

Histórias das geometrias do ensino e a Matemática Moderna: novos estudos para novos olhares

Histories of teaching geometries and Modern Mathematics: new studies for new perspectives

Maria Célia Leme da Silva¹
Ana Paula Jahn²

Resumo: Este trabalho sistematiza resultados parciais de um projeto de pesquisa sobre história do ensino da geometria e o Movimento da Matemática Moderna (MMM). Apoiado nos pressupostos da História Cultural, o estudo visa compreender os processos de modernização do ensino da geometria, analisando normativas e livros didáticos do Brasil e da França entre as décadas de 1950 e 1980, para alunos de 7 a 14 anos. Analisa-se a proposta de Sangiorgi na coleção moderna dos anos 1960, que prioriza a experimentação e a compreensão conceitual sobre a memorização das demonstrações de teoremas. Examina-se a introdução das Transformações Geométricas em coleções didáticas de lideranças do MMM, evidenciando divergências entre as propostas. Os estudos iniciais reiteram a diversidade de abordagens no ensino de geometria e a complexidade do MMM.

Palavras-chave: Normativas. Livros didáticos de Matemática. Curso ginásial. Demonstrações. Transformações geométricas.

Abstract: This work presents a systematic overview of partial findings from a research project on the history of geometry teaching and the Modern Mathematics Movement (MMM). Drawing upon the framework of Cultural History, the study aims to understand processes of modernizing geometry teaching by analyzing regulations and textbooks from Brazil and France between the 1950s and 1980s, for students aged 7 to 14. It addresses the reformulation proposed by Sangiorgi in the 1960s, prioritizing experimentation and conceptual understanding over memorization of theorem proofs. The introduction of Geometric Transformations in textbook collections by MMM leaders is examined, highlighting discrepancies between the proposals. Initial analyzes highlight the diversity of pedagogical approaches in teaching geometry and the complex nature of MMM.

Keywords: Curriculum regulations. Mathematics textbooks. High school. Proofs. Geometric transformations.

1 Considerações iniciais

O presente trabalho visa sistematizar os principais resultados parciais que vêm sendo obtidos no âmbito de Projeto de Pesquisa³ sobre a história da *geometria do ensino*⁴ e o Movimento da Matemática Moderna (MMM). Com base em pressupostos teórico-metodológicos da História Cultural (Chartier, 1990; Chervel, 1990; Julia, 2001), a investigação tem por objetivo examinar determinados saberes, de modo a compreender distintos processos de sistematização de geometrias do ensino modernizadoras. As principais fontes de investigação do estudo são as normativas e livros didáticos produzidos em dois estados

¹ Universidade Federal de São Paulo • Diadema, SP e Universidade Estadual Paulista • Bauru e Rio Claro, SP — Brasil • ✉ celia.leme@unifesp.br • ORCID <https://orcid.org/0000-0001-6029-0490>.

² Universidade de São Paulo • São Paulo, SP — Brasil • ✉ anajahn@ime.usp.br • ORCID <https://orcid.org/0000-0003-0515-7536>.

³ Projeto de Pesquisa apoiado pela FAPESP (processo n. 2023/04639-8) com duração entre 10/2023 e 09/2025.

⁴ De acordo com Valente e Bertini (2022).

brasileiros – São Paulo e Bahia e no contexto francês, durante as décadas de 1950 a 1980, nos cursos primário e ginásial (alunos de 07 a 14 anos), antes de 1971⁵.

Precisamos considerar que o MMM já foi objeto de investigações no Brasil e internacionalmente. No contexto brasileiro, três estudos são considerados pioneiros e devem ser sempre referenciados: a tese de D'Ambrosio (1987) intitulada *The dynamics and consequences of the modern mathematics reform movement for Brazilian mathematics education*, defendida na Indiana University, EUA; a dissertação *O abandono do ensino de geometria: uma visão histórica* de Pavanello (1989)⁶, defendida na UNICAMP; e a dissertação de Búrigo (1989), intitulada *Movimento da Matemática Moderna no Brasil: estudo de ação e do pensamento de educadores matemáticos nos anos 60*, defendida na UFRGS. Após essa etapa inicial, várias outras investigações foram conduzidas sobre esse momento histórico marcante, que continua a ressoar em nosso presente, como demonstrado por estudos posteriores (Vitti, 1998; Soares, 2001, entre outros).

O MMM foi uma iniciativa de grande alcance que visava a estreitar os laços entre a matemática ensinada nas escolas e a matemática acadêmica do século XX. Seu objetivo era preparar os estudantes para a universidade, familiarizando-os com os conceitos, noções e linguagem empregados pelos matemáticos da época. Isso envolveu diversas atividades, como reuniões internacionais, grupos de estudo e produção científica disseminada globalmente, tornando-se um campo rico para investigação acadêmica em várias nações. Um exemplo a ser destacado foi o projeto de cooperação entre Brasil e Portugal⁷, que proporcionou novas representações sobre o MMM, como o livro "O Movimento da Matemática Moderna: uma revolução curricular" (Oliveira, Leme da Silva & Valente, 2011). Além disso, destaca-se o recente livro publicado pela Springer, *Modern Mathematics: An International Movement?* (De Bock, 2023).

