharia Civil. Parte-se de um contexto relacionado à Transferência de Calor por condução unidimensional e regime estacionário em uma parede plana. Sob a perspectiva da Análise de Conteúdo, para alcançar o objetivo visado, analisa-se o percurso de construção do problema. Observa-se que muitos dos conhecimentos independem do tipo de EDO, do contexto extramatemático e da habilitação de Engenharia enfocada. Idealmente, deveriam ser construídos e mobilizados por qualquer professor de Matemática que objetiva ensinar EDO na Engenharia.

Palavras-chave: Equações diferenciais ordinárias de variáveis separáveis. Transferência de calor. Modelo MTSK. Engenharia Civil.

Abstract: Based on the MTSK model, in this article is analyzed the specialized knowledge that a Mathematics teacher needs to develop or mobilize to create and implement a problem aiming to teach ordinary differential equation (ODE) of separable variables in Civil Engineering programs. It starts from a context related to one-dimensional steady-state heat conduction in a flat wall. From the perspective of Content Analysis to achieve the intended goal, the process of constructing the problem is analyzed. It can be observed that a great deal of the knowledge does not depend on the type of ODE, of the extra-mathematical context, or focused Engineering expertise. Ideally, these should be built and mobilized by any Mathematics teacher aiming to teach ODEs in Engineering.

Keywords: Ordinary differential equations of separable variables. Heat conduction. MTSK model. Civil Engineering.

1 Introdução

É sabido e indiscutível que as formações inicial e continuada de professores, bem como os conhecimentos necessários de serem desenvolvidos e/ou mobilizados por esses profissionais são temáticas muito discutidas na Educação Matemática há muitos anos (Fiorentini, Passos & Lima, 2016). No Brasil há, inclusive, um Grupo de Trabalho da Sociedade Brasileira de Educação Matemática, o GT07, destinado a estudos dessa natureza. O foco dessas reflexões, no entanto, na maior parte dos casos, está na formação ou nos conhecimentos do professor de Matemática ou daquele que ensina essa ciência na Educação Básica ou ainda na formação e nos conhecimentos dos formadores desses docentes. São escassas as investigações destinadas a compreender aspectos relativos às formações e aos conhecimentos dos professores

[1] Universidade Estadual de Montes Claros • Montes Claros, MG — Brasil • ✉ rieuse.lopes@unimontes.br • ORCID https://orcid.org/0000-0003-2342-3084
[2] Pontifícia Universidade Católica de São Paulo • São Paulo, SP — Brasil • ✉ gllima@pucsp.br • ORCID https://orcid.org/0000-0002-5723-0582

ISSN 2764-3158

universitários de Matemática que lecionam em cursos como Administração, Biologia, Ciência da Computação, Engenharia, Geografia etc., nos quais essa ciência está presente nas chamadas disciplinas de serviço (Howson, Kahane, Lauginie & Turckheim, 1988), cenário já identificado por Fiorentini *et al*. (2016) ao realizarem, considerando o recorte temporal de 2001 a 2012, um mapeamento da pesquisa acadêmica brasileira sobre o professor que ensina Matemática. Pesquisas a esse respeito são necessárias, dentre outras razões, porque "o professor da Educação Superior assume uma função profissional complexa que requer múltiplos conhecimentos e saberes. O reconhecimento da abrangência e do significado de seus fazeres e responsabilidades exige um investimento profissional vigoroso e permanente" (Cunha, Bolzan & Isaia, 2021, p. 277).

Uma pesquisa nos anais das oito edições já realizadas do Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática (SIPEM) revela que, no GT07, ao menos durante as reuniões do Grupo no supracitado evento, não foi discutido nenhum trabalho tendo por objetos de análise as formações e os conhecimentos dos professores de Matemática que atuam em diferentes cursos do Ensino Superior. No domínio do GT04 – Educação Matemática no Ensino Superior, no qual, como indicam Bianchini, Lima e Gomes (2019), pesquisas sobre formação de professores também têm sido debatidas, as formações e os conhecimentos de professores que lecionam Matemática em outros cursos universitários que não as licenciaturas também não têm sido objetos de estudos. Nenhum trabalho relativo a essas temáticas foi apresentado nas reuniões do Grupo ocorridas nas diferentes edições do SIPEM, havendo, porém, um único estudo (Palis, 2009) com essa orientação disponibilizado em uma das produções do GT04, o livro *Educação Matemática no Ensino Superior: pesquisas e debates* (Frota & Nasser, 2009).

Diante desse cenário, compreendemos que compete a nós, membros do GT04, pesquisadores dedicados às temáticas atinentes aos processos de ensino e de aprendizagem de Matemática na universidade, reconhecermos também, como objetos de nossos estudos, as reflexões sobre as formações dos docentes que ensinam essa ciência em diferentes cursos de graduação e acerca dos conhecimentos especializados que esses profissionais devem construir ou mobilizar em suas práticas em diferentes contextos. A experiência por nós acumulada em debates relativos às especificidades do ensino e da aprendizagem de Matemática no Ensino Superior nos baliza para assumirmos, com conhecimento de causa, o protagonismo nessa trilha de estudo ainda não suficientemente explorada. Como pontuam Cunha *et al*. (2021, p. 282), é fundamental "reconhecer a existência de um campo específico de saberes que precisam ser mobilizados para que a Educação Superior alcance sua dimensão política, social e cognitiva, que se constitui na pedagogia universitária, aquela que caracteriza o docente como um profissional professor".

É um primeiro acercamento a essa temática que propomos neste artigo, considerando a perspectiva do modelo MTSK - *Mathematics Teacher´s Specialized Knowledge (*Conhecimento Especializado do Professor de Matemática), particularmente os conhecimentos especializados requeridos por docentes que objetivem, a partir de um problema relacionado à Transferência de Calor por condução unidimensional e regime estacionário em uma parede plana, elaborado em consonância aos preceitos da Teoria A Matemática no Contexto das Ciências (TMCC), ensinar equações diferenciais ordinárias (EDO) de variáveis separáveis a estudantes da Engenharia Civil. A relevância do estudo realizado justifica-se também por este contribuir para a necessária ampliação das pesquisas envolvendo o modelo MTSK em outros níveis educacionais, uma vez que, como pontua Climent (2023, p. 15), "a aplicação do MTSK em diferentes escalas para a formação de professores em diferentes níveis exige a exploração de outros projetos de pesquisa e a mudança do foco do nível do Ensino Fundamental".

