Ações mentais matemáticas identificadas em resoluções de avaliações de cálculo diferencial e integral

Mathematical mental actions identified in differential and integral calculus assessment resolutions

Emanuel Gomes Peixoto[1]
Karly Barbosa Alvarenga[2]

Resumo: Este estudo investiga ações mentais matemáticas em avaliações de Cálculo Diferencial e Integral no Curso de Física Médica da Universidade Federal de Goiás. Utilizando abordagem qualitativa, exploratória e descritiva, analisa resoluções de questões sobre funções e derivadas. É baseado em teorias de Pensamento Matemático Avançado, Neurociências Cognitivas e Metacognição, destacando-se o Modelo Teórico de Ações Mentais Matemáticas de Alvarenga e Domingos. Identificam-se ações como “conectar experiências anteriores”, “manipular algebricamente”, “interpretar”, “transpor informações”, “visualizar” e outras. Além disso, a ausência da ação mental "verificar" pode impactar negativamente na resolução. Recomenda-se a discussão dessas ações entre professores e estudantes para promover o avanço do pensamento matemático.

Palavras-chave: Pensamento Matemático Avançado. Neurociências Cognitivas. Ações Mentais. Cálculo Diferencial e Integral.

Abstract: This study investigates mathematical mental actions in Differential and Integral Calculus assessments in the Medical Physics Course at the Federal University of Goiás. Using a qualitative, exploratory, and descriptive approach, it analyzes resolutions of questions on functions and derivatives. It is based on theories of Advanced Mathematical Thinking, Cognitive Neuroscience, and Metacognition, highlighting the Theoretical Model of Mathematical Mental Actions by Alvarenga and Domingos. Actions such as "connecting previous experiences," "algebraic manipulation," "interpretation," "information transposition," "visualization" and others are identified. Furthermore, the absence of the "verify" mental action can negatively impact resolution. It is recommended that these actions be discussed among teachers and students to promote the advancement of mathematical thinking.

Key words: Advanced Mathematical Thinking. Cognitive Neurosciences. Mental Actions. Differential and integral calculus.

1 Para começar, um contexto

Pensar matematicamente, desenvolver o pensamento matemático, compreender como se aprende matemática e entender o raciocínio e a criatividade matemática tem sido uma preocupação de vários pesquisadores (Alvarenga, 2021; Alvarenga, Rocha, Carvalho, Soares & Lima, 2022; Stacey, 2006; Uyangör, 2019 e outros) e inclusive de matemáticos, como foi observado o interesse do próprio Hadamard. Inspirado por uma conferência de Poincaré na Sociedade de Psicologia em Paris, ele publicou, em 1944, o seu livro Psicologia da Invenção na Matemática, no qual discute sobre os processos mentais de desenvolvimento do pensamento matemático.

Sriraman (2004) ressalta ainda que:

[1] Universidade Federal de Goiás • Goiânia, GO – Brasil • emanuellgomees@gmail.com • https://orcid.org/0000-0001-9191-3363
[2] Universidade Federal de Goiás • Goiânia, GO – Brasil • karly@ufg.br • https://orcid.org/0000-0001-7670-8548

BY NC SA
ISSN 2764-3158

> Mathematical creativity has been simply described as discernment, or choice (Poincaré, 1948). According to Poincaré (1948), to create consists precisely in not making useless combinations and in making those which are useful and which are only a small minority. Poincaré is referring to the fact that the "proper" combination of only a small minority of ideas results in a creative insight whereas a majority of such combinations does not result in a creative outcome. (Sriraman, 2004, p. 19)

Seja qual for o caminho traçado para tentar descobrir e impulsionar o raciocínio matemático analisado e narrado pelos próprios estudantes e, mormente, pelos próprios matemáticos, tem-se hoje a ajuda de alguns aparelhos que podem mapear as áreas de ativação cerebral, como a Ressonância Magnética Funcional e o Eletroencefalograma. O primeiro mede a quantidade de oxigênio, por meio da hemoglobina, que determinadas partes cerebrais recebem quando se estuda um conteúdo matemático. Para isso, questões matemáticas adequadas são preparadas com esse fim e também são utilizados *softwares* especiais e recursos estatísticos. São pesquisas muito caras e o Brasil ainda não investe nesses estudos, mas pesquisadores de países como França (por exemplo, Dehane e Amalric), Israel (Mark Leikin e Roza Leikin), Canadá (Daniel Ansari), Bélgica (Bert De Smedt), Áustria (Holand Grabner), Singapura (Kerry Lee e Zee Ying Lim), Inglaterra (Sven Braeutigam) e outros fazem pesquisas nessa linha. Para isso, possuem aparelhagens e equipes multidisciplinares que conseguem fazer o mapeamento e outros estudos que possibilitam obtermos mais conhecimentos sobre as capacidades matemáticas dos participantes.

Assim, nos propusemos a estudar as teorias sobre o pensamento matemático (PM) com vistas a encontrar caminhos que nos conduzissem às práticas e direcionamentos mais aplicados, mais simples e que subsidiassem o desenvolvimento do conhecimento matemático de professores e estudantes não só, mas também, do ensino superior. Desde a década de 1990, a comunidade de Educação Matemática vem se preocupando em entender antigas teorias e postular novas sobre tal desenvolvimento.

