



Uma perspectiva de pesquisa na Educação Matemática com base na Semiótica de Peirce e o uso de Experimentos Mentais como artefatos cognitivos

A Research perspective in Mathematics Education based on Peirce's Semiotic perspective and the use of Thought Experiments as cognitive artifacts

Willian José da Cruz¹

Resumo: Este texto apresenta um esboço da pesquisa desenvolvida com base nos estudos na perspectiva semiótica, com ênfase no externalismo ativo peirceano e no fenômeno da criatividade, da metacognição e da solução de problemas desenvolvidos por meio dos Experimentos Mentais. Os aspectos metodológicos deste trabalho buscam evidenciar a importância da complementaridade de intensão (meios, ações, atividades, ...) e extensão (objeto, conceitos, problemas, ...). O objetivo é apresentar um recorte do projeto de pesquisa denominado Colaboratório de Semiótica Cognitiva, que envolve três domínios cognitivos: Educação Matemática, Ensino de Ciências e Artes. O foco deste texto está centrado no campo da Educação Matemática.

Palavras-chave: Externalismo ativo. Epistemologia. Linguagem. Semiótica cognitiva.

Abstract: This text presents an outline of the research conducted based on studies in a semiotic perspective, with an emphasis on Peircean active externalism and on the phenomena of creativity, metacognition, and problem-solving developed through Thought Experiments. The methodological aspects of this work aim to highlight the importance of the complementarity of intension (means, actions, activities, etc.) and extension (objects, concepts, problems, etc.). The purpose is to present a section of the research project entitled the Cognitive Semiotics Collaboratory, which encompasses three cognitive domains: Mathematics Education, Science Teaching, and the Arts. The focus of this text is on the field of Mathematics Education.

Keywords: Active Externalism. Epistemology. Language. Cognitive Semiotics.

1 Introdução

Este texto apresenta um esboço da pesquisa desenvolvida com base nos estudos na perspectiva semiótica, com ênfase no externalismo ativo peirceano e enfoque nos fenômenos da criatividade, da metacognição e da solução de problemas desenvolvidos por meio dos Experimentos Mentais. As análises das pesquisas nesta direção são desenvolvidas pela complementaridade de intensão (meios, ações, atividades, ...) e extensão (objeto, conceitos, problemas, ...). Estamos apresentando um recorte do projeto de pesquisa denominado Colaboratório de Semiótica Cognitiva, cujo objetivo é investigar as possíveis relações existentes entre os diversos processos cognitivos, a aprendizagem e o uso de artefatos. Este projeto foi aprovado na chamada universal do CNPQ (edital 10/2023). Queiroz & Atã (2018), explicando o externalismo cognitivo peirceano, escrevem que:

[...] mente é semiose (ação do signo) em uma forma dialógica, e a cognição é o desenvolvimento de artefatos materiais semióticos disponíveis em que signos estão incorporados como “poder” para produzir interpretantes (efeitos dos signos). A mente tem a forma do desenvolvimento de artefatos semióticos, tais como ferramentas de escrita, instrumentos de observação, sistemas de notação, linguagem e outros (Queiroz

¹ Programa de Pós-graduação em Educação Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora • Juiz de Fora, MG, Brasil •
✉: willian.cruz@ufjf.br ou williancruz990@gmail.com • ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-7509-1021>.



& Atã, 2018, p.45).

Segundo Queiroz & Atã (2018, p. 46), a “tese peirceana combina duas premissas: (i) a mente é semiose, (ii) processos semióticos são estendidos espaço-temporalmente”. A natureza dos signos em ação está relacionada à primeira premissa e o espaço-temporal-mente à segunda.

Ressalta-se que o Colaboratório envolve três domínios cognitivos, a saber: Educação Matemática, Ensino de Ciências e Artes. Carrega em sua concepção uma combinação de *insights*, métodos e protocolos experimentais da semiótica, com um recorte à Educação Matemática, relacionando a investigação de processos cognitivos como criatividade, aprendizagem e raciocínio diagramático.

No que se refere à criatividade, os cenários de investigação sobre o ensino e a aprendizagem de certos conceitos matemáticos trazem novas descrições relacionadas a artefatos cognitivos. Isso pode ocorrer, por exemplo, com o uso do *Geogebra* ou *Cabri-geométry*, duas interfaces de construções geométricas. Essas interfaces podem ser consideradas artefatos cognitivos. A própria representação do objeto considerado (diagrama) também pode ser um artefato cognitivo, ajudando na organização e estruturação do ensino de certos conceitos matemáticos, com repercussão na aprendizagem.

A aprendizagem em si é o resultado dessas descrições, dada a capacidade de construção de um novo signo em diálogo com esses artefatos. A construção desse novo signo ocorre por meio do desenvolvimento do raciocínio diagramático, que é a base do processo de experimentação mental e da compreensão da Matemática como uma atividade semiótica.

2 Matemática como atividade semiótica – uma introdução

O homem é essencialmente um "ser simbólico", conforme afirma Ernest Cassirer (1994) em seu livro *Ensaio Sobre o Homem*. A caracterização aristotélica tradicional que considera o homem como um animal racional foi gradualmente substituída por esta rede simbólica. Cassirer disserta que “[...] o homem não pode fugir à sua própria realização. Não pode senão adotar as condições de sua própria vida. Não estando num universo meramente físico, o homem vive em um universo simbólico” (1994, p. 48).

Há um emaranhado de fios tecendo esta rede simbólica, como a religião, a linguagem, o mito, a arte, entre outros. Esse emaranhado de fios evidencia o recuo da atividade física “em proporção ao avanço da atividade simbólica do homem” (Cassirer, 1994, p. 48). Cassirer argumenta que a “racionalidade é um traço inerente a todas as atividades humanas. A própria mitologia não é uma massa grosseira de superstições ou ilusões crassas. Não é meramente caótica, pois possui uma forma sistemática ou conceitual, mas, por outro lado, seria impossível caracterizar a estrutura do mito como racional” (1994, p. 49). A própria linguagem, que outrora fora considerada a fonte da razão, não consegue cobrir todos os campos, pois existem linguagem conceitual, linguagem emocional, linguagem de imaginação poética que andam lado a lado com a linguagem científica e lógica.