Neste artigo, baseando-nos no trabalho de elaboração e implementação do *evento contextualizado* (EC) – que, segundo Camarena (2021), é um problema integrando a Matemática a outras áreas do conhecimento, especificamente no caso considerado a Transferência de Calor – presente na tese de doutorado de Lopes (2021) e fundamentados pelo modelo MTSK, buscamos responder à seguinte questão: *quais são os conhecimentos especializados que um professor de Matemática precisa desenvolver ou mobilizar para elaborar e implementar um EC objetivando ensinar EDO de variáveis separáveis em cursos de Engenharia Civil a partir de um contexto extramatemático relacionado à Transferência de Calor por condução unidimensional e regime estacionário em uma parede plana?*

2 Ideias centrais acerca da TMCC e o processo de elaboração e implementação do EC

A TMCC, referencial que nos subsidiou, dos pontos de vista teórico e metodológico, para a elaboração e para a implementação do EC vinculando EDO de variáveis separáveis e noções da Transferência de Calor por condução unidimensional e regime estacionário, foi desenvolvida pela pesquisadora mexicana Patrícia Camarena Gallardo com o intuito de fundamentar discussões a respeito do ensino de Matemática em cursos superiores nos quais essa ciência não é uma meta por si mesma e, portanto, não visa à formação de matemáticos. Essa teoria tem sido empregada para fundamentar estudos relacionados a como oportunizar aos estudantes de Engenharia a vivência de uma abordagem da Matemática contextualizada a partir de situações específicas de sua futura área de atuação ou, ao menos, mais próximas a ela. Assume-se que o egresso de uma graduação em Engenharia deve ser capaz de fazer a transferência de conhecimentos das ciências básicas, incluindo a Matemática, para contextos de aplicação específicos da atuação profissional do engenheiro (Camarena, 2013; 2021). Sob a ótica desse referencial, o ambiente de aprendizagem é concebido como um sistema em que cinco fases interatuantes estão presentes: curricular, didática, epistemológica, docente e cognitiva, cada uma com subsídios teóricos e processos metodológicos específicos (Camarena, 2013).

No escopo da TMCC, concebe-se que os eventos contextualizados são atividades não rotineiras, na forma de "problemas, projetos ou estudos de caso que se comportam como entes integradores entre áreas de conhecimentos" (Camarena, 2021, p. 179), com potencial de "causar um conflito cognitivo nos estudantes ao ler o enunciado, motivá-los e intrigá-los para que queiram continuar com a tarefa de resolvê-lo" (p. 179). Em Lopes (2021), a partir de um problema investigando a transferência de calor por condução em paredes de alvenaria planas, foi elaborado um EC, apresentado na Figura 1, que serviu de base para a construção de uma sequência de ensino englobando uma série de conceitos matemáticos e físicos, e possibilitando a contextualização da abordagem de EDO de variáveis separáveis. Esse problema foi identificado no livro *Transferência de Calor e Massa* (Incropera & Dewitt, 2014), e refere-se a uma situação na qual há transferência de calor do ambiente externo para o interior de paredes planas de alvenaria. Com sua aplicação, almeja-se analisar, do ponto de vista matemático, o conforto térmico dessas edificações, por meio da resolução de EDO de variáveis separáveis.

Para a elaboração desse evento, Lopes (2021) recorreu a preceitos de duas fases da TMCC: curricular e epistemológica. O processo de construção do evento iniciou-se por meio da realização de uma análise dos conteúdos matemáticos que são mobilizados pelas disciplinas não matemáticas do curso de Engenharia Civil. Subsidiada por procedimentos metodológicos inerentes à fase curricular da TMCC, foi realizada uma análise minuciosa do projeto pedagógico do curso de Engenharia Civil no qual o EC seria implementado, das ementas das disciplinas e dos livros utilizados nas unidades curriculares não matemáticas do curso, mas que requeriam a mobilização de conhecimentos matemáticos. Por meio dessa análise, buscou-se observar o

ISSN 2764-3158

enfoque, a profundidade, as aplicações da Matemática presentes e as notações empregadas nesses livros específicos ao mobilizar os conteúdos matemáticos requeridos. Lopes (2021) analisou, especificamente, em quais disciplinas não matemáticas presentes no currículo do curso de Engenharia Civil com o qual trabalharia havia mobilização de EDO, particularmente as de variáveis separáveis. Como resultado dessa análise, Lopes (2021) identificou a Transferência de Calor como um contexto potencialmente rico para a elaboração do EC visado.

Figura 1: O EC

Conforto térmico em uma edificação

Visando melhorar o conforto térmico de ambientes não climatizados, reduzir o dispêndio de energia elétrica em ambientes climatizados e racionalizar o consumo de energia, o engenheiro civil busca soluções que potencializam a eficiência energética de um projeto de edificações. Para alcançar o conforto térmico desejado, é necessário o conhecimento a respeito da transferência de calor do ambiente externo para o interior das edificações. Assim, apresentamos três paredes construídas da seguinte forma:

PAREDE 1: Construída com tijolos maciços aparentes, assentados na dimensão de 10 cm, com revestimento em todas as faces. As dimensões do tijolo são: 10,5 cm × 6 cm × 23 cm. O assentamento dos tijolos foi feito com 1 cm de argamassa de assentamento de 1:6 (1 de cimento e 6 de areia), e o revestimento externo de cada face da parede com 3,5 cm da mesma argamassa. A espessura total da parede é 17 cm.

PAREDE 2: Construída com tijolos maciços aparentes, assentados na dimensão de 10 cm, com revestimento em todas as faces. As dimensões do tijolo são: 10,5 cm × 6 cm × 23 cm. O assentamento dos tijolos foi feito com 1 cm de argamassa de assentamento de 1:6 (1 de cimento e 6 de areia), e o revestimento externo de cada face da parede com 3,5 cm de gesso. A espessura total da parede é 17 cm.

PAREDE 3: Construída com tijolos maciços aparentes, assentados na dimensão de 10 cm, com revestimento em todas as faces. As dimensões do tijolo são: 10,5 cm × 6 cm × 23 cm. O assentamento dos tijolos foi feito com 1 cm de argamassa de assentamento de 1:6 (1 de cimento e 6 de areia), e o revestimento externo de cada face da parede com 1,5 cm da mesma argamassa. Nessa parede, foi colado na face externa e interna um poliestireno expandido ou *expanded polystyrene* (EPS) de 2 cm. A espessura total da parede é 17 cm.

De acordo com as especificidades de cada parede, respondam:

a) Qual das três paredes apresenta maior conforto térmico em uma edificação? Por quê?

b) Qual é o comportamento térmico dos materiais de cada parede?

c) O que é preciso fazer para reduzir as perdas térmicas em uma edificação?

Fonte: Lopes (2021, p. 118-119)

Identificado o contexto que seria empregado no evento, o processo de elaboração teve continuidade por meio do emprego de um percurso metodológico em cinco etapas que, no âmbito da fase epistemológica da TMCC, é proposto para a construção de eventos contextualizados (Camarena & González, 2001). Seguindo as etapas desse percurso, foram analisados: (i) o livro de Transferência de Calor (Incropera & Dewitt, 2014), visando compreender como as EDO são aplicadas nessa área de conhecimento; (ii) o projeto pedagógico do curso, sua matriz curricular e as ementas das disciplinas de Matemática para compreender como é previsto o tratamento a ser dado às EDO no curso e em que disciplinas ou outros tipos de unidades curriculares elas são abordadas; (iii) o processo de desenvolvimento histórico-epistemológico das equações diferenciais; (iv) os livros-texto e outros materiais didáticos considerados referências nas disciplinas em que as equações diferenciais são abordadas no curso de Engenharia Civil considerado, objetivando compreender como está previsto em tais materiais o tratamento das EDO, especialmente as de variáveis separáveis; e (v) pesquisas tratando de questões cognitivas relacionadas às EDO. O EC apresentado na Figura 1 foi então elaborado como resultado de toda essa análise descrita nos dois últimos parágrafos.