Pesquisas desenvolvidas por estudiosos como Domingos (2003), Grabner *et al.* (2017), Nomura (2014), Leikin, M.; Waisman; Shaul & Leikin, R. (2014), entre outros, respaldam a necessidade de uma ressignificação do que é aprender e compreender. Nesse caso, a neurociência mostra, conjuntamente com seus aparatos tecnológicos, que o cérebro possui zonas específicas relacionadas à aprendizagem matemática, que a topologia cerebral tem sido alterada na evolução humana e que novos conhecimentos de como o ser humano aprende têm surgido.

Nessa tessitura, esta investigação pretende reconceituar e revisitar algumas teorias postas, ampliando-as. Aqui, utiliza-se uma definição dilatada de teoria baseada em autores como Asiala *et al.* (1996), Sierpinska e Kilpatrick (1998), Pegg e Tall (2005) e Radford (2012). Com o intuito de situá-la e não discutir o que vem a ser uma teoria e o papel dela na Educação Matemática, o que se busca é interpretar uma teoria sob um ângulo pelo qual se analisa e ou se coletam dados empíricos ou até mesmo bibliográficos. Por exemplo, se quero analisar como se desenvolve o PM de um determinado grupo de estudantes no final do ensino médio, mediante o conteúdo de funções, devo ter critérios e referências para iniciar essa análise.

Ao ter contato com os pressupostos teóricos apontados inicialmente por Tall (1991), Dubinsky (1991), Harel e Swoder (2005) e outros, e aos utilizá-los para uma investigação sobre o esboço gráfico de estudantes recém-ingressos no ensino superior (Alvarenga & Ferreira, 2017), observamos que os conceitos utilizados pelos autores ainda precisavam de ajustes. Além disso, percebemos que poderíamos agregar novas características, as da

ISSN 2764-3158

Neurociências Cognitivas, para ampliar, direcionar e aprofundar os conhecimentos sobre o Pensamento Matemático.

Inquietos sobre a quantidade de ações mentais inconscientes, mas importantes para virem à superfície da mente, e conhecedores das inúmeras áreas de ativações cerebrais de diferentes conteúdos matemáticos quando estão sendo estudados, surgiu essa pesquisa que vem sendo aprofundada ano a ano (Alvarenga & Ferreira, 2017; Alvarenga & Domingos, 2021; Alvarenga *et al.* 2022; Alvarenga, 2023) e que aqui apresentamos um recorte. Nesta ocasião, somos orientados pela questão investigativa: que tipo de ações mentais matemáticas são importantes serem mobilizadas quando se estuda uma situação-problema? Que tipo de ações mentais podem surgir quando se analisa as respostas de um estudante de Cálculo Diferencial e Integral (CDI)?

2 A metodologia de pesquisa

A pesquisa da qual originou esse trabalho é do tipo qualitativa com traços exploratórios, descritivos e explicativos. O primeiro passo foi um amplo mapeamento sobre Pensamento Matemático Avançado e Neurociências Cognitivas e Matemática (Neuromatemática), realizado em plataformas como: Periódicos da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) e *Education Resources Information Center* (ERIC), utilizando descritores direcionados. Depois de selecionados os trabalhos, procedidas as leituras e as categorizações, vieram as interpretações e os debates no grupo de Pesquisa em Educação Matemática (Portugal). Assim, surgiu o primeiro O Modelo Teórico de Ações Mentais Matemáticas (MTAMM) (Alvarenga & Domingos, 2020).

Ele começou a ser aplicado em 2020 com o intuito de analisar e destacar as ações mentais nas resoluções de avaliações de estudantes de Cálculo Diferencial e Integral e também de Ensino Médio. Dessa forma, ele foi sendo revisto e ampliado de acordo com o avanço das investigações e com os debates no Grupo de Estudos em Educação Matemática (GEEM). Os participantes do GEEM muito colaboraram e colaboram para o refinamento dos estudos sobre esse modelo.

Para o recorte aqui apresentado, coletamos 41 resoluções de uma avaliação com três questões que versavam sobre limites e derivadas de funções, realizada em duplas em um curso de Física Médica da Universidade Federal de Goiás. Neste trabalho, apresentamos como exemplo as discussões de uma questão respondida por duplas diferentes, escolhidas aleatoriamente entre aquelas que obtiveram acertos totais ou parciais. Selecionamos essas resoluções para discussão por conterem mais argumentações. Elas foram analisadas de acordo com o MTAMM, com o objetivo de identificar as ações mentais possivelmente mobilizadas por esses participantes. Ressalta-se que os estudantes não tiveram contato com o modelo teórico e que todo o processo foi devidamente autorizado pelo Conselho Ético de Pesquisa da instituição cedente.

3 O Modelo Teórico de Ações Mentais Matemáticas (MTAMM)

Lester (2005) reflete sobre o uso da teoria em Educação Matemática em resposta à pergunta: por que muitos de nossos trabalhos são ateóricos? Nesse sentido, ele pontua que:

> A pesquisa sobre educação matemática é uma área interessante e importante para analisar a resposta. Embora ela tenha sido caracterizada por menos de 15 anos atrás, por Kilpatrick (1992) e outros, como largamente *ateórica*, uma leitura recente de artigos em grandes revistas do MER revelam que a teoria está viva e bem: de fato, Silver e Herbst (2004) observaram que expressões como "baseada na teoria",

ISSN 2764-3158

> "estrutura teórica" e "teorização" são comuns. Na verdade, eles afirmam que existem artigos que muitas vezes são rejeitados por serem ateóricos. O mesmo se aplica às propostas apresentadas para as Conferências do PME. No entanto, persistem as preocupações levantadas há décadas: muitas vezes pesquisadores ignoram, interpretam mal ou fazem mal uso de uma teoria em seu trabalho. (Lester, 2005, p. 173)

Assim, surge uma proposta de ampliação de referências teóricas que possibilitem avançar o pensamento matemático. Ela não tem por objetivo, de forma alguma, substituir debates já consolidados sobre essa temática, mas sim servir de uma referência mais abrangente para práticas dos docentes e estudantes, quando preparam suas aulas ou se embrenham para as resoluções.