Portanto, como afirma Cassirer, “é inegável que o pensamento simbólico e o comportamento simbólico estão entre os traços mais característicos da vida humana” (1994, p. 51). Amplificando essas considerações de Cassirer, afirmamos que vivemos em um universo semiótico e, assim, como Peirce, consideramos que “todo nosso pensamento é realizado por meio de signos” (NEM² 1, 122). Isso nos leva a compreender que a semiótica parece ter a maior importância para a cognição matemática, bem como para Educação Matemática. No entanto,

² Seguindo uma prática padrão referente as obras de Peirce, adotamos a referência NEM para indicar New Elements of Mathematics by Charles S. Peirce, 1976, seguido por números de volume e página.



como apontado por Cruz (2015), pouca pesquisa tem sido feita sobre os fundamentos semióticos da epistemologia matemática e da cognição.

Buscamos uma perspectiva de pesquisa cujo objetivo principal é “compreender melhor o papel do sentido e das representações da atividade matemática e da comunicação a respeito da Matemática e reformular os valores da Educação Matemática em termos semióticos” (Cruz, 2015, p. 41), utilizando os Experimentos Mentais.

Partimos da hipótese de que a Semiótica e os Experimentos Mentais (EM) podem conter a chave para compreender os problemas enfrentados pelo ensino, os quais, consequentemente, afetam a aprendizagem da Matemática. Além disso, Cruz considera que “a Matemática surgiu do contexto social e não natural e, dentro desse contexto, encontra-se a teoria geral dos signos como uma tentativa de desenvolver ideias gerais. Toda atividade cognitiva é uma atividade semiótica” (2015, p. 209).

Olhando para linguagem formal da Matemática, por exemplo, Otte (2014) entende que ela não é uma mera ferramenta a ser utilizada pelas ciências naturais e complementa ao escrever que “se alguém vê essa representação simbólica como uma mera ferramenta usada pela ciência natural para expressar percepções de maneira mais simples e precisa possível, então não entende o significado do simbolismo e os métodos específicos das disciplinas naturais em geral” (Otte, 2014, p. 10). Todo signo ou toda representação consiste, evidentemente, de pelo menos três elementos: os signos em si, seus significados (*interpretantes*) e aquilo ao qual ele se refere, seu *objeto*.

Portanto, conceituamos semiótica como a ciência que trata da relação entre os signos, seus objetos e outros signos. Signo é tudo aquilo que representa algo para alguém, como um grito, uma mancha, uma quadra, uma biblioteca, entre outros, valendo-se da relação triádica descrita por Peirce, na qual ele afirma que:

Signo ou *representâmen* é aquilo que, sob certo aspecto ou modo, representa algo para alguém. O signo cria na mente da pessoa um signo equivalente ou talvez um signo mais desenvolvido. O signo, assim criado, denomina-se *interpretante* do primeiro signo. O signo representa alguma coisa, seu *objeto* (Peirce, 2010, p. 46).

Fazendo um exercício de semiótica, consideremos o signo apresentado na figura 1 e realizaremos uma pequena análise da relação triádica proposta por Peirce.

Figura 1: Este é o pi?



Fonte: o próprio autor.

Este signo representa algo para alguém, que pode ser uma letra de algum alfabeto, um número ou qualquer outra coisa. Este signo remete a um objeto, que pode ser, por exemplo, um número ou uma letra. O signo mostrado na figura 1 gera na mente de quem o percebe um signo mais desenvolvido, uma interpretação desse primeiro signo, que chamamos de *interpretante*. Esse *interpretante* é o que produz significado, ou seja, esse número vale 3,14 (por exemplo).

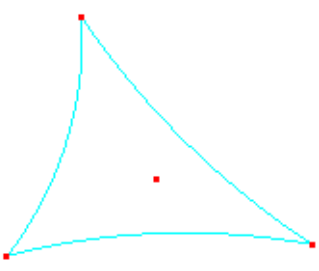
Conceituamos a Matemática como uma atividade semiótica de “construção de diagramas, de experimentação sobre esses diagramas e de verificação dos resultados” (Cruz, 2021, p.8). Peirce afirma que todo raciocínio necessário é raciocínio matemático e, por



consequência, é diagramático, escrevendo que “diagrama é um *representâmen* que é predominantemente um ícone de relações e é ajudado a ser assim por convenções. Índices são também mais ou menos usados. Isto deve ser realizado sobre um sistema perfeitamente consistente de representações fundada sobre uma ideia simples e facilmente inteligível” (CP³, 4. 418).

Cruz escreve que “para Peirce, todo raciocínio é definido por tríades e uma tríade particularmente importante é a que envolve os três tipos de signos: o *ícone*, o *índice* e o *símbolo*” (2015, p.33). O ícone é considerado um signo diagramático que mantém uma semelhança ou analogia com o objeto representado. o *índice* é um signo que, tal como um pronome demonstrativo ou relativo, chama a atenção para o objeto particular que está sendo representado. E o *símbolo* é um signo que denota o nome ou a descrição geral, significando o objeto por meio de uma associação de ideias ou conexão habitual entre o nome e a característica do significado (Peirce, 2010). Para ilustrar, o quadro 1 apresenta uma noção de como percebemos esses signos na Matemática. Vamos supor um estudo sobre os elementos da geometria hiperbólica.

Quadro 1: Os signos na geometria hiperbólica

Ícones	Índices	Símbolos
	ΔABC (hip)	Triângulo hiperbólico

Fonte: O próprio autor

Segundo Cruz (2022, p. 11), “ícones, índices e símbolos são necessários para a consistência, significação e o desenvolvimento do raciocínio diagramático”. O mesmo autor também nos lembra que “a fase central do processo de raciocínio diagramático é a dedução e em todo processo dedutivo sempre há abdução” (Ibid). Esta última consideração remete a Peirce (2010), que apresenta o que ele considera ser as três espécies fundamentais de raciocínios: dedução, indução e abdução.

Dedução é conceituada como um tipo de raciocínio cuja função é examinar o estado de coisas apresentado nas premissas de um argumento, “elaborando um diagrama desse estado de coisas e percebendo nas partes desse diagrama relações não explícitas nas premissas” (Cruz, 2022, p. 12, 13). É importante ressaltar que a dedução é a fase central do processo ou do desenvolvimento do raciocínio diagramático e é responsável pela construção de diagramas, assim como pelas percepções, experimentações e conclusões sobre a verdade das relações envolvidas neste diagrama construído.