A razão que motiva a continuação das pesquisas sobre geometria e o MMM está relacionada a uma percepção ainda presente na comunidade de educadores matemáticos do Brasil, que sugere um "abandono do ensino de geometria" e aponta o MMM como possivelmente responsável por essa situação. Essa percepção foi reexaminada à luz dos resultados do Projeto de Cooperação Internacional CAPES/GRICES, especialmente no artigo de Leme da Silva (2022) intitulado "Abandono do ensino de geometria e a Matemática Moderna: uma revisão histórica". No entanto, reconhecemos a importância de aprofundar o entendimento desse tema, especialmente para esclarecer e compreender as diferentes abordagens ao ensino de geometria promovidas durante o MMM. Além disso, os estudos teóricos desenvolvidos para embasar a pesquisa histórica ao longo dos últimos anos – como a construção epistemológica do conceito de *matemática do ensino* (Valente & Bertini, 2022)⁸, que pode ser adaptada para *geometria do ensino* – nos permitem explorar as especificidades e peculiaridades dos saberes problematizados nesse período.

⁵ A Lei 5.692/71 inaugurou uma nova organização no ensino brasileiro. Os cursos primário e secundário foram extintos e foi criado o Ensino de 1º Grau de oito anos de duração.

⁶ O objetivo da dissertação de Pavanello foi abordar a trajetória do ensino de geometria em diferentes momentos históricos, porém o artigo *O abandono do ensino de geometria no Brasil: causas e consequências*, publicado na *Zetetiké* em 1993, associou o MMM como uma das causas do abandono (Pavanello, 1993).

⁷ O projeto intitulado "A matemática moderna nas escolas do Brasil e de Portugal: estudos históricos comparativos", desenvolvido na cooperação CAPES/GRICES no período de 2006 a 2009, foi coordenado do lado brasileiro pelo Prof. Dr. Wagner Rodrigues Valente e, do lado português, pelo Prof. Dr. José Manuel Matos.

⁸ Os autores referem-se à *matemática do ensino* como formas específicas de conhecimento matemático mobilizadas na prática educativa, sendo que *matemática a ensinar* refere-se ao conteúdo matemático que é alvo da ação pedagógica, enquanto *matemática para ensinar* diz respeito aos conhecimentos e competências necessários para efetivamente ensinar esse conteúdo aos alunos.

Feita a apresentação e a contextualização do projeto em desenvolvimento, introduzimos os primeiros resultados, explorando temáticas específicas e demandas identificadas no início dos estudos.

2 Tempos pré-modernos

Apesar do projeto ter como ponto de partida os anos de 1950, década em que se iniciaram as primeiras discussões, tanto no Brasil, com a realização dos Congressos Nacionais de Ensino de Matemática⁹, como internacionalmente, com a criação da CIEAEM – *Comission internationale pour l'étude et l'amélioration de l'enseignement des mathématiques*, criada em 1950, julgamos pertinente examinar as três reformas nacionais do Ensino Secundário brasileiro, que antecederam o MMM: Reforma Francisco Campos (de 1931), Reforma Capanema (de 1942) e Reforma Simões Filho (de 1951).

Os resultados dessa análise inicial foram apresentados no XV Encontro Paulista de Educação Matemática (EPEM), no qual se buscou identificar a presença e as instruções referentes a conceitos específicos que terão um papel significativo durante o período do MMM, a saber: as construções geométricas e as transformações geométricas. De modo geral, a estrutura proposta para o ensino de Geometria e as orientações metodológicas puderam ser sintetizadas nos Quadros 1 e 2, os quais serão discutidos a seguir.

Quadro 1: Propostas curriculares para o ensino de Geometria

1º Ciclo	Reforma Francisco Campos (de 1931)	Reforma Capanema (de 1942)	Reforma Simões Filho (de 1951)
1ª Série	Iniciação geométrica	Geometria intuitiva	
2ª Série	Iniciação geométrica	Geometria intuitiva	
3ª Série	Geometria dedutiva	Geometria dedutiva	Geometria dedutiva
4ª Série	Geometria dedutiva	Geometria dedutiva	Geometria dedutiva
5ª Série	Geometria dedutiva		

Fonte: Adaptado de Pastor e Leme da Silva (no prelo)

Como podemos observar no Quadro 1, há mudanças significativas entre as reformas: a de 1931 é organizada em 5 séries e as demais em 4; uma separação clara entre um estudo inicial ou uma geometria dita “intuitiva” nas primeiras séries e uma geometria dedutiva nas séries finais nas reformas de 1931 e 1942 e a ausência de qualquer geometria nas duas primeiras séries na reforma de 1951. É neste cenário que se dá a chegada das ideais modernizadoras num curso ginasial de quatro anos, em que a geometria se encontrava somente nas 3ª e 4ª séries e com enfoque dedutivo. Quanto às instruções didático-pedagógicas, o Quadro 2 permite uma visão geral.