O que se percebe é que se alguns processos do PM são discutidos e identificados, pode-se ajudar os alunos a avançar em suas construções. Desse modo, eles podem ter mais sucesso em matemática por meio de ações metodológicas de ensino direcionadas e específicas para esse fim, para a consciência das ações mentais possíveis e necessárias de serem mobilizadas conscientemente mediante uma resolução. Assim, é possível auxiliar tanto os estudantes quanto os professores a introduzirem explicitamente tais ações mentais em suas aulas, além de viabilizar um redirecionamento dos livros textos do ensino superior.

Depois de conhecer as inúmeras áreas cerebrais de ativação (Alvarenga, 2020), de entender que somente as repetições de exercícios não fornece a criação de novos caminhos sinápticos (Migliori, 2013) e de saber que, para avançar o pensamento matemático, é necessário mobilizar vários processos mentais, elaboramos, com base em experiências sobre o pensamento matemático avançado e em recentes descobertas das neurociências cognitivas e da metacognição, uma lista de ações mentais matemáticas possíveis de serem mobilizadas na resolução de uma situação-problema. O objetivo primordial dessa lista ou Modelo Teórico de Ações Mentais Matemáticas (Tabela 1) é auxiliar os estudantes e os professores a terem consciência dos possíveis caminhos matemáticos que podem ser acessados na elaboração de atividades (ou exercícios), resolução delas e preparação das aulas, isto é, em ocasiões de ensino e aprendizagem em qualquer nível escolar, dependendo somente da complexidade do conteúdo.

Tabela 1: Modelo Teórico de Ações Mentais Matemáticas (MTAMM)

Algebrizar (AM 1)	Analisar a direção inversa da manipulação (AM 2)	Argumentar de forma textual, sem a formalização ou a linguagem matemática (AM 3)
Classificar (AM4)	Coletar informações/dados (AM 5)	Comparar por meio de problemas semelhantes (AM 6)
Compensar (AM 7)	Conectar experiências anteriores (*met-before*) (AM 8)	Conjecturar (AM 9)
Convencer o outro, explicar verbalmente (AM 10)	Criar a própria linguagem matemática (AM 11)	Dar contraexemplos (AM 12)
Demonstrar, provar (AM 13)	Distinguir o que são hipóteses e o que é tese (AM 14)	Elaborar casos particulares (AM 15)
Empregar propriedades dos números reais	Encapsular processos em objetos, descapsular objetos	Enumerar etapas (AM 18)

ISSN 2764-3158

(AM 16)	em processos (AM 17)	
Estimar, fazer aproximações (AM 19)	Evidenciar (AM 20)	Fazer “mostrações” (AM 21)
Fazer analogias entre outros conteúdos (AM 22)	Fazer operações com números reais (AM 23)	Flexibilizar contextos (AM 24)
Flexibilizar interpretações (AM 25)	Formalizar (AM 26)	Generalizar (AM 27)
Geometrizar (AM 28)	“Graficar” (AM 29)	Identificar +98+(AM 30)
Induzir (AM 31)	Inferir (AM 32)	Interpretar (AM 33)
Investigar (AM 34)	Manipular Algebricamente (AM 35)	Manipular expressões da direita para a esquerda, quando possível. Reverter (AM 36)
Manipular expressões de baixo para cima (AM 37)	Modelar (AM 38)	“Numerizar” (AM 39)
Organizar, desorganizar e reorganizar (AM 40)	Repensar, refazer e repensar, isto é, tentar, tentar e tentar… (AM 41)	Representar (AM 42)
Simplificar (AM 43)	Sintetizar (AM 44)	Tabelar (AM 45)
Traduzir da língua materna para a linguagem matemática simbólica (AM 46)	Traduzir da linguagem matemática para a língua materna (AM 47)	Transpor ideias (mudar de um contexto para o outro) (AM 48)
Transpor informações (estar coerente; conectar informações) (AM 49)	Usar linguagem matemática adequada (AM 50)	Verificar (AM 51)
Visualizar (AM 52)		

Fonte: Alvarenga & Domingos (2020)

4 Uma aplicação do MTAMM

A discussão que propomos nessa seção faz parte de uma pesquisa maior, na qual investigamos as ações mentais matemáticas mobilizadas por estudantes ao responderem avaliações escritas de CDI. Nesse sentindo, ao longo dessa análise, discutimos a natureza do Pensamento Matemático Avançado, que está relacionado à habilidade do indivíduo em estabelecer conexões entre os mais variados processos mentais (Messias, 2018, p. 35).

Embora não exista um consenso absoluto sobre o significado do termo Pensamento Matemático Avançado, há uma compreensão geral que, para ele ser alcançado, é necessário mobilizar os diversos processos mentais como abstração, generalização, sintetização, visualização e outros (Messias, 2018, p. 32; Dreyfus, 1991). De fato, ao enfrentar uma determinada situação-problema matemática, uma variedade deles será estimulada, muitas vezes de maneira inconsciente pelo estudante.