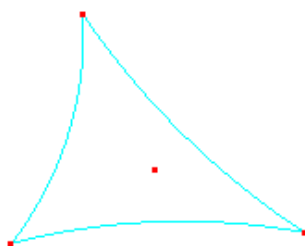
A indução é conceituada por Peirce como o “modo de raciocínio que adota uma conclusão como aproximada por resultar ela de um método de inferência que, de modo geral, deve no final conduzir a verdade” (Peirce, 2010, p. 6).

A abdução pode ser conceituada de duas formas. A primeira é descrita como

³ Seguindo uma prática padrão referente as obras de Peirce, adotamos a referência CP para indicar Collected Papers de Charles Sanders Peirce, por exemplo – CP 5.313, o primeiro número corresponde ao volume e os demais ao parágrafo.

“conjecturas espontâneas da razão instintiva” (CP, 6.475), o que implica uma reação criativa mediada por um instinto social, revelando uma “faculdade eminentemente criadora, que se volta não para a satisfação do indivíduo em si, mas para a coletividade” (Santaella, 2004, p. 106). A segunda forma refere-se à adoção de uma ideia nova que não estava contida nas premissas iniciais do problema (ou argumento). Peirce argumenta que abdução “é o único tipo de argumento que inicia uma ideia nova” (CP, 2.96). Por exemplo, ao observar a figura 2, um aluno pode, com base em seu instinto social sobre a ideia de triângulos, identificar que a figura é um triângulo. Após as primeiras análises, esse mesmo aluno pode perceber relações nas partes desse triângulo, iniciando a construção de outras possibilidades de análises.

Figura 2: Isto é um triângulo?



Fonte: O próprio autor.

Em síntese, a consideração da Matemática como atividade semiótica envolve a construção, experimentação e verificação de resultados em diagramas. Por meio deste processo, a Matemática se constitui como um tipo de raciocínio que Peirce denomina de diagramático. A característica essencial do raciocínio diagramático é que esse tipo de raciocínio tem que ser realizado dentro dos limites de um determinado sistema de representação, ou seja, em um contexto teórico no qual a verdade de um fato pode ser evidenciada. A Matemática desempenha um papel mediador que, por um lado, representa desenhos construtivos que não são meras imagens, mas analogias ou metáforas, cuja característica essencial é a iconicidade, e, por outro lado, assume a sua função lógica (Otte, 2014).

A consideração da Matemática como atividade semiótica traz à tona o conceito de explicação relacionado à forma de representar; isto é, “do ponto de vista matemático, explicar significa representar” (Cruz, 2018, p. 129). Como argumentado por Otte (2012), uma representação é o aspecto de uma percepção, que se apresenta de uma determinada forma. Portanto, não podemos transformar um conceito ou qualquer objeto na Matemática sem um símbolo. “Em síntese, o significado de generalizar está relacionado a compreender um aspecto geral em uma representação particular e é desse modo que desenvolvemos qualquer prova, problema e/ou atividade que tenham essa característica” (Cruz, 2023, p. 8).

3 A perspectiva da pesquisa na semiótica peirceana

Nossa plataforma de pesquisa baseia-se nos quatro princípios da teoria mental e da cognição peirceana, considerados processos inferenciais. Esses princípios, juntamente com a complementaridade de intensão e extensão, fornecem os caminhos metodológicos e de análise das pesquisas desenvolvidas neste campo conceitual. Santaella (2004) denomina esses princípios como as quatro incapacidades, que correspondem ao processo de oposição de Peirce e seu pragmatismo ao cartesianismo, ou seja:

- a) Não temos nenhum poder de introspecção, mas todo conhecimento do mundo interior é derivado por raciocínio hipotético do nosso conhecimento de fatos externos;
- b) Não temos poder de intuição, mas toda cognição é determinada logicamente por



cognições prévias; c) Não temos o poder de pensar sem signos; d) Não temos concepção do absolutamente incognoscível (Peirce, 1992, p.30)

Em relação ao primeiro princípio, que afirma a ausência de poder de introspecção, Santaella escreve que isso “significa o abandono de preconceitos enraizados e crenças numa autoconsciência intuitivamente acessível” (Santaella, 2004, p. 49). Não se trata mais do pensamento em si, mas da relação com outros pensamentos. No que se refere ao segundo princípio, é apresentado o fato de que não há cognição originária; a cognição é um processo contínuo expresso em termos de inferências válidas de três tipos: dedução, indução e abdução (hipótese) (Santaella, 2004). Uma postulação como essa, referente ao segundo princípio, pode causar incômodo ou até mesmo assustar, pois parece impossível não ter havido uma primeira cognição. Sobre esse fato, Santaella esclarece que:

Nossa maior relutância em aceitar a ausência de uma origem, contudo, está no fato de que o senso comum nos faz tomar as descrições das situações perceptivas corriqueiras como um modelo de cognição, modelo este que encontrou eco e respaldo no processo de estímulo (origem) e resposta (término) que o behaviorismo popularizou no meio científico (2004, p. 52).

O que Peirce queria dizer ao considerar a cognição como um processo era que a origem de qualquer pensamento não pode ser especificada, isto é, “em nenhum momento ou de modo algum somos capazes de precisar onde um pensamento começou ou acabou” (Santaella, 2004, p. 52).

Sobre a impossibilidade de pensamentos sem signos, Santaella esclarece que “em qualquer momento que tenhamos um pensamento, estará presente na consciência algum sentimento, imagem ou concepção, ou outra representação que serve como signo” (2004, p. 50). O quarto princípio está relacionado à nossa capacidade de desenvolver pensamentos sobre outros pensamentos, isto é, o signo, segundo Santaella (2004, p. 51), “tem três referências: a) ele é um signo para (*to*) algum pensamento que o interpreta; b) ele é um signo de (*for*) algum objeto do qual ele é equivalente naquele pensamento; c) ele é um signo em algum aspecto ou qualidade, o que o põe em conexão com seu objeto”, isto quer dizer que, sendo o pensamento um signo, é sempre possível associá-lo a outro pensamento “que pode ser de uma outra pessoa por meio de uma expressão qualquer, exterior ou comunicável; mas, mesmo que nenhuma outra pessoa esteja envolvida, nosso pensamento se dirigirá a um outro pensamento subsequente no processo de pensamento que somos nós” (Santaella, 2004, p. 51).