A implementação do evento elaborado por Lopes (2021) foi subsidiada pelo que é preconizado na fase didática da TMCC e, para tal, como detalhadamente apresentado na supracitada tese de doutorado, foram elaboradas atividades auxiliares visando apoiar os sujeitos na trajetória rumo à resolução do EC. Do ponto de vista teórico, de acordo com Camarena (2017), a fase didática da TMCC é fundamentada em preceitos construtivistas, especialmente nos enfoques: Psicogenético de Piaget, Sociocultural de Vygotsky e Cognitivo de Aprendizagem Significativa de Ausubel. Considerando esses pilares construtivistas, o objetivo da fase didática é trabalhar os conceitos matemáticos com os estudantes de forma a auxiliá-los no desenvolvimento de habilidades em transferir conhecimentos vinculados a tais conceitos para contextos extramatemáticos de aplicação. Atrelado à fase didática da TMCC está o Modelo

ISSN 2764-3158

Didático da Matemática em Contexto (MoDiMaCo), no qual, como detalha Camarena (2017; 2021) o estudante assume posição central, a de protagonista em sua aprendizagem, um sujeito que constrói seus conhecimentos trabalhando com os colegas em equipes colaborativas, contando com o apoio e orientação de seus professores. Ao implementar o evento por ela elaborado, Lopes (2021) trabalhou com os que são considerados os dois eixos orientadores do MoDiMaCo: a contextualização e a descontextualização. Na contextualização, que é interdisciplinar, foram explorados conhecimentos do Cálculo e da Transferência de Calor e, na descontextualização, que é disciplinar, aulas foram ministradas aos sujeitos da pesquisa sobre conhecimentos básicos relativos às equações diferenciais, com a realização de atividades individuais e em grupo visando à resolução de EDO de variáveis separáveis com a formalidade e rigor requeridos em um curso de graduação que visa formar um engenheiro civil.

Mas que conhecimentos deve construir ou mobilizar um docente que objetive elaborar e implementar um EC, como o apresentado na Figura 1, visando ensinar EDO de variáveis separáveis em cursos de Engenharia? É a esse respeito que passamos a discutir tendo por base o modelo MTSK.

3 O modelo MTSK: o porquê de sua escolha e uma breve caracterização

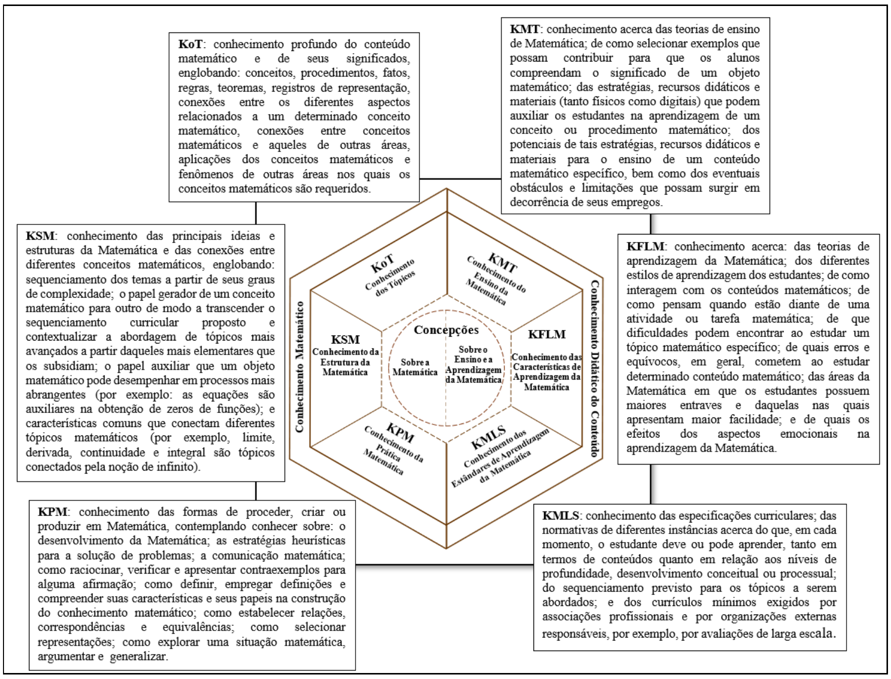
Para analisar os conhecimentos especializados que são necessários a um professor de Matemática que leciona na Engenharia para elaborar e implementar o EC apresentado na Figura 1, recorremos ao modelo MTSK - *Mathematics Teacher´s Specialized Knowledge (*Conhecimento Especializado do Professor de Matemática). O MTSK foi formulado pelo pesquisador espanhol José Carrillo Yánez e seus colaboradores a partir da premissa de que é necessário analisar os conhecimentos requeridos e mobilizados pelo professor de Matemática para executar suas tarefas (como planejar aulas, ministrá-las, refletir sobre elas, dialogar com colegas etc.) sempre levando em consideração a natureza *especializada* de tais conhecimentos, a qual influencia tanto no *Conhecimento Matemático* do docente, denotado no modelo por *Mathematical Knowledge* (MK), quanto em seu *Conhecimento Didático do Conteúdo*[3], o qual, no MTSK, é tratado por *Pedagogical Content Knowledge* (PCK). A concordância com a ideia de que o caráter especializado permeia todos os possíveis tipos de conhecimentos requeridos do professor de Matemática é que nos levou a optar pelo modelo MTSK, em detrimento de outros que têm sido mais explorados na literatura e que estão nas origens do desenvolvimento do MTSK como, por exemplo, o Conhecimento Didático do Conteúdo (PCK) formulado por Lee Shulman e o Conhecimento Matemático para o Ensino (MKT) proposto por Deborah Ball e seus colaboradores.

Cada um dos dois domínios de conhecimentos considerados no MTSK, a saber, MK e PCK são divididos em três subdomínios. O MK tem como subdomínios: *Knowledge of Topics* (KoT), ao qual nos referimos como *Conhecimento dos Tópicos*; *Knowledge of the Structure of Mathematics* (KSM), que denotaremos por *Conhecimento da Estrutura da Matemática*; e *Knowledge of Practices in Mathematics* (KPM) ao qual, em português, denominamos

[3] Uma das bases para a elaboração do modelo MTSK foi o trabalho de Shulman acerca dos conhecimentos docentes e, na versão original de seu trabalho *Knowledge and Teaching: Foudations of New Reform*, em língua inglesa (Shulman, 1987), o autor faz referência não ao Conhecimento Didático do Conteúdo, mas ao Conhecimento *Pedagógico* do Conteúdo (*Pedagogical Knowledge of Content* - PCK). No entanto, em 2005 o trabalho foi traduzido sob o título *Conocimiento y Enseñanza: Fundamentos de la Nueva Reforma* (Shulman, 2005) e nesta tradução foi empregado o termo *Conocimiento Didáctico del Contenido*. Em nossos estudos acerca do modelo MTSK, notamos que os autores, por terem se subsidiado nas ideias de Shulman, mantém nos textos em inglês, a denominação de um dos modelos do domínio como *Pedagogical Content Knowledge* (PCK), mas, nos textos em castelhano, apesar de manterem a sigla PCK, referem-se a este domínio por *Conocimiento Didáctico del Contenido*. Optamos então, neste artigo, por também utilizar o termo *didático*, ao invés de pedagógico, para sermos fiéis à opção feita pelos autores do modelo MTSK.