A indagação que surge nessa pesquisa está diretamente relacionada a quais desses processos emergem nesse enfrentamento. Portanto, optamos por investigar a partir de uma questão (Q1) (vide Quadro 1) extraída de uma das avaliações da disciplina de CDI. A

ISSN 2764-3158

discussão é realizada com base em duas resoluções, feitas em duplas, nomeadas respectivamente por (R1, R2). A fim de situar o leitor, devemos alertar que, ao longo da análise, as ações mentais identificadas estão destacadas em negrito. Isso tem o objetivo de facilitar a identificação dessas ações conforme apresentadas no MTAMM.

Quadro 1: Questão aplicada na prova de CDI

1. Dada $k(n) = n(n-1)^2$ a. Encontre: - A(s) raíz(es) de $k(n)$, se existirem; - Os pontos críticos, se existirem; - Os pontos de máximos e mínimos, se existirem; - As regiões de crescimento e decrescimento de $k(n)$; - Os pontos de inflexão, se existirem; - As concavidades e suas respectivas regiões; - O $\lim_{n\to\infty} k(n)$ e o $\lim_{n\to-\infty} k(n)$. b. Utilizando as todas as respostas acima esboce o gráfico de $k(n)$. O esboço do gráfico só será aceito se forem utilizados os itens da letra a).

Fonte: Dados da pesquisa

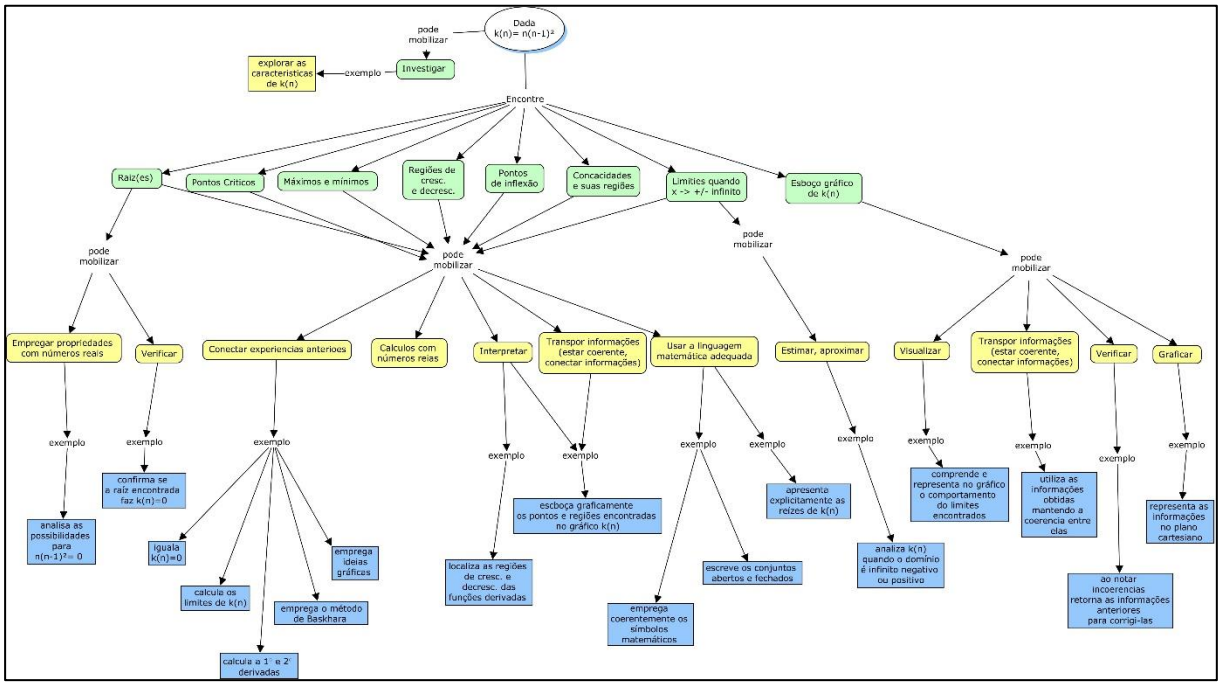
É importante justificar que a Q1 foi selecionada devido à sua amplitude investigativa do conceito de função e seu esboço gráfico. O emprego do verbo “encontre” no enunciado induz os estudantes a **investigar (AM 34)** $k(n)$ utilizando ferramentas e conceitos referentes ao CDI. Ao fim do exercício, no último item, solicita-se que os respondentes usem as informações obtidas para realizar o esboço do gráfico da função. Essa complexidade pode gerar a mobilização de várias ações mentais, em diferentes níveis de ativação.

A princípio, podemos observar que é possível mobilizar ações mentais, pois o estudo de derivadas está relacionado também à sua aplicação para o esboço de gráficos de funções a partir da análise da 1° e 2° derivada, das análises de pontos de máximos e mínimos, pontos de inflexão, regiões de crescimento, decrescimento e concavidades da função. Embora exista essa possibilidade quando professores e estudantes se empenham para que o ensino seja reflexivo quanto aos significados desses itens, muitos estudantes os tomam como se fosse uma receita de bolo, decorando o passo a passo a fim de atingir seu objetivo final, isto é, resolver mecanicamente. Essa ambiguidade pode gerar, por outro lado, a não mobilização de diversas AM importantes para a resolução correta da questão.