Quadro 2: Orientações para o ensino de Geometria

Reforma	Instruções/Orientações
Campos (de 1931)	- Curso propedêutico de Geometria - Partir da intuição para <i>atingir gradualmente</i> a exposição formal: da experimentação e percepção sensorial para o raciocínio analítico
Capanema (de 1942)	- Geometria intuitiva como <i>transição suave</i> entre experiências com formas e concepção dedutiva da Geometria

⁹ O I Congresso Brasileiro do Ensino de Matemática ocorreu em 1955, em Salvador/Bahia; o II ocorreu em 1957, em Porto Alegre/RS; o III em 1959, no Rio de Janeiro/RJ; o IV em 1962, em Belém/PA; e o V e último congresso ocorreu em 1966, em São José dos Campos/SP.

Simões Filho (de 1951)	- Não dispensar o apelo à intuição - <i>Despertar aos poucos</i> o sentimento da necessidade da justificativa, da prova e da demonstração
---------------------------	--

Fonte: Adaptado de Jahn e Magalhães (no prelo, grifo nosso)

As três reformas fazem sobressair a passagem entre uma geometria intuitiva, experimental, vinculada ao concreto, às explorações em experiências e a geometria dedutiva, abstrata, vinculada ao desenvolvimento de um raciocínio hipotético-dedutivo.

Ao procurar compreender tanto a estrutura como as orientações presentes nas reformas, é preciso retomar o papel significativo da Reforma Francisco Campos, haja vista que o ideário do 1º movimento internacional do ensino de matemática, discutido no IV Congresso Internacional de Matemática, em 1908, sob a liderança de Félix Klein¹⁰ (1849-1925), foi apropriado nas normativas brasileiras exatamente na referida reforma. Euclides Roxo (1890-1950), engenheiro e professor do Colégio Pedro II (referência do Ensino Secundário) foi a liderança da renovação na Reforma Francisco Campos de 1931, a qual instituiu, pela primeira vez, a disciplina Matemática para o curso secundário.

A Reforma de 1931, segundo Roxo, reunia as tendências do primeiro movimento internacional, tanto do ponto de vista metodológico, como dos conteúdos propostos, ao fundir os diferentes ramos da matemática: aritmética, álgebra e geometria em uma única disciplina. As instruções para o ensino da matemática recomendaram que:

Partindo da intuição viva e concreta, a feição lógica crescerá, a pouco e pouco, até atingir, gradualmente, a exposição formal; [...] os conhecimentos serão adquiridos, a princípio pela experimentação e pela percepção sensorial e, depois, lentamente, pelo raciocínio analítico. Assim, quanto à geometria, o estudo demonstrativo formal deve ser precedido de um curso propedêutico, destinado ao ensino intuitivo, de caráter experimental e construtivo (Bicudo, 1942, p. 157)

As três reformas enfatizaram a necessidade de uma geometria intuitiva, com experimentação, percepção sensorial, como preparatória para a compreensão de uma geometria dedutiva, porém a de 1951 excluiu o espaço destinado à parte introdutória e intuitiva das reformas anteriores, mantendo somente a abordagem dedutiva. É preciso destacar que a Reforma Francisco Campos recebeu inúmeras críticas, tendo em vista um modelo de ensino tradicional em curso.

As propostas para um ensino intuitivo da geometria foram enfatizadas durante a reforma de 1931. No entanto, a análise das regulamentações nos obriga a distinguir os objetivos declarados nos programas e os objetivos reais do ensino efetivo. Enquanto as normativas indicam os objetivos pretendidos do ensino, as práticas pedagógicas revelam os objetivos reais, que nem sempre estão alinhados (Chervel, 1999). Tudo indica ser esse o caso nas décadas de 1930 a 1950, quando, apesar das diretrizes enfatizarem a importância do ensino intuitivo e gradualmente despertar a necessidade de justificativas, os relatos acerca de práticas em sala de aula durante o II Congresso Nacional de Ensino de Matemática, em 1957, sugerem uma abordagem predominantemente dedutiva para o ensino de geometria, com ênfase na memorização de teoremas e de suas demonstrações.

A falta de concatenação lógica inicial dos teoremas e do caráter intuitivo de boa parte deles produz a nociva impressão, na mente do aluno, de que as demonstrações

¹⁰ Félix Klein (1849-1925), matemático alemão que liderou a primeira Comissão Internacional para estudo do Ensino da Matemática (CIEM), de modo a propor reformas do ensino.

constituem malabarismos do professor. [...] Neste momento ele não percebe as relações mútuas que existem entre os vários teoremas. Não forma, também, uma ideia clara do que é uma teoria ou não possui teoria alguma. [...] Têm sido os malfadados teoremas a tábua de salvação dos alunos medíocres que, nos exames, conseguem a nota mínima graças a uma demonstração decorada (Congresso ..., 1959 apud Búrigo, 2015, p. 8)

Desta maneira, podemos inferir que no ambiente educacional do ensino secundário, a abordagem do ensino de geometria era dominada pelo estudo de uma geometria axiomática, com foco em postulados e na demonstração de teoremas. Isso resultava em uma prática de memorização por parte dos alunos, sem uma compreensão real do significado do raciocínio dedutivo. O contexto da década de 1950, certamente, vai direcionar a elaboração da primeira coleção didática moderna, na década de 1960, escrita por Osvaldo Sangiorgi (1921-2017)¹¹, matemático e professor, autor renomado de livros didáticos, e personagem significativo no processo de apropriação e divulgação das ideias do MMM no Brasil, em particular com a criação do Grupo de Estudo do Ensino de Matemática¹² (GEEM), em São Paulo. É o que passamos a tratar no que segue.