Em síntese, do ponto de vista semiótico, pensar é representar, e essa ação de representação, ou de pensamento, pode ser traduzida, com base em Cruz (2023), como epistemologia semiótica. Ou seja, “[...] essa epistemologia visa explicar que a essência de uma representação está em outra representação, e a essência dessa segunda representação está numa terceira, e assim sucessivamente” (Cruz, 2023, p. 9).

Segundo Otte (1993), o processo de construção do conhecimento se constitui na ação de novos objetos que são introduzidos no pensamento, e novos conhecimentos surgem desses objetos. Em relação à Matemática, Cruz (2023) entende que qualquer objeto matemático só pode ser acessado por meio de uma representação desse objeto; portanto, essa epistemologia é fundamental para a compreensão de qualquer tipo de número, objetos geométricos e outros elementos da Matemática.

Otte disserta que “a abordagem semiótica para a cognição e a epistemologia não se preocupa em desvendar como se chega às representações. A intuição de Kant se transforma em um mero momento de construção de representações” (Otte, 2012. P. 17). O que deve ser considerado é que essas representações são os meios, os instrumentos ou os artefatos da



atividade cognitiva, que chamamos de intensão.

Concluimos afirmando que o ato de pensar é sempre pensar em algo. Esse algo é o objeto do pensamento, ou seja, não existem pensamentos sem objetos. O objeto é o motivo da atividade, e atividade e motivo estão sempre interconectados. Atividade sem motivo não existe. Esse objeto é que estamos chamando de extensão. Ressalta-se a importância da complementaridade de meios (intensões) e objeto (extensão).

Para compreender o motivo de uma atividade, é necessário realizar ações que não se conectem diretamente com o motivo ou objeto da atividade. Por exemplo, para obter um livro da biblioteca da Universidade Federal de Juiz de Fora, é preciso realizar diversas ações, como caminhar até a biblioteca, às vezes atravessar a rua, subir escadas, pegar o elevador, entre outras. Nossa proposta para a Educação Matemática é que essas ações, no contexto do ensino de matemática, sejam desenvolvidas por meio do processo de experimentação mental.

A noção de complementaridade foi introduzida na física pelo físico dinamarquês Niels Bohr. Esse princípio foi considerado fundamental na mecânica quântica. Bohr afirmava que os objetos possuem propriedades complementares e que, ao mesmo tempo, não podem ser medidos com precisão. Em outras palavras, “este princípio foi introduzido na física quântica por Niels Bohr, para dar conta do fato de que nela a interação entre os aparelhos de medição e os objetos constituem uma parte essencial do fenômeno físico” (Otte, 1993, p. 219). Por exemplo, os aspectos de partícula e de onda de objetos físicos são fenômenos complementares, pois é impossível que um objeto seja uma partícula e uma onda ao mesmo tempo.

A complementaridade, mais do que dualidade, implica a interação e a relação entre uma coisa e outra, ou seja, “[...] ao invés de separar conceitos em isto ou aquilo, nós consideramos ambos como isto mais aquilo” (Cruz, 2018, p. 43). Otte afirma que na “verdadeira complementaridade nenhum dos dois elementos, meio e objeto, pode ser determinado sem o outro, apesar de desempenharem, num determinado momento de um certo ato epistemológico individual, um papel complementarmente assimétrico” (1993, p. 224). Esse mesmo autor continua afirmando que:

Quando se deseja progredir da dualidade ou polaridade, como ainda ocorre em Kant, para uma genuína complementaridade, pela qual cada um dos elementos polares tanto diferencia-se do outro como o abrange, então, é preciso, colocando a atividade como a essência da relação sujeito-objeto, procurar descrever a dinâmica dessa atividade como uma entidade independente, que se diferencia tanto da consciência quanto da realidade objetiva (1993, p. 224).

Cruz disserta que a “noção de complementaridade é relevante para qualquer estudo epistemológico, em particular dos fundamentos da Educação Matemática, por entender a Matemática a partir de uma perspectiva genética” (2018, p. 44). Com a crença de que todo pensamento ocorre por meio de signos em vez de coisas em si mesmas, a complementaridade de intensão e extensão é fundamental por destacar a distinção entre coisas e sinais. Assumimos nesta pesquisa as ideias de complementaridade de Otte (2003), que surgem do fato de que os signos são, ao mesmo tempo, usados referencialmente (ícones) e atributivamente (índices). Essa complementaridade se distingue da mera dualidade por considerar a perspectiva genética do conhecimento, que foca o caráter evolutivo da Matemática por meio da relação dialética entre sujeito e objeto.



4 Experimentos Mentais como metodologia de ensino para Matemática – artefato cognitivo

No contexto da formação de professores e na educação básica, a álgebra, por exemplo, tende a ser apresentada como um tipo de jogo completamente formal, ou seja, uma linguagem desprovida de objetos. Essa agnição da álgebra domina o pensamento matemático desde o momento em que a concepção intuitiva estreita da objetividade teve prevalência com a geometria euclidiana. A maioria dos professores e alunos que estudam Matemática carrega a impressão de que a álgebra, ou a aritmética, consiste em uma quantidade enorme de ações, sem, de fato, constituir uma atividade objetiva, isto é, uma atividade com objetos.

Há dois tipos de considerações que devem ser ressaltados no que tange a esse domínio da álgebra: A primeira é que álgebra e geometria se desenvolveram lado a lado. A história dos chamados números imaginários é um exemplo disso. O trabalho de Argand, intitulado “*Ensaio sobre uma maneira de representar quantidades imaginárias nas construções geométricas*” (ver: Cruz, 2018, p. 146), retrata bem essa complementaridade entre álgebra e geometria. Isso significa que a geometria pode ter fornecido a semântica para a álgebra. A segunda consideração é que os próprios procedimentos algébricos e algoritmos podem ser tomados em consideração como novos objetos, no sentido das observações sobre abstração reflexiva e *hipostatização*⁴. De maneira mais geral, o próprio processo de raciocínio pode se tornar objeto de consideração.