As regras de derivação são apresentadas, geralmente, após um longa e profunda discussão sobre o que é derivada de uma função e seu significado. A intenção dos autores de livros didáticos e de professores de CDI é munir o estudante de ferramentas que tornem a derivação de uma função qualquer menos penosa. Embora aprender regras exija do aprendiz memorização e prática, é interessante perceber que as ações matemáticas relacionadas a esse conteúdo desencadeiam AM como **manipular algebricamente (AM 35)**, **conectar experiências anteriores (AM 8)**, **fazer operações com números reais (AM 23)**, **transpor informações (AM 49)**, **visualizar (AM 52)** e **verificar (AM 51).** A seguir, elaboramos um mapa conceitual (vide Figura 1) que ilustra as possibilidades de ativação em cada fragmento da Q1.

Figura 1: Possibilidades de mobilização das AM na Q1

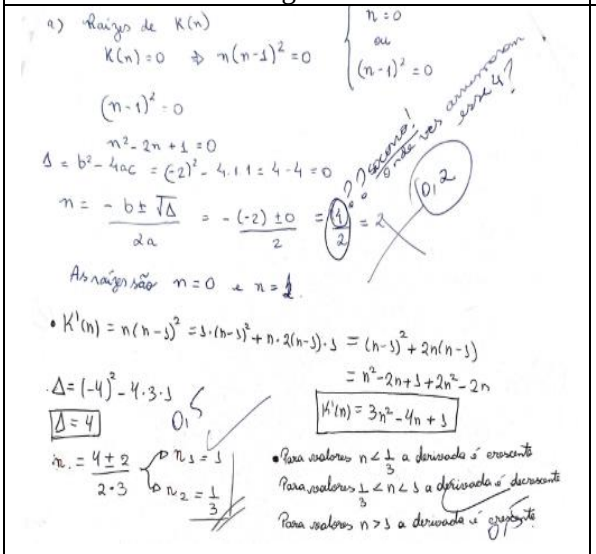
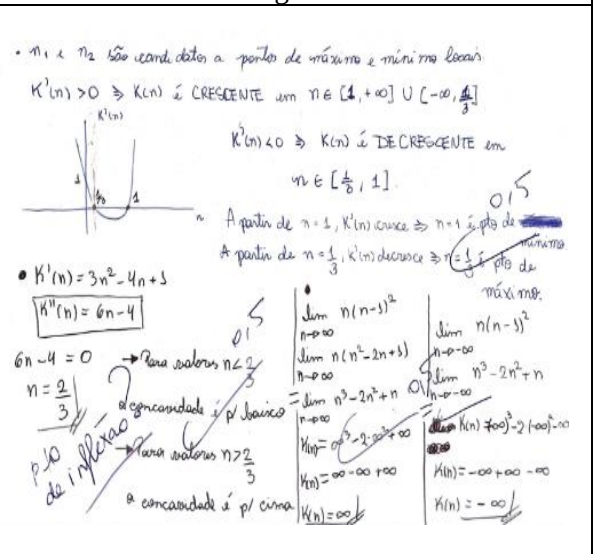
ISSN 2764-3158



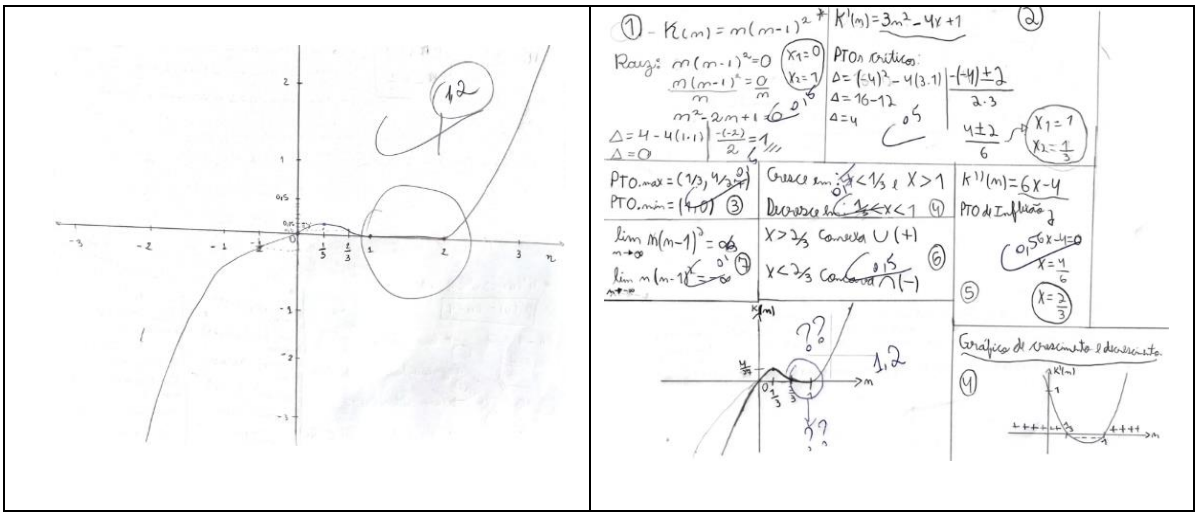
Fonte: elaboração própria

Em algum momento, o estudante pode esbarrar em barreiras conceituais causadas pela falha em algumas dessas AM ou também pela não interação entre elas. O mais importante nesse caso é a ativação constante delas para que os caminhos sinápticos se fortaleçam e o aprendizado sobre o conceito se estabeleça. Diante dessa especulação inicial, podemos identificar e discutir algumas dessas AM nas resoluções selecionadas para esse recorte, R1 e R2.