3 A geometria moderna de Osvaldo Sangiorgi

O estudo conduzido por Jahn e Leme da Silva (2023) realizou uma análise comparativa da abordagem da geometria dedutiva nos livros destinados ao curso ginásial de Osvaldo Sangiorgi (OS) nas décadas de 1950 e de 1960, designada como moderna. O objetivo foi compreender de maneira mais detalhada como OS mobilizou aportes do MMM para eliminar a necessidade de os alunos decorarem as demonstrações de teoremas. Parece que esse foi um dos principais objetivos do livro moderno, já que a geometria dedutiva era claramente prescrita tanto antes quanto no momento da publicação da coleção moderna. A pergunta central do estudo foi: em que medida e de que forma OS altera a proposta de uma geometria dedutiva para a 3ª série ginásial na coleção moderna (Sangiorgi, 1967), em comparação com a coleção pré-moderna (Sangiorgi, 1958)?

O estudo apresenta uma análise quantitativa inicial no que diz respeito à quantidade de páginas dedicadas exclusivamente ao estudo da geometria. O exemplar pré-moderno dedica 65,3% do total de páginas do volume, o que corresponde a 186 páginas. O livro moderno dedica 63,7% do total de páginas, contendo 200 páginas para o ensino de geometria, ou seja, não houve diferença significativa na porcentagem do total de páginas. De outra parte, para atender à Portaria de 1951, que não propõe geometria nas 1ª e 2ª séries, para a 3ª série, os conteúdos de geometria ocupam mais de 50% do volume. Assim, observamos que, diferentemente da abordagem atual de diluir os conteúdos geométricos ao longo de todos os anos escolares, nas décadas de 1950 e 1960, a geometria apresentava-se concentrada nas duas últimas séries ginásiais, mas de modo algum podemos considerar que ela tenha sido negligenciada ou pouco expressiva nos livros didáticos analisados.

Ao comparar a sequência de conteúdos dos dois livros, podemos identificar que ela foi preservada no livro moderno, entretanto, os mesmos conceitos passaram a ser propostos com cerca de 28% a mais de espaço. De outra parte, diferentemente do que poderíamos conjecturar, que teriam mais teoremas, o número de teoremas demonstrados nos dois livros passou de 54 para 28, ou seja, uma redução de cerca de 50% na quantidade de teoremas.

¹¹ Para mais detalhes ver Valente (2008).

¹² O GEEM foi criado em 1961, em São Paulo, e atuou até 1976, sempre sob a liderança de Osvaldo Sangiorgi. Um estudo mais aprofundado sobre o GEEM pode ser lido em Lima e Passos (2008).

Com isso, passou-se então para a análise qualitativa, de modo a compreender um aumento de espaço para desenvolver a geometria e a redução da quantidade de teoremas. Uma diferença observada foi na reorganização completa dos postulados, introduzindo o conceito de medida, e por exemplo, incorporando os quatro casos de congruência de triângulos, que no livro pré-moderno eram teoremas (proposições demonstradas), passam a ser postulados no livro moderno. Porém, antes de postular os casos de congruência, são propostas construções geométricas, como *exercícios exploratórios*, envolvendo construção de triângulos dados três elementos dentre lados e ângulos (por exemplo, dados dois lados e o ângulo compreendido entre eles), para que os alunos pudessem verificar experimentalmente a igualdade dos triângulos construídos. OS justifica a mudança de abordagem para os casos de congruência:

Dentre as questões de ordem didática que têm provocado celeuma no curso ginasial, está a que diz respeito aos casos de congruência de triângulos, antigamente denominados casos clássicos de igualdade de triângulos.

Postula-se ou demonstra-se?

Na verdade, nem uma coisa nem outra [...]

Os casos “clássicos” de congruência de triângulos ocorrerão por conta da “exploração” que os alunos farão em classe, usando régua, compasso e transferidor. Posteriormente, na construção axiomática que se fará da Geometria – o que terá lugar progressivamente – esses casos serão englobados no postulado P.10 (Sangiorgi, 1966, p. 50, grifos do autor).

A redução do número de teoremas justifica-se ainda pela implementação de uma geometria experimental preparatória para o estudo da geometria dedutiva, com a inserção de *exercícios exploratórios*, antes de iniciar as demonstrações, para que o estudante experimente a verificação de algumas propriedades em decorrência de outras.

Nesta fase, o aluno já está “habitado” a verificar que algumas propriedades são consequências de outras mais elementares. É a preparação para o início de uma axiomatização simples, onde serão reunidas sob a forma de postulados (axiomas) as situações encontradas nos exercícios exploratórios. Somente depois de muita vivência (basta ver que, no livro, o Grupo de *dez postulados fundamentais* é introduzido depois de 120 páginas dedicadas à geometria) é que o aluno pode ser iniciado nas *demonstrações* propriamente ditas (Sangiorgi, 1966, p. 51).