Otte (2014) argumenta que, em todas as conferências sobre filosofia da ciência, os participantes, especialmente os mais jovens, frequentemente discutem, durante os intervalos, se o estudo da lógica seria suficiente ou adequado para entender a Matemática sob um ponto de vista filosófico, ou se é necessário conhecer a Matemática e praticá-la ativamente. O mesmo autor escreve que “a lógica é baseada na linguagem, e a linguagem é uma instituição social e principalmente comunicativa. As pessoas falam umas com as outras e essencialmente umas sobre as outras. A Matemática e a Ciência são baseadas em experimentos” (2014, p. 60). Ele complementa afirmando que as “palavras mudam mentes e os experimentos mudam as coisas” (2014, p.60). A partir desse ponto, Otte marca a diferença entre Linguagem e Matemática, posicionando a Matemática como um meio de atividade objetiva e pouco comunicativa. Em síntese, pode-se afirmar que “a Matemática não é uma linguagem, mas sim a arte de inventar constantemente novas linguagens e outras ferramentas da atividade e do raciocínio objetivo” (2014, p. 60).

Segundo Otte (2014), a Matemática e a linguagem formam contextos distintos do pensamento e da ação humana. “A Matemática e a Ciência dependem mais da visão do que da linguagem” (2014, p. 60). É fato de que muitos consideram a Matemática como sendo uma linguagem, referindo-se a termos como linguagem dos números, linguagem da álgebra ou linguagem analítica. Effros (1998) no texto *Mathematics as language* apresenta uma breve explicação sobre o motivo pelo qual acredita que a Matemática é, em essência, uma Linguagem, ou pelo menos é mais valorizada como uma Linguagem, como é o caso da utilização nas ciências naturais. Effros argumenta que o “sucesso da física moderna é, em grande parte, uma consequência da linguagem matemática que os físicos têm ao seu dispor” (1998, p. 132).

A alegação de Effros (1998) sobre a Matemática como uma atividade essencialmente linguística e a principal responsável pela estrutura da dedução demonstra o importante papel atribuído às provas formais no desenvolvimento da Matemática. No entanto, esse papel significativo pode levar à noção de que Matemática é apenas uma linguagem lógico-formal, isto é, uma cadeia de proposições e fórmulas. “As provas são elementos do sistema das teorias

⁴ Optamos neste texto em não discutir com mais profundidade os conceitos de abstração reflexiva (com base em Piaget) e hipostatização (com base em Peirce).



matemáticas, e as teorias não são apenas agregações” (Otte, 2014, p. 72).

De outra forma, Otte (2014) explica que a ideia de Matemática como linguagem simbólica está difundida em diversos contextos de sua aplicação, como na Educação Matemática. Isso é evidente, pois, em uma aplicação, há um interesse pelo significado dos símbolos. De fato, o simbolismo Matemático é tão crucial para a Ciência que é difícil imaginar a apresentação de fatos e teorias científicas sem o uso da Matemática. Assim, podemos concluir que a Matemática não se reduz a meros cálculos simultâneos.

Entender a Matemática como uma linguagem formal ou uma lógica nos leva a um paradoxo: de um lado, há a prova lógico-formal, que só pode demonstrar algo que não gera dúvida, desde que esse algo tenha uma estrutura tautológica fixa; nesse caso, o que resta para a prova é realizar um encadeamento de identidades ou semelhanças; por outro lado, a prova reduz o conhecimento a ser demonstrado a conhecimentos já disponíveis, não aparentando ser um conhecimento novo (Otte, 2014).

Mas para que serve a prova? A prova tem o propósito de gerar conhecimento e, consequentemente, “não pode ser simplesmente um processo tautológico que exerça alguma compulsão material ou causal, mas deve conter elementos de generalização e, portanto certamente valer-se da intuição do sujeito” (Otte, 2014, p. 75). Mas como isso é feito? Por meio de Experimentos Mentais. E o que são Experimentos Mentais no contexto da Educação Matemática com base na semiótica Peirceana? Experimentos Mentais “são formas de expor pensamentos por meio de representações como objetos de consideração em uma dada atividade e/ou prova matemática, recorrendo a um contexto teórico bem definido” (Cruz, 2023, p. 1). Tais Experimentos têm o papel de mostrar a coerência do conceito desenvolvido e/ou identificar as possíveis incongruências na aplicação desse conceito. Só é possível pensar na aplicação desses experimentos no ensino da Matemática se considerarmos que esta ciência ou disciplina é uma atividade semiótica.

Cruz (2021, 2022, 2023) apresenta os Experimentos Mentais como uma metodologia para o ensino da Matemática. Esta metodologia se constitui como um artefato cognitivo, cujas bases ideológicas estão ancoradas na concepção histórico-dialética⁵ da educação, dando ênfase à epistemologia, que Manfredi escreve como sendo:

um conjunto de princípios e/ou diretrizes sócio-políticos, epistemológicos e psicopedagógicos articulados a uma estratégia técnico-operacional capaz de reverter os princípios em passos e/ou procedimentos orgânicos e sequenciados, que sirvam para orientar o processo de ensino-aprendizagem em situações concretas (Manfredi, 1993, p. 5).

Instituímos um conjunto com seis características básicas que conferem o caráter organizativo e/ou heurístico para a aplicação dos Experimentos Mentais. Essas características, nomeadas por *Forma*, *Estrutura*, *Compreensão*, *Dependência*, *Revelação* e *Comparação*, constituem as bases da Metodologia aqui apresentada. Esses nomes não carregam os significados que geralmente são atribuídos a eles no senso comum.

Forma, neste contexto, tem o significado de hipóteses ou conjecturas que são dadas por meio de uma representação particular (diagrama) do objeto de estudo (conceitos, problemas, ...). Cruz descreve que “este sistema de atividades supostas nos permite considerar que o mundo, em especial o mundo matemático, consiste em dois tipos de entidades, a saber: signos e objetos. Os signos têm significado e os objetos têm existência real pura” (2021, p. 15).

⁵ Esta concepção tem por base o Materialismo histórico-dialético que optamos em não discutir neste texto.