Quadro 2: Respostas analisadas (R1 e R2)

Fragmento da R1	Fragmento da R1
	
Fragmento da R1	R2

CC BY NC SA
ISSN 2764-3158



Fonte: Dados da pesquisa

Ao analisar as respostas de alguns estudantes, identificamos de início uma preocupação com a organização, apresentando os cálculos e justificativas. Quando isso ocorre, ficam mais evidenciadas as ações mentais mobilizadas em cada passo da construção matemática. Para encontrar as raízes da função $k(n)$, os respondentes conseguiram **conectar experiências anteriores** ao conteúdo de funções polinomiais de 2° grau. Além disso, podemos imaginar que seu entendimento sobre a(s) raiz(es) da função está relacionado diretamente ao seu gráfico (quais valores de n resultam em uma imagem igual a zero), ou seja, eles mobilizaram outras ações mentais.

Por exemplo, na igualdade $n(n-1)^2 = 0$, existem duas possibilidades para que essa sentença seja verdadeira: $n = 0$ ou $(n-1)^2 = 0$. Logo, estão mobilizando a AM **empregar propriedades com os números reais (AM16).** Essa conclusão é resultado de uma propriedade de operação da multiplicação entre números reais, portando, inconscientemente, ao concluir essas duas possibilidades, estão também **conectando experiências anteriores** a outros conteúdos de matemática básica.

Apesar de demonstrarem uma resposta correta, na R1 não utilizam a **linguagem matemática adequada (AM 50)** quando escrevem "as raízes de $k(n) = 0{,}1$". Um simples equívoco de escrita matemática altera totalmente o resultado obtido. Erros desse tipo muitas vezes passam despercebidos aos olhos dos alunos e, com frequência, são desconsiderados pelos avaliadores em avaliações pelo entendimento de que não alteram a construção realizada pelo estudante. Porém, a escrita matemática e a organização são etapas fundamentais para compreender e avançar a matemática em qualquer nível. O que queremos alertar é que, com a mobilização da AM 50, o estudante estará munido de uma ferramenta poderosa nas suas construções mentais e resoluções de situações-problema matemáticas.

Outro fragmento que tem destaque nessa análise se encontra nos itens iniciais, pois além de usar das propriedades dos números reais, os respondentes **fazem operações com os números reais**. Essa ação mental tem um papel fundamental no desenvolvimento do PMA, pois ela não representa apenas os processos algorítmicos de operações numéricas, mas um entendimento amplo sobre as propriedades das operações entre os números, como frações, potenciação, radiciação e outros. Embora seja encarada como uma ação mental básica, é nela que muitos estudantes encontram dificuldades para avançar na resolução correta.

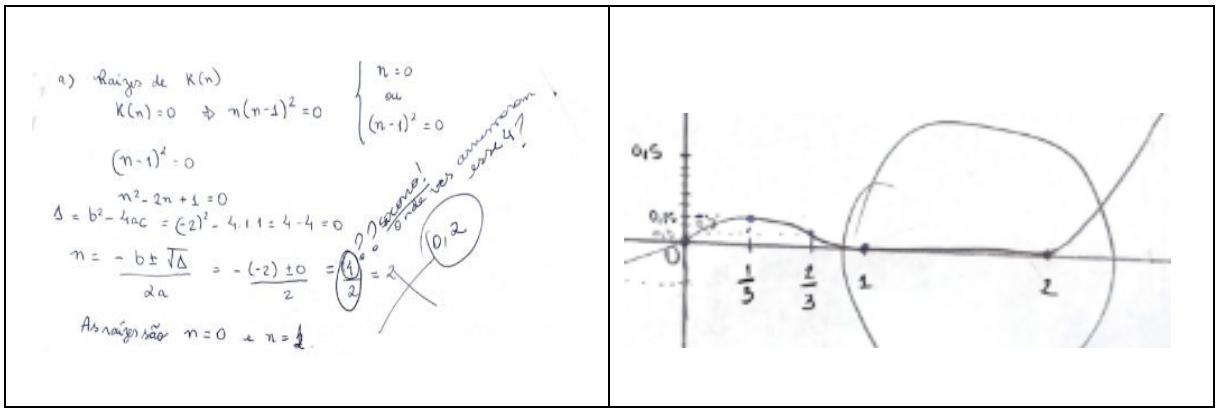
A Q1 exige um processo intenso de **visualização,** uma ação mental que deve estar presente em quase todas as resoluções do exercício, conectando-se com **manipular**

ISSN 2764-3158

algebricamente e **"graficar" (AM 29).** Nesses exercícios, visualizar as raízes, pontos críticos, pontos de inflexão e outros, significa **interpretar** a manipulação algébrica de cada item com o comportamento do gráfico das derivadas e da função $k(n)$. Além disso, é fundamental a visualização e exame de como o comportamento das funções derivadas influencia no comportamento da função original.

Há inda, no item *"b"* da Q1, uma relação entre **visualizar, verificar, "graficar"** e **transpor informações (estar coerente)** que merece nossa atenção. Essas ações mentais somente vão possibilitar uma resposta correta ao exercício se usadas de modo simultâneo, correlacionadas entre si. Vejamos na R1 que, apesar da mobilização da maioria dessas ações, uma delas poderia evitar uma incoerência no seguinte trecho.