Conhecimento da Prática Matemática. Por sua vez, o PCK subdivide-se em *Knowledge of Mathematics Teaching* (KMT) – *Conhecimento do Ensino da Matemática*; *Knowledge of Features of Learning Mathematics* (KFLM) – *Conhecimento das Características da Aprendizagem de Matemática*; e *Knowledge of Mathematics Learning Standards* (KMLS) – *Conhecimento dos Estândares de Aprendizagem da Matemática* (Carrillo, Climent, Montes, Contreras, Flores-Medrano, Escudero-Ávila & Muñoz-Catalán, 2018). Permeando cada um desses domínios e subdomínios de conhecimentos estão, segundo pontuam Flores-Medrano, Escudero-Ávila, Montes, Aguilar e Carrillo (2014), as concepções que os professores têm tanto em relação à Matemática, quanto acerca de seu ensino e de sua aprendizagem. Na Figura 2, são apresentados os domínios e subdomínios que compõem o modelo MTSK bem como descrições sintéticas dos elementos que os constituem.

Figura 2: Modelo MTSK, seus domínios, subdomínios e elementos que os constituem



Fonte: Elaborado pelos autores a partir das ideias de D´Almeida (2021) e Carrillo *et al.* (2018)

No estudo que realizamos, não nos detivemos nas concepções dos docentes, mas apenas em seus conhecimentos especializados. Convém ressaltar que, a elaboração e a implementação de um EC, já pressupõe, por parte do professor, conhecimentos acerca da TMCC e de cada uma de suas fases com seus respectivos subsídios teóricos e procedimentos metodológicos. Em razão disso, na análise realizada não faremos menções a esses conhecimentos ao tratarmos dos subdomínios do MTSK nos quais eles poderiam ser mencionados. Mas, como identificamos os conhecimentos especializados requeridos de um professor para elaborar e implementar o EC na Figura 1? Apresentar os procedimentos metodológicos empregados para essa identificação é nosso objetivo na seção seguinte.

4 Procedimentos metodológicos adotados para a identificação dos conhecimentos

Como já mencionamos, o EC apresentado na Figura 1 foi elaborado por Lopes (2021), primeira autora deste artigo, em sua tese de doutorado, orientada pelo segundo autor do artigo. Durante a elaboração da tese, a autora não tinha por objetivo analisar os conhecimentos especializados requeridos pelo professor para elaborar e para implementar o evento e, portanto, sequer se preocupou com esse aspecto. No entanto, posteriormente, o segundo autor deste artigo, por já trabalhar, em algumas ocasiões, com o modelo MTSK e por, em 2024, ter

ISSN 2764-3158

ingressado na REDIBEROAMERICANA MTSK – que congrega pesquisadores da Argentina, do Brasil, do Chile, da Colômbia, da Costa Rica, do Equador, da Espanha, da Itália, do México, do Peru e da Venezuela, com o objetivo de promover o intercâmbio entre pesquisadores de países ibero-americanos, mais a Itália, envolvidos na educação e na formação profissional de professores de Matemática, e, desse modo, contribuir para a qualificação do conhecimento profissional dos professores de Matemática, dos formadores de professores de Matemática e, consequentemente, da aprendizagem dos alunos de diferentes países – deu início a um projeto de pesquisa, cujo objetivo era apresentar, sob a ótica do modelo MTSK, uma primeira sistematização dos conhecimentos especializados requeridos pelo professor que ensina Matemática na Engenharia, tanto no que se refere ao domínio MK e seus subdomínios, quanto relativamente ao domínio PCK e seus subdomínios, para elaborar, organizar didaticamente e implementar eventos contextualizados e, portanto, atuar em consonância ao que é previsto no âmbito da TMCC. Este artigo é o primeiro fruto desse projeto.

Para a identificação dos conhecimentos especializados que explicitamos na próxima seção, analisamos, sob a perspectiva da Análise de Conteúdo na acepção de Bardin (2001), todo o percurso vivenciado por Lopes (2021) para a construção do evento, enfocando, sobretudo, nas cinco etapas preconizadas na fase epistemológica da TMCC para a elaboração de um EC, as quais apresentamos na seção 2 deste artigo. A partir da leitura flutuante dos trechos da tese da primeira autora nos quais esse percurso é pormenorizadamente sumarizado, selecionamos estratos textuais (unidades de análise) que evidenciavam algum tipo de conhecimento especializado requerido pelo docente para elaborar ou implementar o evento visado. Em seguida, agrupamos estes estratos e, recorrendo ao que Bardin (2001) denomina de *procedimento por caixas*, categorizamos, considerando como categorias os subdomínios do modelo MTSK, os conhecimentos que pudemos identificar a partir desses estratos. Primeiramente, buscamos explicitar os conhecimentos especializados requeridos por um docente para o desenvolvimento e para a implementação, em um curso de Engenharia Civil, de um EC qualquer tendo EDO por objeto matemático; em seguida, complementamos essa análise com aqueles conhecimentos especializados identificados como complementares para um evento visando trabalhar, no mesmo curso de graduação, especificamente com EDO de variáveis separáveis em um contexto relacionado à Transferência de Calor por condução unidimensional e regime estacionário em uma parede plana.

5 Conhecimentos especializados requeridos para elaborar e implementar o EC em foco

Um professor que ensina Matemática em um curso de Engenharia Civil e que deseje desenvolver e implementar um EC qualquer objetivando vincular as EDO a um contexto extramatemático relacionado à futura área de atuação do graduando, necessitará construir e mobilizar uma série de conhecimentos docentes especializados, além, é claro, de conhecer, *a priori*, de modo detalhado a TMCC e todos os aspectos a ela relacionados. Vamos então explicitar esses conhecimentos antes de nos atermos àqueles complementares no caso específico de abordar um tipo particular de equação diferencial ordinária – as de variáveis separáveis – em um contexto especial relacionado à Transferência de Calor por condução unidimensional e regime estacionário em uma parede plana.