Estrutura traz a introdução de uma ideia nova que não estava presente nas premissas explícitas do problema, da atividade ou da prova. Esta ideia nova é considerada por Cruz (2023) como uma síntese abdutiva.

Compreensão é a dedução, isto é, o processo de experimentação no diagrama constituído. Este é o processo de percepções e manipulações no diagrama que pode até modificá-lo para se chegar à conclusão do argumento apresentado. Segundo Cruz:

[...] É processo dedutivo no desenvolvimento da experimentação mental. Em comunhão com a Forma e a Estrutura, esse processo inicia-se pela construção de um diagrama, a percepção, nas partes desse diagrama, de relações que não foram explicitadas nas premissas do argumento e, finaliza, por meio de elaborações mentais, na conclusão do argumento apresentado (2023, p. 9).

Dependência é o campo teórico ou teoria de base que está no cerne do processo de experimentação mental, isto é, “todo processo de experimentação mental deve ser feito sob a égide de uma teoria de base consistente, que por vezes é nomeada de sistema de representação” (Cruz, 2023, p. 9 -10).

Revelação exerce dois papéis fundamentais: o primeiro na apresentação dos resultados encontrados no processo; o segundo em revelar contradições e/ou confusões lógicas. Cruz escreve que na aplicação dos “Experimentos Mentais, podemos encontrar contradições ou confusões lógicas no desenvolvimento da dada atividade. Isso permite mostrar aos experimentadores evidências a favor ou contra uma determinada teoria” (Cruz, 2023, p.10).

Comparação abre espaço para outras possibilidades de análises e outras percepções que podem surgir na aplicação de tal metodologia, isto é, “mostra a possibilidade de outros resultados e de uma generalização mais ampla” (Cruz, 2023, p. 10).

Como exemplo, vamos apresentar uma atividade cujo objetivo é mostrar que, dados dois números positivos x e y , sendo $x > y$, então $xy = \frac{(x+y)^2}{4} - \frac{(x-y)^2}{4}$. Lembrando que nossa intenção não é mostrar o procedimento algébrico para conferir o resultado, mas desenvolver um Experimento Mental no qual x e y representem segmentos de reta formando quadrados. Estamos fazendo uma interpretação própria do método geométrico babilônico de multiplicar usando quartos de quadrados. Na aplicação da metodologia, destacaremos as características dos Experimentos Mentais. Para esta finalidade, usaremos o software de geometria dinâmica *Geogebra*, nosso artefato cognitivo no contexto externalista.

Problema: Sejam x e y dois números positivos (números reais), sendo $x > y$. Provar que:

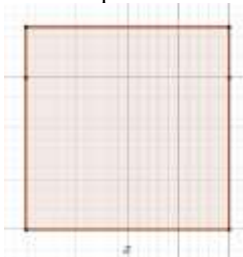
$$xy = \frac{(x+y)^2}{4} - \frac{(x-y)^2}{4}.$$

Desenvolvendo a Experimentação

Forma: Por hipótese, consideremos o quadrado cuja medida do lado seja representada por x , como mostrado na figura 3.



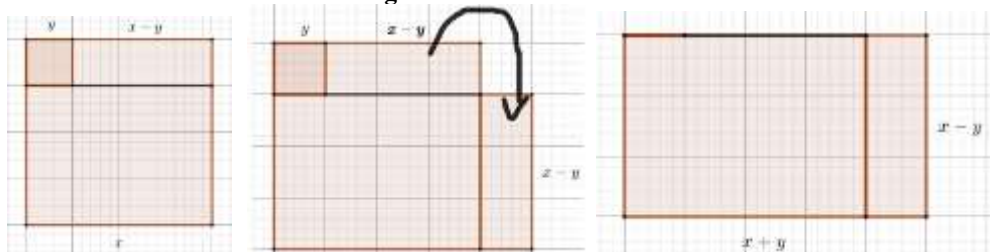
Figura 3: O quadrado de lado x



Fonte: O próprio autor.

Estrutura: Partindo da ideia de destacar um quadrado na figura 3 com o lado medindo y e perceber um retângulo com lados y e $x - y$, que é transportado para o lado x do quadrado, formando um retângulo com lados $x + y$ e $x - y$ como na figura 4, uma ideia nova é trazida para o problema.

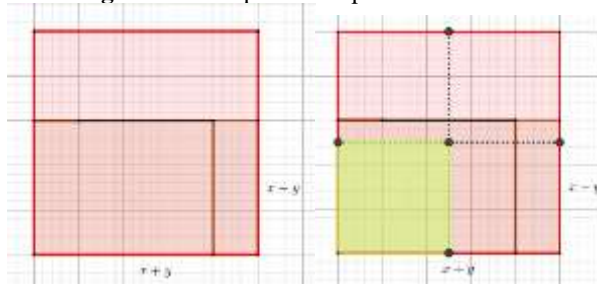
Figura 4: Síntese abductiva



Fonte: O próprio autor.

Compreensão: Com base nesse pensamento abductivo, ou seja, nessa nova ideia, construímos um quadrado de lado $x + y$ e consideramos um quarto desse quadrado, destacado pela cor verde na figura 5.

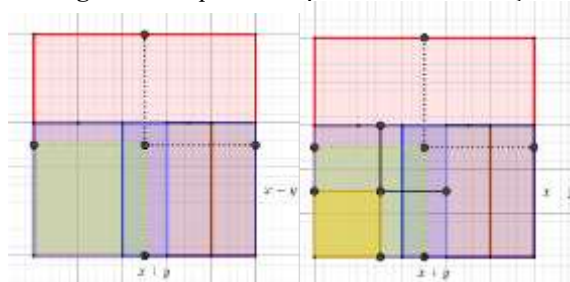
Figura 5: Um quarto do quadrado da soma



Fonte: O próprio autor.

Também construímos um quadrado de lado $x - y$, representado pela cor azul, e tomamos uma quarta parte desse quadrado para constituir o quadrado laranja. (ver figura 6).

Figura 6: O quarto do quadrado da diferença

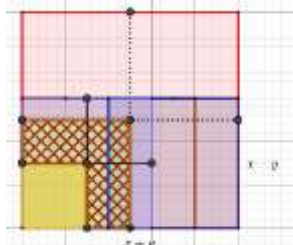


Fonte: O próprio autor.