Quadro 3: Recorte da R1



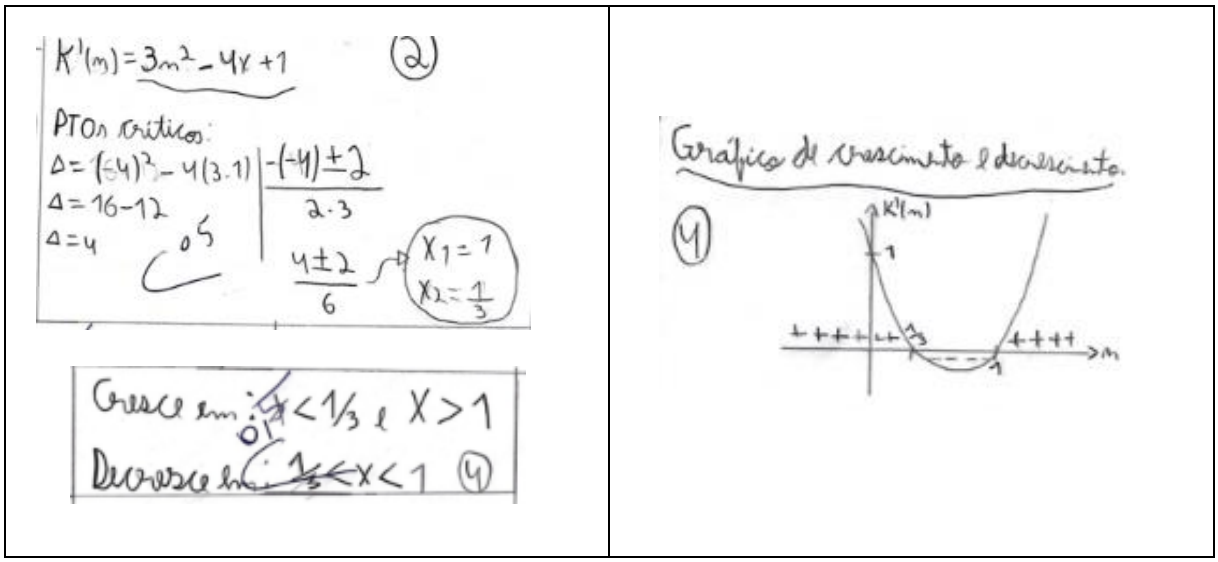
Fonte: Dados da pesquisa

São encontradas duas raízes para função $k(n)$, porém são representadas no gráfico três raízes distintas. Ao olhar com mais atenção, é considerado o $n = 2$ como uma das raízes, o que é um equívoco, provavelmente relacionado a **AM 23.** Não podemos afirmar os motivos para essa falha, mas podemos especular que geralmente estudantes não verificam se os valores encontrados realmente tornam $k(n) = 0$. Ou seja, na resposta do item à esquerda, esse erro poderia ser evitado realizando o processo de **verificar**. Em seguida, ao **representar** a função por meio de um gráfico, deixando-a linear no intervalo [1,2], os respondentes se depararam com uma nova oportunidade de **verificar** o motivo de tal incoerencia. Por $k(n) = n(n-1)^2$ ser de grau três, é compreensível que tenham procurado esboçar o gráfico com três raízes distintas, entretanto, seus cálculos evidenciaram anteriormente, ao encontrar $\Delta = 0$, que a equação quadrática $(n-1)^2$ possui uma única solução real, também chamada de raiz dupla, nesse caso $n = 1$.

Um outro exemplo interessante da mobilização das AM **visualizar, graficar e interpretar** pode ser observado em um fragmento da R2.

Quadro 4: Recorte da R2

ISSN 2764-3158



Fonte: Dados da pesquisa

Além de usarem recursos visuais para interpretar como o comportamento da função derivada influencia o comportamento da função original, os estudantes estão contectando informações entre os itens do exercício, esboçando o gráfico de $k'(n)$ utilizando suas raízes já encontradas anteriormente. Eles conseguiram interpretar corretamente os conceitos de crescimento e decrescimento a partir da derivada, reforçando seu entendimento sobre a relação entre a função original e sua derivada.

5 Reflexões

A análise das resoluções apresentadas ilustra claramente como a mobilização de ações mentais matemáticas é importante para resolver situações-problema complexas e, além disso, para aprender matemática em qualquer contexto. O uso de derivadas de funções para compreender o comportamento de uma função em seu esboço gráfico é um exemplo evidente de como diversas ações mentais interagem para construir o conhecimento matemático. Nesse sentido, é importante reforçar que estudantes e professores devem estar atentos a como o pensamento matemático é constituído e como o MTAMM pode fornecer subsídios para que se avance em sua construção.

> Mathematical thinking is not only important for solving mathematical problems and for learning mathematics. […] Providing opportunities for students to learn about mathematical thinking requires considerable mathematical thinking on the part of teachers. […] a teacher requires mathematical thinking for analysing subject matter (p. 4), planning lessons for a specified aim (p. 4) and anticipating students' responses (p. 5). These are indeed key places where mathematical thinking is required. (Stacey, 2006, p. 43)

Portanto, essa relação simbiótica entre ensino e aprendizagem ressalta a necessidade de uma abordagem de ensino respaldada na capacidade de pensar sobre o próprio pensamento, isto é, compreender, avaliar e reformular seus próprios processos cognitivos. No caso aqui discutido, isso pode ajudar na superação de barreiras conceituais de conteúdos avançados em matemática, desencadeando o avanço do pensamento matemático.

Referências

ISSN 2764-3158

Alvarenga K. & Ferreira C. (2017). Pensamento Matemático Elementar Versus Pensamento Matemático Avançado: uma análise de Esboços Gráficos de Funções em Cálculo Diferencial e Integral. In*: VIII CONGRESO IBEROAMERICANO DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA. LIBRO DE ACTAS* (pp. 575-583). Madrid, Espanha.