5.1 Primeira situação: um EC qualquer, na Engenharia Civil, envolvendo EDO

Tomando por referência o modelo MTSK, podemos afirmar que, em termos de KoT, em primeiro lugar, o docente deverá ter clareza de que uma equação diferencial se constitui por um conjunto de diferenciais relacionados entre si e que representam a variação, normalmente em relação ao tempo ou ao espaço, dos parâmetros presentes no fenômeno físico estudado (Rodríguez, 2009). Precisa ter sólidos conhecimentos acerca dos diferentes conceitos

ISSN 2764-3158

relacionados às EDO e se conscientizar acerca da dualidade inerente à notação $\frac{dy}{dx}$ que, em uma perspectiva (de Leibniz, Newton e Euler), representa o quociente entre variações infinitamente pequenas e, em outra, o limite de um quociente de incrementos (perspectiva de Cauchy). Deve atentar-se para o fato de que essas duas perspectivas permitem identificar duas formas de compreender $\frac{dy}{dx}$, estando a primeira diretamente relacionada ao modo como $\frac{dy}{dx}$ é empregado na resolução de problemas físicos, e a segunda, vinculada ao uso de $\frac{dy}{dx}$ normalmente presente em contextos intramatemáticos (Recalde & Henao, 2018). É necessário também que o docente conheça em quais situações ou problemas da Engenharia Civil as EDO são requeridas e de que modo os conhecimentos relacionados a esse objeto matemático são aplicados por profissionais dessa habilitação de Engenharia.

Em termos de KSM, é preciso que o professor conheça as principais ideias e estruturas da Matemática relacionadas às EDO, como os diferentes conceitos matemáticos relacionados a esse objeto se conectam (por exemplo, como $\frac{dy}{dx}$ vincula-se tanto à ideia de quociente entre variações infinitamente pequenas quanto ao limite de um quociente de incrementos) e que conceitos desempenham o papel de auxiliares para o estudo das EDO e dos processos matemáticos a elas relacionados.

Em relação ao KPM, é necessário que o docente conheça como se deu o desenvolvimento histórico das EDO, as situações que estiveram em seu cerne, a diversidade de contextos de sua utilização, os modelos matemáticos e obstáculos que podem ser identificados nesse processo e como esse desenvolvimento esteve atrelado a problemas de alguma forma relacionados à Engenharia. É relevante que o professor tenha conhecimentos de que, embora a resolução de problemas físicos tenha levado gradativamente a modelos matemáticos que envolviam o conceito de equações diferenciais, suas origens teóricas estão relacionadas com a resolução de alguns problemas advindos da Matemática, como o problema da isócrona, da quadratura da hipérbole, da braquistócrona, entre outros. Da mesma forma, as três leis de Newton e a lei da gravitação universal também foram fundamentais para o desenvolvimento das equações diferenciais (Sasser, 1992) e, a partir da consolidação dos conhecimentos acerca desse tipo de equação, o principal critério para avaliar como aceitável ou não a explicação para um fenômeno físico – como a gravitação – deixou de ser mecânico e passou a ser matemático (Roque, 2012). Além disso, é importante que o professor tenha conhecimento de que a teoria das equações diferenciais, desde o século XVII, tem envolvido três definições: a algébrica, na qual as soluções são representadas por meio de expressões algébricas explícitas ou implícitas, expansões em séries e expressões integrais; a numérica, na qual as soluções são expressas, de modo aproximado, por valores numéricos; e a geométrica, por meio da qual se caracteriza, do ponto de vista topológico, todo o conjunto de curvas que são soluções da equação diferencial considerada. O docente deve ainda ter ciência de que, no desenvolvimento da teoria das equações diferenciais, a abordagem algébrica predominou sobre a geométrica, introduzida somente no final do século XIX por Poincaré, mas que, a partir do início dos anos 1970, o interesse na abordagem geométrica, que permite uma análise qualitativa das soluções de uma equação diferencial, aliado ao desenvolvimento tecnológico cada vez mais acentuado, modificaram, significativamente, a natureza do domínio de estudo das equações diferenciais (Artigue, 1992; Artigue, 2009).

Relativamente ao subdomínio KMT, além de conhecer os exemplos de EDO, que são normalmente trabalhados na Engenharia Civil, primeiramente é importante que o professor tenha clareza de que, na maioria das vezes, nas situações de ensino, o termo *equação diferencial* é empregado para definir relações operacionais de derivação entre as variáveis dependentes e a variável independente relacionada a um determinado fenômeno, o que acaba, em muitos casos, levando os estudantes a classificarem um objeto como uma equação diferencial somente por nele estarem presentes derivadas. É necessário que o docente se conscientize de que essa ideia não está de acordo com a concepção apresentada originalmente por Euler, segundo a qual, como já comentamos, a equação diferencial representa um conjunto de diferenciais relacionadas entre si que representam a variação, em geral em relação ao tempo ou ao espaço, de um determinado fenômeno físico (Rodríguez, 2009).

Em relação ao conceito de diferencial, nos processos de ensino observa-se, na maioria das vezes, uma divergência: nos cursos de Cálculo, $\frac{dy}{dx}$ é utilizado na perspectiva de Cauchy, e, nos cursos de Física, na perspectiva de Leibniz, Newton e Euler. O professor deve, portanto, sempre levar em conta que, embora seja pertinente dar início ao processo de ensino de equações diferenciais por meio da modelagem de fenômenos, não se deve omitir os aspectos teóricos relativos a esse tipo de equação – como o conceito de diferencial, por exemplo – e nem deixar de oferecer aos estudantes momentos em que tais aspectos sejam aprofundados e relacionados com as técnicas de resolução que empregarão, bem como sejam discutidas as relações matemáticas presentes nas soluções das equações diferenciais (Recalde & Henao, 2018).

É relevante ainda que o professor tenha clareza de que, embora a abordagem geométrica das equações diferenciais tenha ganhado cada vez mais destaque nos domínios em que elas são trabalhadas, o ensino ainda está centrado na abordagem algébrica que caracterizou o desenvolvimento da teoria relativa a esse objeto matemático no século XVIII (Artigue, 1992). E, como pontuam Boyce e Diprima (2015), a priorização, no ensino, dos métodos algébricos para obtenção das soluções das equações diferenciais, evitando as representações gráficas que possam evidenciar aspectos importantes acerca do conceito de solução de uma equação diferencial, pode dificultar a efetiva compreensão, por parte do estudante, da solução obtida e convencê-lo, equivocadamente, de que sempre existirá uma "receita" que permitirá resolver algebricamente, de maneira exata, cada tipo de equação diferencial (Artigue, 1992). Desse modo, ao invés de o estudo das equações diferenciais se constituir como um elo entre a Matemática e as ciências em que estão inseridos os fenômenos modelados por essas equações, leva os estudantes a uma preocupação quase que exclusiva com os métodos de obtenção de soluções, deixando à margem os objetivos principais, que são: entender o processo que gerou determinada equação diferencial, bem como interpretar suas soluções com relação ao fenômeno que ela descreve (Habre, 2003). Torna-se primordial, então, que o professor compreenda a necessidade de, no ensino de equações diferenciais, enfatizar os aspectos geométricos de modelos matemáticos além dos aspectos algébricos, de dar o devido valor à questão da visualização, essencial no entendimento dos elementos dinâmicos relacionados às equações diferenciais, e de atribuir a mesma importância que dá as técnicas de resolução das equações diferenciais aos processos de formulação dos modelos, de interpretação de suas soluções e de análise dos comportamentos de tais soluções (Javaroni, 2009).