Verifica-se que a diferença entre o quadrado verde e o quadrado laranja representa $\frac{(x+y)^2}{4} - \frac{(x-y)^2}{4}$, como pode ser visto na parte ladrilhada da figura 7.

Figura 7: A diferença entre quartos de quadrados

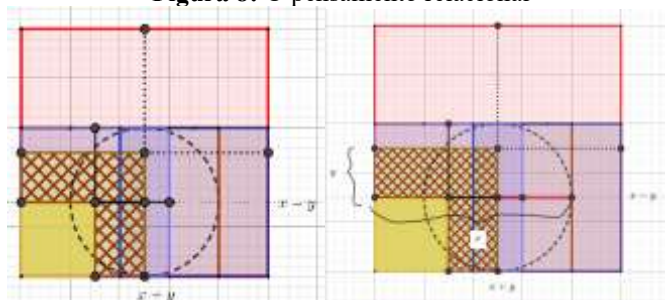


Fonte: O próprio autor.

Dependência: Todo processo, desde o início, baseia-se na interpretação que fizemos do método geométrico dos babilônios.

Revelação: Percebe-se que, na figura 12, ao transportar a parte ladrilhada, forma-se exatamente um retângulo com lados x e y , cuja área é xy .

Figura 8: O pensamento relacional



Fonte: O próprio autor.

Portanto, concluímos que $xy = \frac{(x+y)^2}{4} - \frac{(x-y)^2}{4}$.

Comparação: Outras possibilidades podem ser discutidas neste processo, como, por exemplo, o que acontece se $x = y$? Como ficaria se $x = 3$ e $y = 4$? Essas possibilidades podem servir como disparadoras para outros Experimentos. No caso de nossa atividade, podemos verificar os resultados com diversos valores para x e y .

Este Experimento pode ser realizado tanto com o uso de software de geometria dinâmica, o que é recomendável, quanto com régua e compasso. Também é possível utilizar materiais manipuláveis. O interessante é que a prática demonstra como é possível estabelecer uma correlação semiótica entre elementos da álgebra e da geometria; a essa correlação dar-se o nome de complementaridade. Neste contexto, os números se transformam em grandezas e suas condições de existência são relacionadas às condições de existência do objeto geométrico.

5 Destaque de duas pesquisas desenvolvidas sob a perspectiva semiótica peirceana.

Do ponto de vista da pesquisa, destacaremos dois trabalhos que seguiram esta trilha da semiótica, na perspectiva peirceana e, por meio de Experimentos Mentais, evidenciaram a complementaridade de meios e objetos, intensão e extensão, intuitivo e formal.

O primeiro trabalho é de Vieira (2022), intitulado “Uma Proposta de Ensino de Continuidade de Funções em Cálculo Diferencial e Integral a partir da noção de



Complementaridade”. Essa pesquisa buscou analisar o conceito de continuidade, destacando as perspectivas de Poncelet e Cauchy, e evidenciar a complementaridade de intuição e lógica. Segundo Vieira, o trabalho procurou responder às seguintes questões:

- I. Quais analogias e diferenças existem nos estudos do princípio da continuidade nas perspectivas de Poncelet e de Cauchy? II. Quais contribuições a semiótica nos fornece no âmbito da investigação envolvendo o caminho percorrido de Poncelet a Cauchy? III. Quais concepções e/ou propostas podemos estabelecer para o ensino de cálculo com base nestas analogias e diferenças de maneira que as perspectivas de Poncelet e Cauchy, em relação ao princípio da continuidade, possam ser complementares uma à outra? (2022, p. 11).

Para responder a essas questões, Vieira estabeleceu um conjunto de objetivos que, resumidamente, buscou “analisar e compreender o conceito de continuidade nas perspectivas de Poncelet e Cauchy e como esse conceito está refletido no ensino deste tópico nas aulas de cálculo” (2022, p.11). Com isso, pretendeu investigar o desenvolvimento do conceito de continuidade na visão geométrica de Poncelet e nas concepções formais com o uso de funções de Cauchy, construindo, por meio de Experimentos Mentais, os processos relacionais que permitiram evidenciar a complementaridade entre o formal e o intuitivo.

Vieira (2022) conclui seu trabalho afirmando que:

[...] para Poncelet, a continuidade em uma curva acontece quando todos os pontos dessa curva possuem a mesma propriedade. Assim, a continuidade sai de um campo intensional, para um campo extensional. [...] já Cauchy abre mão da representação e da intuição para ganhar um certo controle sobre a curva. Esta é a complementaridade: Poncelet busca a continuidade na figura, enquanto Cauchy na estrutura funcional (2022, p. 72).

O segundo trabalho é de Moraes (2023), intitulado “*Uma análise dos números reais em livros didáticos por meio de pistas semióticas*”. Nesse estudo, o autor levanta a questão que orienta sua pesquisa, buscando descobrir “como são abordados os números reais nos livros didáticos e qual significado eles apresentam em suas formas de representação em relação ao pensamento discreto e contínuo matemático?” (Moraes, 2023, p. 21). Para responder a essa questão, o autor estabeleceu como objetivo geral, “[...] analisar como as diferentes definições e conceitos da ideia de números reais vêm sendo discutidos nos livros didáticos da educação básica e sugerir, por meio de Experimentos Mentais, uma proposta de ensino para esses tipos de números” (Moraes, 2023, p. 21).

Após analisar um conjunto de livros didáticos da educação básica, Moraes (2023) conclui que cada livro analisado, com foco na temática sobre os números reais, apresenta uma diversidade de signos e significados. Ele observa que, muitas vezes, parece ocorrer um salto na apresentação de um signo para outro, o que dificulta a análise dos aspectos complementares do pensamento matemático com base nessas referências didáticas.

Essas pesquisas foram desenvolvidas no âmbito do Programa de Pós-graduação em Educação Matemática da Universidade Federal de Juiz de Fora, e outras pesquisas estão sendo realizadas na mesma perspectiva, sempre com o foco na semiótica e na busca de entender a complementaridade de intensão e extensão, por meio da aplicação dos Experimentos Mentais.