Tudo indica estar em jogo a compreensão de um processo dedutivo, que incorpora “novos postulados”, de modo a permitir um entendimento mais adequado do raciocínio lógico-dedutivo subjacente. O objeto a ser ensinado, no caso, a geometria dedutiva, foi modificada tanto no seu objeto de ensino – *geometria a ensinar* –, e igualmente, nas ferramentas de trabalho do professor – *geometria para ensinar* –, no momento de inserir *exercícios exploratórios*, configurando uma *geometria do ensino*¹³, elaborada por OS.

Outro exemplo que nos ajuda a compreender a mudança da proposta feita por OS é a maneira de apresentar e desenvolver os teoremas. O teorema da propriedade dos ângulos da base de um triângulo isósceles, no livro de 1950, foi feito de maneira clássica: o teorema é enunciado, com uma figura ilustrativa ao lado, identifica-se a hipótese e a tese, realiza-se a demonstração. Na abordagem moderna, os alunos primeiro foram convidados a realizar *exercícios exploratórios*, que correspondem a construir um triângulo isósceles, medir os

¹³ A partir de uma adaptação do constructo *matemática do ensino* de Valente e Bertini (2022), estamos considerando a *geometria a ensinar* e a *geometria para ensinar* como constituintes interligadas da configuração de uma *geometria do ensino* durante o MMM.

ângulos, comparar com as construções dos colegas se o resultado obtido também foi verificado por eles e enunciar a propriedade identificada. Outros exercícios complementam essa etapa, como os *testes de atenção*, que pedem aos alunos para identificar os vértices correspondentes em diversas situações de congruência de triângulos. E então, o livro traz três demonstrações distintas: a primeira como um “plano de ação”, que corresponde a traçar a bissetriz do ângulo entre os lados congruentes; a segunda, como “outro caminho” para a prova, traçando a altura relativa à base do triângulo isósceles e a terceira, por meio de “esquemas desenhados”, coloridos de preferência, onde figuram uma série de passos dedutivos, através de construções ($\rightarrow$), de equivalências ($\Leftrightarrow$) e de implicações ($\Rightarrow$). A valorização de diferentes resoluções e diversas representações para a demonstração do mesmo teorema, de modo que o aluno possa compreender a diversidade de caminhos no processo dedutivo é um aspecto inovador nos livros didáticos brasileiros da década de 1960.

Nas conclusões, é preciso destacar que OS conjugava dois elementos relevantes para um autor de livros didáticos produzir inovações: uma sólida formação matemática, realizada na Universidade de São Paulo, que lhe conferia segurança para alterar postulados, juntamente com o curso de verão desenvolvido nos EUA, em que muito provavelmente, tomou contato com debates e experiências entre diferentes geometrias debatidas no MMM. De outra parte, ele também tinha a *expertise* como professor de aulas particulares para estudantes de renomados colégios paulistanos, o que lhe permitia conhecer as dificuldades, os erros mais comuns realizados pelos alunos. Em outras palavras, OS transitava com habilidade tanto na *geometria a ensinar* como na *geometria para ensinar*, o que possibilitava anunciar recomendações pertinentes aos estudantes e professores sobre a *geometria do ensino*. A frase que resumiria, no nosso entender, a apropriação de OS sobre a geometria no MMM seria: “Não ‘decore’ demonstrações de teoremas!” (Sangiorgi, 1967, p. 258).

4 As Transformações Geométricas e o MMM

As propostas modernizadoras para o ensino de geometria produziram muitos debates e embates, tanto no Brasil, como internacionalmente. Pelo menos duas tendências podem ser destacadas: (1) a elaborada por G. D. Birkhoff¹⁴ que propunha uma modificação nos axiomas de Euclides, seguindo a forma geral de Hilbert¹⁵, mais difundida nos EUA; e (2) a desenvolvida na Alemanha, por meio das Transformações Geométricas (TG), apoiada nas ideias de F. Klein. Leme da Silva (2008) realizou um primeiro estudo sobre a proposta de OS e apontou que a abordagem moderna desse autor se aproximou mais da tendência internacional utilizada nos Estados Unidos e baseada em Birkhoff, do que da proposta do ensino da geometria pelas transformações geométricas ligada à Klein.

De todo modo, as TG foram objeto de muitas discussões, sendo, inclusive, consideradas como responsáveis pelo “fracasso” do MMM. Assim, o estudo de Leme da Silva e Jahn (no prelo) analisou como as TG foram abordadas em quatro livros didáticos entre as décadas de 1960 e 1970, produzidos por lideranças do MMM em São Paulo e na Bahia, conforme o Quadro 3.

Quadro 3: Livros didáticos selecionados para análise

Título	Autor	Ano
<i>Matemática – Curso Moderno para os ginásios – 3º vol.</i>	Oswaldo Sangiorgi (OS)	1967
<i>Matemática – Curso Moderno –</i>	Alcides Bóscolo, Benedito Castrucci (BC)	1970

¹⁴ George David Birkhoff (1884-1944), matemático estadunidense.

¹⁵ David Hilbert (1862-1943), matemático alemão.