Relativos ao subdomínio KFLM, estão conhecimentos relativos às dificuldades cognitivas já identificadas acerca da aprendizagem de EDO; aos modos de interação dos estudantes com esse conhecimento matemático, que oportunizam que este seja transformado para ser aplicado em diferentes contextos; e aos aspectos essenciais para que efetivamente construam conhecimentos acerca desse tópico. O professor deve conhecer, por exemplo, que os estudantes, muitas vezes, enfrentam dificuldades em pensar simultaneamente sobre diferentes representações gráficas e algébricas (Habre, 2000). Precisa considerar que, como as dificuldades dos estudantes em compreender o conceito de função estão bem documentadas na literatura, é provável que os estudantes enfrentem-nas ao se depararem com a ideia de que as soluções para equações diferenciais são funções. E esse entrave é ainda agravado pelo fato de que a experiência anterior dos estudantes em relação às funções e com a palavra "resolver" geralmente exigia que eles determinassem um número (ou números) desconhecido(s). Nas equações diferenciais, entretanto, o "desconhecido" no qual se está interessado não é mais um número, mas uma função (Rasmussen, 2001). É necessário, portanto, que o professor esteja ciente de que, ao estudar equações diferenciais, muitas vezes os estudantes enfrentam entraves relacionados à formalização de noções básicas como função, derivada e equação; à elaboração da curva que representa a solução da equação diferencial; à aplicação de métodos de resolução algébrica e à validação de resultados diferenciais (Zang, Metzen & León, 2013). Especificamente em relação aos diferenciais e, mais particularmente, acerca da variação de diferenciais, Rodríguez (2009) pontua que, muitas vezes, os estudantes enfrentam dificuldades que são ocasionadas pelo significado geométrico que atribuem ao conceito de diferencial e, portanto, o professor deve ter ciência desse fato para nele buscar intervir.

É central também que o professor conheça algumas das dificuldades enfrentadas pelos estudantes na aprendizagem de equações diferenciais explicitadas por Rowland e Jovanoski (2004), Rowland (2006), Rodríguez (2009) e Dullius (2009), a saber: associação da resolução de equações diferenciais a um processo puramente analítico, enfrentando entraves para pensar simultaneamente de modo algébrico e gráfico; incompreensões conceituais relacionadas à noção de derivada, dentre as quais estão o não entendimento do que uma derivada (taxa de variação) significa; confusões entre a quantidade e a taxa de variação da quantidade, entre a função que descreve "como a quantidade varia" e a equação que descreve "como a taxa de variação da quantidade varia"; a não aceitação de que as soluções das equações diferenciais são funções, uma vez que estão habituados a compreender os números como solução; desconhecimento acerca da importância das unidades na manipulação de termos de equações diferenciais que representam sistemas reais; a tendência a ignorar a necessidade de consistência interna dos termos de uma equação diferencial ordinária, que precisam ter as mesmas unidades, deixando de levar em conta esse aspecto nos momentos em que sua consideração é necessária; não percepção de que as constantes de proporcionalidade também precisam ter unidades, considerando-as então como "números puros", sem unidades; não aceitação de uma solução geométrica de uma equação diferencial, porque não conseguem associá-la a uma representação analítica e pensam em função quando veem uma equação ou regra e não uma representação gráfica; não compreensão da conexão entre a equação diferencial e o sistema modelado, havendo, portanto, dificuldade em interpretar os termos de uma equação diferencial ordinária e em traduzi-los da descrição física para a descrição matemática; interpretação equivocada dos termos constantes das EDO, que muitas vezes são compreendidos pelos estudantes como condição inicial ou como uma quantidade máxima ou de equilíbrio, em vez de uma taxa de variação constante; ausência de visão global acerca do que representam as condições iniciais fornecidas em um problema; e incompreensão do conceito de diferencial na gestão de uma variável de um fenômeno em um determinado intervalo de tempo.

No subdomínio KMLS, estão conhecimentos acerca de quais são as competências matemáticas para a profissão – entendidas por Camarena (2021) como os conhecimentos, habilidades, atitudes e valores relacionados à Matemática que subsidiam o desenvolvimento daqueles conhecimentos, habilidades, atitudes e valores que, por suas centralidades para sua futura atuação profissional, um graduando de determinada área deve introjetar ao longo de sua formação universitária – que devem ser desenvolvidas pelos graduandos em Engenharia Civil; qual o papel do Cálculo Diferencial e Integral e, especialmente, das EDO na formação do futuro engenheiro civil; quais são o enfoque, a profundidade, as aplicações e as notações referentes às EDO, essenciais de serem considerados ao se planejar uma abordagem desse tópico em uma graduação em Engenharia Civil; quais aspectos acerca das EDO mais interessam e quais menos interessam para o futuro exercício profissional do engenheiro civil; em quais unidades curriculares do curso de Engenharia Civil estão previstas discussões matemáticas acerca das EDO e em que momentos do curso essas unidades curriculares estão inseridas; e qual é o tratamento dado às EDO por livros ou por outros materiais didáticos adotados como referências nessas unidades curriculares em que o tópico é trabalhado, especialmente no que diz respeito a como são apresentadas as definições, que tipos de exemplos são trabalhados, quais são e como são apresentados os exemplos de aplicações, quais são os aspectos históricos contemplados e como a tecnologia é utilizada.

Os conhecimentos especializados explicitados até o momento são os requeridos de um professor que objetiva, em um curso de Engenharia Civil, elaborar e implementar um EC tendo EDO por objeto matemático, quaisquer que sejam o tipo de equação diferencial ordinária a ser trabalhado e o contexto a ser explorado no evento. Mas, e se o docente optar por um EC tendo por foco a abordagem das EDO de variáveis separáveis em uma situação relacionada à Transferência de Calor por condução unidimensional e regime estacionário em uma parede plana, que outros conhecimentos especializados, além dos já elencados, ele precisará desenvolver e mobilizar? É o que discutimos na sequência.

5.2 Particularizando o tipo de EDO e o contexto: variáveis separáveis na Transferência de Calor por condução unidimensional e regime estacionário em uma parede plana

Em relação ao KoT, além dos conhecimentos elencados na seção anterior, é necessário que o professor conheça as aplicações das EDO, especialmente as de variáveis separáveis, no contexto da Transferência de Calor. Como detalhadamente apresentado em Lopes (2021), deve ser de domínio do professor que os processos de transferência de calor podem ser quantificados por meio de equações de taxa apropriadas, as quais são utilizadas para calcular a quantidade de energia sendo transferida por unidade de tempo. É preciso que o docente compreenda que a Transferência de Calor tem seu alicerce no domínio dos mecanismos físicos de troca de calor, podendo haver fenômenos térmicos de diferentes naturezas, cada um deles com uma modelagem matemática específica e sua correspondente equação de taxa. No caso da transferência de calor por condução, a equação de taxa é conhecida como *Lei de Fourier* e está relacionada à determinação do fluxo térmico, o qual depende do modo como a temperatura varia no meio considerado.