Alvarenga K. B. (2023). Avançando o Pensamento Matemático com base nos resultados das Neurociências Cognitivas. In: *XVI CIAEM-IACME*. Lima, Peru.

Alvarenga, K. B. & Domingos, A. (2020). *Ressignificação do pensamento matemático avançado*. Relatório de pós-doutorado (não publicado).

Alvarenga, K. B. & Domingos, A. (2021). Conexões entre neuroeducação e formação de professores. *Revista Internacional de Formação de Professores (RIPF), 6*, 1-24.

Alvarenga, K. B. (2020). Neurociência cognitiva e matemática. In: R. C. Dörr & R. S. P. Neves (Org.). *Cenários de pesquisa em educação matemática* (pp. 198-229). Jundiaí, SP: Paco Editorial.

Alvarenga, K. B. (2021). Maneiras de avançar o pensamento matemático na educação básica com respaldo das neurociências. In: E. C. Faria; M. A. G. Júnior & M. G. Moraes. *A educação matemática na escola: pesquisas e práticas goianas* (e-book) (pp. 44-58). Goiânia: Centro Integrado de Aprendizagem em Rede (CIAR).

Alvarenga, K. B.; Rocha, C. N.; Carvalho, P. T.; Soares, M. J. & Lima, J. A. (2022). Investigação acerca das possíveis ações mentais desenvolvidas por estudantes do 1º ano do ensino médio no retorno às aulas presenciais. *Amazônia- Revista de Educação em Ciências e Matemática*, *18*(41), 176-187.

Asiala, M.; Brown, A.; De Vries, D. J.; Dubinsky, E. Mathews, D.; Thomas, K. A (1996). Framework for research and curriculum development in undergraduate mathematics Education. *CBMS Issues in Mathematics Education, 6*, 1-32.

Domingos, A. (2003). *Compreensão de conceitos matemáticos avançados – a matemática no ensino superior*. 387f. Tese (Doutorado em Ciências de Educação). Faculdade de Ciências e Tecnologias. Universidade Nova Lisboa, Lisboa.

Dreyfus, T. (1991). Advanced Mathematical Thinking Processes. In: D. Tall (Org.). *Advanced Mathematical Thinking*. (pp. 25-41). Kluwer Academic Publisher.

Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. In: D. Tall (Org.). *Advanced Mathematical Thinking*. (pp. 95-123). Kluwer Academic Publisher.

Grabner, R. H.; Obersteiner, A.; Smedt, B., Vogel, S.; Von Aster, M.; Leikin, R. & Nuerk, H. (2017). Mathematics Education and Neuroscience. In: G. Kaiser (ed.), *Proceedings of the 13th International Congress on Mathematical Education* (pp. 657-658), ICME-13 Monographs. Graz, Austria.

Harel, G. & Sowder, L. (2005). Advanced mathematical-thinking at any age: Its nature and its development. *Mathematical Thinking and Learning*, *7*(1), 27-50.

Leikin, M.; Waisman, I.; Shaul, S. & Leikin, R. (2014). Brain Activity Associated with Translation from a Visual to a Symbolic Representation in Algebra and Geometry. *Journal of Integrative Neuroscience*, *13*(1), 35-59.

Lester, Jr. F. (2005). The Place Of Theory In Mathematics Education Research. In: H. Chick & J. L. Vincent (Eds.). *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 172-178). Melbourne, Australia.

ISSN 2764-3158

Messias, M. A. V. F. (2018). *Teorias cognitivas do Pensamento Matemático Avançado e o processo de construção do conhecimento: um estudo envolvendo os conceitos de limite e continuidade*. 184f. Tese (Doutorado em Educação em Ciências e Matemáticas). Universidade Federal do Pará. Belém, PA.

Migliori, R. (2013). *Neurociências e Educação*. São Paulo: Ed. Brasil Sustentável.

Nomura, J. I. (2014). *Esquemas Cognitivos e Mente Matemática inerentes ao objeto matemático autovalor e autovetor: traçando diferenciais na formação do engenheiro.* 349f. Tese (Doutorado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo, SP.

Pegg, J. & Tall, D. (2005). Using Theory To Advance Our Understandings Of Student Cognitive Development. In: H. L. Chick & J. L. Vincent (Eds.). *Proceedings of the 29th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 187-192). Melbourne, Australia.

Radford, L. (2012). On the Growth and Transformation of Mathematics Education Theories. *International Colloquium The Didactics of Mathematics: Approaches and Issues* (pp. 1-13). A Homage to Michèle Artigue. Université de Paris VII. Paris, França.

Sierpinska, A. & Kilpatrick J. (1998). *Mathematics Education as a Research Domain: A Search for Identity: An ICMI Study* (vol. 4). Springer Science & Business Media.

Sriraman B. **(**2004). The Characteristics of Mathematical Creativity. *The mathematics educator*, 14(1), 19-34.

Stacey, K. (2006). What is Mathematical Thinking and Why is it Important? Proceedings of the APEC. In: *Tsukuba International Conference 2007: Innovative Teaching Mathematics through Lesson Study* (pp. 39-48). Tsukuba, Japão.

Tall, D. (1991). *Advanced mathematical thinking.* Kluwer Academic Publisher.

Uyangör, S. M. (2019). Investigation of the Mathematical Thinking Processes of Students in Mathematics Education Supported with Graph Theory. *Universal Journal of Educational Research*, 7(1): 1-9.

ISSN 2764-3158