3 Ciclo Ginásial		
<i>Ensino Atualizado da Matemática</i> – curso ginásial – vol. 3	Omar Catunda, Martha M. de Souza Dantas, Eliana Costa Nogueira, Norma Coelho de Araújo, Eunice da C. Guimarães e Neide C. de Pinho e Souza (CD)	1971
<i>Curso Moderno de Matemática para ensino de primeiro grau</i> – 7	Anna Averbuch, Franca Cohen Gottlieb, Lucília Bechara Sanchez, Manhúcia Liberman e Jacy Monteiro (supervisão) (GRUEMA) ¹⁶	1975

Fonte: Adaptado de Leme da Silva e Jahn (no prelo, a)

O critério de escolha dos livros foi estabelecido em dois grupos: o dos “matemáticos” (doutores e/ou catedráticos em Matemática da USP) que representam o campo acadêmico, o conhecimento da matemática do século XX – Castrucci, Catunda, Jacy Monteiro; e o de professores(as) de Matemática que representam o campo profissional, o conhecimento da cultura escolar e suas dinâmicas – Sangiorgi, Bóscolo, ambos de São Paulo; Dantas, Nogueira, Araújo, Guimarães e Souza, da Bahia; Averbuch, Gottlieb, do Rio de Janeiro e Sanchez e Liberman, de São Paulo.

Foram construídas três categorias de análise para o exame de cada livro: (1) Abordagem das TG como objetos de ensino – o objetivo foi analisar como o conceito de TG é definido nos livros; (2) Articulação entre TG e Geometria Euclidiana (GE) – o objetivo foi analisar como a proposta de inserir as TG se integrou (ou não) com a GE configurada para as escolas; (3) Sequência de conceitos estudados sobre TG – o objetivo foi analisar se houve uma uniformização na escolha das TG a serem apresentadas e na ordem dos conceitos abordados. As conclusões foram sintetizadas no Quadro 4 que segue.

Quadro 4 – Síntese das categorias analisadas nos livros selecionados

Autor(es)	Abordagem da TG (definição)	Articulação entre TG e GE	Conteúdos
OS	Translação e Rotação, conjuntos munidos da operação de adição para justificar grupo comutativo.	Não houve, TG isoladas no Apêndice do livro	Translações Rotações Simetria Axial Simetria Central
BC	Transformações no plano como funções e estudo de suas propriedades. Grupo das Transformações	Não houve, TG isoladas no Apêndice do livro	Transformações, Translações, Simetria Central, Rotação, Simetria Axial Isometria Direta e Inversa
CD	Transformações no plano afim como funções e estudo de suas propriedades. Grupo afim elementar, grupo das congruências (isométrico ou euclidiano)	Integra as TG com a GE	Translações, Dilatações Transformação no plano afim, Grupo afim elementar, Homotetia, Simetria axial, Grupo das congruências, Rotação
GRUEMA	Simetria Axial como uma função e estudo de suas propriedades	Integra as TG com a GE nos tópicos Simetria e Congruência	Simetria axial

Fonte: Adaptado de Leme da Silva e Jahn (no prelo, a)

A análise geral permite dizer que temos quatro propostas claramente diferenciadas para

¹⁶ Grupo de Ensino de Matemática Atualizada.

abordagem das TG nos livros didáticos analisados. A categoria de articular as TG com a GE no livro didático foi um divisor no processo analítico, visto que os livros de OS e BC optaram por não inserir as TG no corpo do texto, deixando-as isoladas (ou desconectadas) do estudo da GE “clássica”, presente nos livros didáticos desde sempre.

Outra característica evidenciada no Quadro 4 é a diversidade de TG selecionadas para serem estudadas pelos estudantes de 13 anos e a ordem de estudo nos livros, tanto nos autores que não integram as TG com a GE, como nos que realizam uma proposta integradora. OS vai diretamente para as isometrias: Translação, Rotação, Simetria Axial e Central, enquanto BC introduz o conceito de transformação no plano como ponto de partida, apresenta as TG em ordem distinta daquela proposta por OS e inclui Isometrias Diretas e Inversas. CD traz uma lista completa do estudo das TG, o mais próximo possível dos conceitos desenvolvidos no campo acadêmico e o livro GRUEMA trabalham somente uma TG, a Simetria Axial. Como conclusões, as autoras chamam novamente as características dos grupos de autores tomados na escolha, aqueles mais vinculados ao campo acadêmico, de um lado, e, de outra parte, os reconhecidos como representantes do campo profissional e afirmam que:

Em síntese, a análise de como as TG foram inseridas nos livros reitera as tensões estabelecidas entre o campo acadêmico e o profissional. O exame do processo de inserir as TG na cultura escolar, por meio de livros didáticos, realizado por diferentes autores, sujeitos com histórico de formações e experiências diferenciadas, revela a complexidade do diálogo, da possibilidade de conjugar demandas vindas de duas culturas distintas: a acadêmica, como representante da produção científica, e a escolar, representante de experiências de práticas profissionais (Leme da Silva & Jahn, no prelo, a, p. 18)

Por fim, podemos destacar que não foram encontrados consensos para o estudo das TG mesmo selecionando autores no interior de um coletivo de lideranças, o que nos permite ressaltar a não existência de uma única representação das TG no ensino durante o MMM no Brasil.