Para o EC em foco, no qual se trabalha com uma condução unidimensional e regime estacionário em uma parede plana, condições nas quais a distribuição de temperaturas é conhecida, linear e representada por T, o professor deve ter conhecimento de que o fluxo térmico $q''_x(W/m^2)$ é a taxa de transferência de calor na direção x por unidade de área perpendicular à direção da transferência e que esse fluxo é proporcional ao gradiente de temperatura, $\frac{dT}{dx}$, nessa direção e que, portanto, a equação da taxa de transferência (Lei de Fourier) é representada por: $q''_x = -k\frac{dT}{dx}$. O docente deve compreender também que essa lei é o princípio fundamental da transferência de calor por condução e define a condutividade térmica (sendo a constante de proporcionalidade k exatamente o coeficiente de condutividade térmica), importante propriedade dos materiais. É uma expressão vetorial e indica que o fluxo térmico é normal a uma isoterma no sentido da diminuição das temperaturas, aplicando-se a toda matéria, independentemente do seu estado físico. Além disso, o professor precisa ter ciência de que, uma vez que o fluxo térmico representa a taxa de transferência de calor por unidade de área, a taxa de transferência de calor por condução, $q_x(W)$, através de uma parede plana com medida de área A, será dada por $q_x = q''_x \cdot A$, ou seja, por $q_x = -kA\frac{dT}{dx}$ (Incropera

& Dewitt, 2014). É essencial, portanto, que, entre os conhecimentos docentes inseridos no subdomínio KoT esteja o de que a Lei de Fourier, no caso considerado, é uma equação diferencial ordinária de variável separável cuja solução é uma função que permite determinar a temperatura em qualquer ponto ao longo da largura da parede plana considerada.

No subdomínio KSM, mantém-se o que foi elencado na seção anterior, mas adquire fundamental relevância o conhecimento docente acerca da centralidade da ideia de constante de proporcionalidade como elemento matemático auxiliar no estudo das EDO de variável separável. Especialmente no EC considerado, é fundamental que o professor tenha conhecimentos consolidados acerca das conexões entre os conceitos de constante de proporcionalidade, que no caso assume um significado próprio como coeficiente de condutividade térmica do material, e de magnitude intensiva (que não depende da extensão do sistema, isto é, das dimensões ou da quantidade de matéria de um dado sistema).

No âmbito de KPM, o contexto do evento sinaliza a relevância de, além dos conhecimentos especializados explicitados na seção anterior, o professor ter ciência de que, historicamente, o estudo da propagação do calor em corpos sólidos dadas certas condições iniciais foi um cenário importante para a consolidação da teoria das equações diferenciais, com destaque para as contribuições de Joseph Fourier (1768-1830), presentes, sobretudo, no livro *The Analytical Theory of Heat* de 1822 (Roque, 2012). Além disso, acerca do processo de desenvolvimento do método de separação de variáveis para a resolução de uma classe específica de equações diferenciais, é desejável que o professor tenha ciência de que, em seu âmago, esteve o estudo do problema da tangente inversa, isto é, como determinar uma curva a partir de uma propriedade específica de uma dada reta tangente a ela (Simões, 2014).

Em relação ao domínio PCK, no caso do EC considerado, a complementação em relação aos conhecimentos já explicitados na seção anterior se dá somente no subdomínio KMLS, com KMT e KFLM permanecendo inalterados. Acerca de KMLS, incluem-se os conhecimentos a respeito do que se prevê em relação à abordagem das EDO de variáveis separáveis na Engenharia e o que se requer dos estudantes a esse respeito para que possam acompanhar adequadamente a disciplina Termodinâmica. É importante que o professor tenha conhecimento também de que, no livro adotado como referência na supracitada disciplina, em todas as situações trabalhadas ou exemplificadas não há, de fato, necessidade de os estudantes resolverem EDO. Estas são empregadas somente na discussão da teoria e na dedução das fórmulas apresentadas que, em um segundo momento, são diretamente empregadas nos exemplos e resoluções dos exercícios.

6 Considerações finais

As análises apresentadas na seção anterior constituem-se como um primeiro acercamento, sob a ótica do MTSK, aos conhecimentos especializados requeridos de um docente para elaborar e implementar um EC visando trabalhar com determinado objeto matemático, em uma habilitação específica da Engenharia, a partir de um contexto particular. Tendo por foco o ensino de EDO – especificamente as de variáveis separáveis – na Engenharia Civil, a partir de uma situação relacionada à Transferência de Calor por condução unidimensional e regime estacionário em uma parede plana, pudemos notar que muitos dos conhecimentos especializados que identificamos são independentes do tipo de equação diferencial ordinária a ser trabalhado, do contexto extramatemático específico considerado e da habilitação de Engenharia enfocada. São conhecimentos especializados que, idealmente, deveriam ser construídos e quando requeridos mobilizados por qualquer professor de Matemática que objetiva ensinar EDO na Engenharia. Ao optar por uma habilitação de Engenharia específica (a Civil no caso analisado), um contexto extramatemático específico (no

ISSN 2764-3158

caso a Transferência de Calor por condução unidimensional e regime estacionário em uma parede plana) e um tipo particular de EDO (no evento considerado as de variáveis separáveis), há, obviamente, alguns conhecimentos complementares que o professor precisará construir ou mobilizar, como evidenciamos em 5.2, mas estes são em menor número quando comparados àqueles que todo professor de Matemática que leciona na Engenharia, independentemente da habilitação em que atua, deveria ter em seu repertório.

Há, inclusive, uma série de conhecimentos que são essenciais até mesmo para aqueles professores que pretendem, em suas aulas na Engenharia, recorrer somente a contextos intramatemáticos. Em síntese, a análise realizada revela que uma parte significativa dos conhecimentos especializados explicitados não são necessários apenas para aqueles que desejam trabalhar determinado objeto matemático de modo contextualizado a partir de uma situação extramatemática. São, na realidade, fundamentais a todos os docentes que se preocupam com a efetividade de seu ensino e, consequentemente, com a aprendizagem de seus estudantes acerca de determinado conteúdo matemático.

Finalizamos este artigo ressaltando que é interessante observar que o percurso metodológico para a construção de eventos contextualizados, inerente à fase epistemológica da TMCC, mostra-se como relevante de ser vivenciado até mesmo por um docente que não pretenda elaborar e implementar um EC. Se ele considerar apenas o público com o qual irá trabalhar e o objeto matemático a ser abordado, a realização dos procedimentos inerentes a esse percurso irá lhe possibilitar construir ou sistematizar uma série de conhecimentos especializados fundamentais para ensinar, com efetividade, determinado objeto matemático. O percurso proposto na TMCC, que não deixa de ser a indicação de um caminho para estudos por parte do professor, constitui-se então como uma estratégia para a autoformação contínua do docente que objetive capacitar-se, cada vez mais, para exercer a docência, não somente na Engenharia, mas em qualquer curso de graduação para o qual a Matemática está a serviço.