6 Conclusão

Destacamos algumas diretrizes importantes para a pesquisa na perspectiva semiótica peirceana, com ênfase na complementaridade de intensão e extensão, apoiando-se no uso dos Experimentos Mentais como metodologia de ensino. A primeira diretriz é considerar que a



Matemática é uma atividade semiótica que opera sobre diagramas, por meio do raciocínio diagramático, que constrói, experimenta e verifica resultados nesses diagramas. Esta diretriz é regida pela consideração peirceana de que todo raciocínio necessário é raciocínio matemático e, por consequência, é diagramático.

A segunda diretriz baseia-se em quatro princípios fundamentais, que podem ser resumidos em: 1 – O nosso não poder da introspecção; 2 – Não poder da intuição originária; 3 – Não poder de pensar sem signos; 4 – Não aceitação da concepção absolutamente incognoscível. Essas diretrizes, em conjunto, mapeiam todo o processo de construção do conhecimento, especialmente no que se refere ao conhecimento matemático.

A terceira diretriz refere-se ao princípio da complementaridade como ação de análise de pensamentos, visto que a semiótica, neste ponto de vista, é a ciência dos pensamentos por meio de signos relacionados a seus objetos e a outros signos. Buscamos identificar e analisar essa complementaridade na aplicação dos Experimentos Mentais como artefatos cognitivos. Tais experimentos constituem uma metodologia de ensino para a Matemática e fonte de construção de ideias e conceitos a serem debatidos à luz da semiótica.

Sem dúvida, há muito a debater sobre essa temática. O que buscamos nesta breve apresentação foi construir um disparador de ideias a serem exploradas, analisadas e pensadas no campo da Educação Matemática. Assumimos que a Educação Matemática é uma área que também se preocupa em entender o desenvolvimento do conhecimento, em especial do conhecimento matemático. Essa compreensão pode se efetivar, ao nosso ver, por meio de uma perspectiva semiótica sobre a construção de conceitos e o desenvolvimento de problemas e atividades no processo de ensino e aprendizagem da Matemática.

7 Agradecimento

Agradecemos ao CNPq pelo apoio, por meio da Chamada Universal CNPq/MCTI N° 10/2023 – Projeto Colaboratório de Semiótica Cognitiva.

8 Referências

- Cassirer, E. (1994). *Ensaio sobre o homem: introdução a uma filosofia da cultura humana*. São Paulo: Martins Fontes.
- Cruz, W. J. (2015). *Experimentos mentais e provas matemáticas formais*. Tese (Programa de Doutorado em Educação Matemática) – Coordenadoria de Pós- graduação, Universidade Anhanguera de São Paulo.
- Cruz, W. J. da. (2023). Por que $\sqrt{2}$ é irracional? Buscando explicações nos processos de experimentação mental. *Educação Matemática Em Revista*, 28(79), 1-15. <https://doi.org/10.37001/emr.v28i79.3007>.
- Cruz, W. J. (2018). *Experimentos Mentais na Educação Matemática: uma analogia com provas matemáticas formais*. Curitiba: Editora Appris.
- Cruz, W. J. (2022) *Experimentos Mentais: uma nova metodologia para o ensino de Matemática*. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda.
- Cruz, W. J. (2021) O uso dos experimentos mentais como possível metodologia de ensino da matemática: um olhar epistemológico. Florianópolis. *Revista Eletrônica de Educação Matemática – REVEMAT*, v.16, p. 01 – 26.
- Effros, E. G. (1998) *Mathematics as language*. En H.G. Dales and G. Oliveri (Ed.), Truth in Mathematics, Cap.7, pp.131-145. New York: Oxford UP.



- Manfredi, S. M. (1993). Metodologia de ensino – diferentes concepções (versão preliminar). Campinas: F. E./UNICAMP.
- Moraes, A. S. (2023). *Uma análise dos números reais em livros didáticos por meio de pistas semióticas*. (Mestrado em Educação Matemática) - Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática - UFJF, Juiz de Fora. Disponível em: <https://repositorio.ufjf.br/jspui/handle/ufjf/15746>. Acesso em: 25 fev. 2024.
- Otte, M. F. (2012). *A realidade das Ideias: Uma perspectiva epistemológica para a Educação Matemática*. Cuiabá: EDUFMT.
- Otte, M. F. (2014). Analytische Philosophie Anspruch und Wirklichkeit eines Programms. Hamburg: *Felix Meiner Verlag*.
- Otte, M. F. (2003). Complementary, Sets and Numbers. *Educational Studies in Math*, [S.l.], v. 53, p. 203-228.
- Otte, M. F. (1993). *O formal, o social e o subjetivo: uma introdução à filosofia e à didática da matemática*. São Paulo: Editora da Universidade Estadual Paulista.
- Peirce, C. S. (2010). *Semiótica*. Trad. José Teixeira Coelho Neto, 4 ed. São Paulo: Perspectiva.
- Peirce, C. S. (NEM). (1976). *The New Elements of Mathematics by Charles S. Peirce*. Carolyn Eisele (ed.). Vol. I-IV, The Hague- Paris/Atlantic Highlands, N.J.
- Peirce, C. S. (1992). *The essential Peirce*. vol. 1. Editora: Indiana University Press 601 North Morton Street Bloomington, IN 47404-3797 USA.
- Peirce, Ch. S. *CP = Collected Papers of Charles Sanders Peirce*, Volumes I-VI, ed. by Charles Hartshorne and Paul Weiß, Cambridge, Mass. (Harvard UP) 1931-1935, Volumes VII-VIII, ed. by Arthur W. Burks, Cambridge, Mass. (Harvard UP) 1958 (quoted by no. of volume and paragraph). NEM = New Elements of Mathematics. Harvard U.P.
- Queiroz, J., & Atã, P. (2018). Externalismo, iconicidade e cognição distribuída em C.S.Peirce. *OuvirOUver*, 14(1), 44–54.
- Santella, L. (2004). *O método anticartesiano de C. S. Peirce*. São Paulo: Editora UNESP.
- Vieira, L. S. (2022). *Uma proposta de ensino de continuidade de funções em cálculo diferencial e integral a partir da noção de complementaridade*. (Mestrado em Educação Matemática) - Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática - UFJF, Juiz de Fora. Disponível em: <https://repositorio.ufjf.br/jspui/handle/ufjf/14505>. Acesso em: 25 fev. 2024.