5 Considerações finais

Como mencionado no início, nosso objetivo foi apresentar os principais resultados parciais obtidos no projeto em discussão, os quais consideramos pertinentes e inovadores, pois agregam novas narrativas ao processo de produção historiográfica. O primeiro destaque é o estudo dos tempos pré-modernos, especialmente da década de 1950, que se revela fundamental para esclarecer o cenário educacional brasileiro do ensino de geometria no curso ginásial que precedeu o MMM. A sinalização para retirada da geometria intuitiva das duas séries iniciais, restringindo o curso ginásial com enfoque exclusivo de uma geometria dedutiva na Reforma de 1951, juntamente com o cotejamento de depoimentos de professores, constituem fontes essenciais para uma análise crítica da chegada do MMM no início da década de 1960. Este primeiro estudo é crucial para entender o contexto pré-moderno e as bases sobre as quais o MMM se apoiou.

Os dois outros estudos, pautados em exames de livros didáticos representativos das décadas de 1950, 1960 e 1970, permitem compreender como as lideranças – primeiros autores a produzirem manuais modernizadores para subsidiar as inovações – propuseram um estudo de geometria dedutiva, haja vista que a abordagem de uma geometria dedutiva segue predominante no curso ginásial.

A análise sobre um “saber” – geometria dedutiva – nos livros de Sangiorgi trouxe o resgate de um estudo experimental e exploratório da geometria intuitiva, que havia sido banido da Reforma de 1951, juntamente com possibilidades de articulação com a introdução de uma geometria dedutiva. As propostas elaboradas podem servir de referência para pensarmos tarefas a serem propostas por professores de matemática na atualidade, que favoreçam a passagem entre uma *prova pragmática* para uma *prova conceitual* (Balacheff, 2022) no século XXI, como proposto em Leme da Silva e Jahn (no prelo, b). Em síntese, Sangiorgi exemplifica a aplicação de ideias do MMM, tentando reduzir a memorização mecânica em favor de uma compreensão mais significativa dos conceitos geométricos pelos alunos.

Por fim, no último estudo, reiteramos o papel dinâmico da escola, assim como o papel plural das apropriações de um ideário, ao apresentar um exame minucioso sobre o conceito de Transformações Geométricas (TG) em quatro livros de período próximo e elaborados por lideranças do MMM, tanto do campo acadêmico quanto do campo profissional. Concluímos sobre a diversidade de propostas para um mesmo tema, o que nos convida a tomar cuidado com uma única representação do que tenha sido o ensino de geometria no MMM. A análise das TG permite entender divergências internas no MMM e como certas abordagens modernizadoras foram recebidas e apropriadas.

O projeto segue adiante, aprofundando a investigação sobre a proposta do GRUEMA para as TG e pensando em como adaptá-las na produção de tarefas atuais para a formação de professores (estudo no âmbito de um Mestrado Profissional de integrante da equipe); incorpora o contexto francês para o exame das TG, com a colaboração do professor francês Marc Moyon (Universidade de Limoges); investiga ainda a trajetória das construções geométricas nos cursos ginásiais e das figuras geométricas no ensino primário, ambos em projetos de doutorado em desenvolvimento.

Os três estudos apresentados estão intimamente ligados pelo objetivo maior de entender as mudanças ou continuidades no ensino de geometria durante o MMM. Juntos, oferecem uma visão abrangente das mudanças pedagógicas e de conteúdos curriculares ocorridas no período, bem como das tensões e desafios enfrentados. Ao integrar esses estudos, podemos alargar nossa compreensão acerca do movimento e identificar as áreas que ainda necessitam de investigação, como a efetiva implementação das TG no currículo escolar.

Agradecimentos

Agradecemos aos participantes e colaboradores do Grupo de Estudos e Pesquisas em Geometria Escolar: História e Formação de Professores (GEPGE), à Universidade Estadual Paulista (UNESP) e à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP) pelo apoio fundamental para a viabilidade dos estudos apresentados.

Referências

- Averbuch, A. *et al.* (1975). *Curso Moderno de Matemática para ensino de primeiro grau – 7*. São Paulo, SP: Companhia Editora Nacional.
- Balacheff, N. (2022). A argumentação matemática: um precursor problemático da demonstração. Tradução de Saddo Ag Almouloud e Méricles Thadeu Moretti. *Educação Matemática Pesquisa*, 24 (1), 770-815.
- Bicudo, J. C. (1942). *O ensino secundário no Brasil e sua atual legislação (de 1931 a 1941 inclusive)*. São Paulo, SP: Associação dos Inspectores Federais do Ensino Secundário do Estado de São Paulo.