Referências

Artigue, M. (1992). Functions from an algebric and graphic point of view: cognitive difficulties and teaching practices. In: G. Harel & E. Dubinsky (Eds.). *The concept of function: aspects of epistemology and pedagogy*. (pp. 109-132). Cambridge: Cambridge University Press.

Artigue, M. (2009). Didactical design in Mathematics Education. In: C. Winslow (Ed.). *Nordic Research in Mathematics Education: Proceedings from NORMA08 in Copenhagen*. (pp. 7-16). Rotterdam: Sense Publishers.

Bardin, L. (2001). *Análise de Conteúdo*. Lisboa: Edições 70.

Bianchini, B. L., Lima, G. L. & Gomes, E. (2019). Formação de Professor: reflexões da educação matemática no ensino superior. *Educação & Realidade*, 44(1), 01-22.

Boyce, W. E. & Diprima, R. C. (2015) *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno*. (10. ed.). Rio de Janeiro, RJ: LTC.

Camarena, P. (2013). A treinta anõs de la teoria educativa "Matemática en el Contexto de las Ciencias". *Inovación Educativa*, 13(62), 17-44.

Camarena, P. (2017). Didáctica de la matemática en contexto. *Educação Matemática Pesquisa*, 19(2), 01-26.

Camarena, P. (2021). *Teoría de la matemática en el contexto de las ciências*. Santiago del Estero: EDUNSE.

Camarena, P. & González, L. G. (2001). Contextualización de las series en ingeniería.

Científica: The Mexican Journal of Electromechanical Engineering, 5(4), 201-206.

Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D. & Muñoz-Catalán, M. C. (2018). The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education*, 20(3), 236-253.

Climent, N. (2023). Construcción de conocimiento especializado en la formación de profesorado. In: R. Delgado-Rebolledo & D. Zakaryan, D. (eds.). *Actas del VI Congreso Iberoamericano sobre Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas*. (pp. 9– 19). Valparaiso: Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.

Cunha, M. I., Bolzan, D. P. V. & Isaia, S. M. A. (2021). Professor da Educação Superior. In: M. C. Morosini (Org.). *Enciclopédia Brasileira de Educação Superior.* (vol. 1., pp. 273-346). Porto Alegre, RS: Edipucrs.

D'Almeida, J. (2021). As *concepções sobre o Teorema Fundamental da Aritmética de professores de Matemática da rede pública paulista, sob o olhar da teoria APOS*. 262 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo São Paulo, SP.

Dullius, M. M. (2009). *Enseñanza y aprendizaje en ecuaciones diferenciales con abordaje gráfico, numérico y analítico*. 502 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, RS.

Fiorentini, D., Passos, C. L. B. & Lima, R. C. R. (Orgs.) (2016). *Mapeamento da pesquisa acadêmica brasileira sobre o professor que ensina matemática: período 2001 – 2012*. Campinas, SP: FE/UNICAMP.

Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Montes, M., Aguilar, A. & Carrillo, J. (2014). Nuestra Modelación del Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas, el MTSK. In J. Carrillo et al. (Eds.), *Un Marco teórico para el Conocimiento Especializado del Profesor de Matemáticas*. (pp. 70-92). Huelva: Universidad de Huelva Publicaciones.

Frota, M. C. R., Nasser, L. (Org.) (2009). *Educação Matemática no Ensino Superior: pesquisas e debates*. Brasília: SBEM.

Habre, S. (2000). Exploring students' strategies to solve ordinary differential equations in a reformed setting. *Journal of Mathematical Behavior*, 18(4), 455-472.

Habre, S. (2003). Investigating students' approval of a geometrical approach to differential equations and their solutions. *International Journal of Mathematical Educations in Science and Technology*, 34(5), 651-662.

Howson, A. G., Kahane, J. P., Lauginie, P. & Turckheim, E. (1988). Mathematics as a Service Subject. In: R. R. Clementes (Ed.), *Selected Papers on the teaching of mathematics as a service subject*. (p. 1-19). Berlin: Springer Verlag.

Incropera, F. P., Dewitt, D. P. (2014). *Fundamentos de transferência de calor e de massa*. (7ª ed.). Rio de Janeiro: LTC.

Javaroni, S. L. (2009). O Processo de Visualização no Curso de Introdução às EDO. *Revista de Ensino de Engenharia*, 28(1), 17-25.

Lopes, R. (2021). *EDO de Variáveis Separáveis na Engenharia Civil: uma abordagem contextualizada a partir de um problema de transferência de calor*. 316 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo, SP.

ISSN 2764-3158

Palis, G. R. (2009). Pesquisa sobre a própria prática no Ensino Superior de Matemática. In: M. C. R. Frota & L. Nasser (Orgs.). *Educação Matemática no Ensino Superior: pesquisas e debates*. (pp. 203-221). Brasília: SBEM, 2009.

Rasmussen, C. L. (2001). New directions in differential equations: a framework for interpreting students' understandings and difficulties. *The Journal of Mathematical Behavior*, 20(1), 55-87.

Recalde, L. C. & Henao, S. M. (2018). Los obstáculos epistemológicos en el desarrollo histórico de las ecuaciones diferenciales ordinarias. *Revista EIA*, 15(29), 59-70.

Rodríguez, M. A. H. (2009). *Las ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de primer y segundo orden en el contexto del movimiento uniforme*. 2009. 132 f. Tesis (Doctorado en Ciencias en Matemática Educativa). Instituto Politécnico Nacional. Ciudad de México.

Roque, T. (2012). *História da matemática: uma visão crítica, desfazendo mitos e lendas*. Rio de Janeiro, RJ: Zahar.

Rowland, D. R. (2006). Student difficulties with units in differential equations in modelling contexts. *International Journal of Mathematical Educations in Science and Technology*, 37(5), 553-558.

Rowland, D. R. & Jovanoski, Z. (2004). Student interpretations of the terms in first-order ordinary differential equations im modelling contexts. *International Journal of Mathematical Educations in Science and Technology*, 35(4), 503-516.

Sasser, J. E. (1992). History of ordinary differential equations: The first hundred years. *Proceedings of the Midwest Mathematics History Society*, 1, 1-11.

Shulman, L. S. (1987). Knowledge and Teaching Foundations of the New Reform. *Harvard Educational Review*, 57 (01), 01-22.

Shulman, L. S. (2005). Conocimiento y Enseñanza: fundamentos de la Nueva reforma. *Revista de currículum y formación del profesorado*, 9 (02), 01-30.

Simões, C. A. E. (2014). *Equações diferenciais na física*. 176 f. Dissertação (Mestrado em Matemática para o Ensino). Universidade de Évora. Évora.

Zang C., Fernández Von Metzen G. & León, N. (2013). Un estudio de los errores de alumnos de ingeniería sobre ecuaciones diferenciales. *Educação Matemática Pesquisa*, 15(1), 83-100.