- Búrigo, E. Z. (1989). *Movimento da matemática moderna no Brasil: estudo da ação e do pensamento de educadores matemáticos nos anos 60*. Dissertação (Mestrado em Educação). Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS). Porto Alegre, RS.
- Búrigo, E. Z. (2015). Professores de Matemática deveriam estudar história? In: *Anais do XII Encontro Gaúcho de Educação Matemática* (pp. 1-14). Porto Alegre, RS.
- Catunda, O. et al. (1971). *Ensino Atualizado da Matemática – Curso ginásial – Volume 3*. São Paulo, SP: EDART.
- Chartier, R. (1990). *A história cultural – entre práticas e representações*. Rio de Janeiro, RJ: Bertrand Brasil S.A.
- Chervel, A. (1990). História das disciplinas escolares: reflexões sobre um campo de pesquisa. *Teoria & Educação*, 2, 177-229.
- D'Ambrosio, B. S. (1987). *The dynamics and consequences of the modern mathematics reform movement for Brazilian mathematics education*. Tese (Doutorado em Educação Matemática). Indiana University. Bloomington, IL/EUA.
- De Bock, D. (Ed.). (2023). *Modern mathematics: An international movement?* Springer. <https://doi.org/10.1007/978-3-031-11166-2>
- Jahn, A. P., & Leme da Silva, M. C. (2023). Don't memorize theorem proofs! The Modern Geometry of Osvaldo Sangiorgi. *Revista Internacional de Pesquisa em Educação Matemática*, 13(4), 1-19. <https://doi.org/10.37001/ripem.v13i4.3622>.
- Jahn, A. P., & Magalhães, G. R. (no prelo). As transformações geométricas em tempos pré-modernos: Um estudo preliminar. In: *Anais do XV Encontro Paulista de Educação Matemática* (pp. 1-12). Guaratinguetá, SP: Sociedade Brasileira de Educação Matemática – Regional São Paulo.
- Julia, D. (2001). A cultura escolar como objeto histórico. *Revista Brasileira de História da Educação*, 1, 9-44.
- Leme da Silva, M. C. (2008). A geometria escolar moderna de Osvaldo Sangiorgi. In: W. R. Valente, (Org.). *Osvaldo Sangiorgi – um professor moderno* (pp. 69-93). São Paulo, SP: Annablume Editora.
- Leme da Silva, M. C. (2022). Abandono do ensino de geometria e a Matemática Moderna: uma revisão histórica. *Zetetiké*, 30, 1-22.
- Leme da Silva, M. C., & Jahn, A. P. (no prelo, a). Transformações geométricas no ensino de geometria: Diferentes apropriações na matemática moderna. *Bolema*.
- Leme da Silva, M. C., & Jahn, A. P. (no prelo, b). Práticas experimentais e demonstrativas na sala de aula de matemática: Reflexões entre passado e presente. In: M. Bairral, M. P. Henrique, & A. R. de Assis (Eds.), *Caminhos da geometria da atualidade: Velhos percursos, novas lentes*. Seropédica: Editora da Universidade Rural (EDUR, UFRRJ).
- Lima, F. R.; Passos, L. F. (2008). G.E.E.M. – Grupo de Estudos do Ensino da Matemática e o Movimento da Matemática Moderna. In: W. R. Valente (Org.). *Osvaldo Sangiorgi: um professor moderno* (pp. 95-118). São Paulo, SP: Annablume Editora.
- Oliveira, M. C. A.; Leme da Silva, M. C. & Valente, W. R. (org.) (2011). *O Movimento da Matemática Moderna: história de uma revolução curricular*. Juiz de Fora, MG: Editora UFJF.



- Pastor, E. S., & Leme da Silva, M. C. (no prelo). O ensino de geometria para o 1º ciclo do curso secundário em tempos pré-modernos. In: *Anais do XV Encontro Paulista de Educação Matemática* (pp. 1-12). Guaratinguetá, SP: Sociedade Brasileira de Educação Matemática – Regional São Paulo.
- Pavanello, R. M. (1989). *O abandono do ensino de geometria: uma visão histórica*. 196f. Dissertação (Mestrado em Educação). Universidade Estadual de Campinas (UNICAMP). Campinas, SP.
- Pavanello, R. M. (1993). O abandono do ensino da geometria no Brasil: causas e consequências. *Zetetiké*, 1(1), 7-17.
- Sangiorgi, O. (1958). *Matemática para a Terceira Série Ginásial*. São Paulo, SP: Companhia Editora Nacional.
- Sangiorgi, O. (1966). *GUIA para uso dos PROFESSORES. 3º Volume – Matemática Curso Moderno*. São Paulo, SP: Companhia Editora Nacional.
- Sangiorgi, O. (1967). *Matemática Curso Moderno. 3º Volume para os ginásios*. São Paulo, SP: Companhia Editora Nacional.
- Soares, F. S. (2001). *Movimento da Matemática Moderna no Brasil: Avanço ou Retrocesso?* 192f. Dissertação (Mestrado em Matemática Aplicada). Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro (PUC-RJ). Rio de Janeiro, RJ.
- Valente, W. R. (2008). Osvaldo Sangiorgi, um best seller. In: W. R. Valente (Org.). *Osvaldo Sangiorgi: um professor moderno* (pp. 13-41). São Paulo, SP: Annablume Editora.
- Valente, W. R. & Bertini, L. de F. (Orgs.) (2022). *A matemática do ensino: uma história do saber profissional 1870-1960*. (Coleção Educação & Saúde, Vol. 1) São Paulo, SP: Universidade Federal de São Paulo.
- Vitti, C. M. (1998). *Movimento da matemática Moderna: Memória, Vaia e Aplausos*. Tese (Doutorado em Educação). Universidade Metodista de Piracicaba (UNIMEP). Piracicaba, SP.