



O sinal de igual e a relação de equivalência: um estudo diagnóstico com estudantes dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental

The equal sign and the equivalence relationship: a diagnostic study with students in the Early Years of Elementary School

Vera Lúcia Merlini¹
Sandra Maria Pinto Magina²
Antônio Cesar Nascimento Teixeira³

Resumo: Este estudo objetiva investigar a concepção do sinal de igualdade que os estudantes do 3º e 5º Anos do Ensino Fundamental têm ao se deparar com situações de relação de equivalência. Trata-se de estudo diagnóstico, realizado com 51 estudantes do 3º e 60 do 5º Ano, todos de Escola Pública. Este artigo analisa a resposta de um dos problemas desse diagnóstico. O aporte teórico contou com Kieran, Booth, Carraher e Schliemann, entre outros. Conclui-se que a concepção do sinal de igual desses estudantes está limitada a de operador, o que denota haver necessidade da ampliação da interpretação do sinal de igual, já desde os Anos Iniciais do Ensino Fundamental. O estudo recomenda que os significados do sinal de igual sejam trabalhados nas formações, inicial e continuada, dos professores dos Anos Iniciais.

Palavras-chave: Concepção. Equação. Significados do sinal de igual.

Abstract: This study aims to investigate the conception of the sign of equality that students in the 3rd and 5th years of Elementary School have when faced with situations of equivalence relationships. This is a diagnostic study, carried out with 51 students from the 3rd and 60 from the 5th year, all from public schools. This article analyzes the answer to one of the diagnostic problems. The theoretical contribution included Kieran, Booth, Carraher and Schliemann, among others. It is concluded that these students' conception of the equals sign is limited to that of an operator, which denotes the need to expand the interpretation of the equals sign, starting from the Early Years of Elementary School. The study recommends that the meanings of the equal sign be worked on in the initial and continuing training of primary school teachers.

Keywords: Conception. Equation. Meanings of the equal sign.

1 Introdução

O interesse do presente estudo está em investigar as concepções que estudantes do 3º e do 5º anos apresentam sobre o sinal de igualdade, quando se deparam com situações de relação de equivalência. Esta relação aparece de sobre maneira em situações de equação. Ribeiro e Cury (2015) e Ribeiro (2016) defendem que uma das formas de se conceber a equação é pelo seu caráter pragmático. Eles descrevem tal caráter como sendo “equação interpretada a partir de problemas de ordem prática. Equação admitida como uma noção primitiva. Busca pela solução predominantemente aritmética” (Ribeiro & Cury, 2015, p. 26).

Entende-se que esta forma de conceber equação está relacionada aos problemas encontrados nos Anos Iniciais, período em que as situações trabalhadas estão voltadas para a Aritmética, no sentido de que suas respectivas respostas são únicas e numéricas. A partir desta

¹ Universidade Estadual de Santa Cruz (UESC/BA) • Ilhéus, BA - Brasil • ✉ vlmerlini@uesc.br • ORCID <https://orcid.org/0000-0001-9784-3546>

² Universidade Estadual de Santa Cruz (UESC/BA) • Ilhéus, BA - Brasil • ✉ smpmagina@uesc.br • ORCID <https://orcid.org/0000-0003-0383-9744>

³ Grupo de pesquisa RePARE, UESC/CNPq • Ilhéus, BA - Brasil • ✉ cesarteixeira.ios@gmail.com • ORCID <https://orcid.org/0000-0003-2702-9746>



concepção é possível questionar: nessa fase escolar trabalha-se com situações que remetam a equações?

Segundo a Base Nacional Comum Curricular (BNCC, 2017), deve-se introduzir a ideia de equação já na fase dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental. Esse conceito pertence à Unidade Temática Álgebra. E nela, a igualdade ganha seu destaque a partir do 3º Ano do Ensino Fundamental, embora os Livros Didáticos já tragam situações para serem trabalhadas desde o 1º Ano escolar (Bitencourt, 2018). A BNCC (2017) destaca nos Objetos de Conhecimento a Relação de Igualdade no 3º Ano; no 4º Ano as Propriedades da igualdade; e no 5º ano as Propriedades da igualdade e noção de equivalência. De acordo com esse documento

A relação de equivalência pode ter seu início com atividades simples, envolvendo a igualdade, como reconhecer que se $2 + 3 = 5$ e $5 = 4 + 1$, então $2 + 3 = 4 + 1$. Atividades como essa contribuem para a compreensão de que o sinal de igualdade não é apenas a indicação de uma operação a ser feita (Brasil, 2017, p. 268).

De fato, a BNCC ressalta que o sinal de igual vai para além de apresentar o resultado de uma operação, seja ela qual for (a soma na operação de adição e o produto na operação de multiplicação, por exemplo) (Brasil, 2017). Esse sinal indica uma importante relação de equivalência entre dois membros de uma mesma equação, como ficou explicitado no exemplo numérico em que $2 + 3 = 4 + 1$. Assim o sinal de igualdade indica que o resultado da operação dos dois números que lhe antecede equivale ao resultado da operação dos dois números que lhe sucede. Essa equivalência entre os dois termos pode ser lida e interpretada como equivalência mesmo que os termos sejam trocados, isto é, seja $2 + 3 = 4 + 1$ ou seja $4 + 1 = 2 + 3$ fala-se da mesma igualdade entre os termos. São esses diferentes modos de apresentação que ampliam a ideia do sinal de igual, elevando-o para uma relação de equivalência.

2 O caminho da pesquisa sobre relação de equivalência nas últimas quatro décadas

Tendo em vista o tema escolhido deste estudo, a igualdade, é pertinente iniciar a discussão a partir do sinal de igual. Os estudos pioneiros, realizados por Kieran (1981) já abordavam o uso do sinal de igualdade nas escolas primárias e como os estudantes aprendiam o simbolismo elementar escrito da aritmética sem dificuldade. Entretanto, a interpretação da igualdade estava centrada na ação, isto é, o sinal de igual estava atrelado ao fazer algo, tinha o sentido de um operador, não sendo visto como uma relação de equivalência. De acordo com a autora, o termo equivalência é mais abrangente, ao passo que para os estudantes a interpretação da igualdade está centrado em ações, as frases aritméticas refletem a ordem de seus cálculos.

Uma década depois, os estudos de Booth (1995) buscou identificar os tipos de erros cometidos por estudantes entre 13 e 16 anos ao resolver problemas algébricos. Ele observou resultados semelhantes aos de Kieran ao longo de todos os anos escolares referentes a essas idades. A partir desses resultados foi possível identificar que esses erros estavam relacionados a: “(a) foco na atividade algébrica e a natureza das ‘respostas’; (b) o uso da notação e da convenção em álgebra; (c) o significado das letras e das variáveis; (d) os tipos de relações e métodos usados em aritmética” (Booth, 1995, p. 24). No que se refere ao item (b), o autor destaca que na aritmética os símbolos de $+$ e $=$ estão atrelados a alguma ação a ser realizada, o sinal $+$ significa efetue a operação de adição enquanto o sinal $=$ é compreendido como escreva a resposta.

Na primeira década deste século, Ponte, Branco e Matos (2009) trouxeram uma ampla discussão a respeito da relação de igualdade e o uso do sinal de igual. No contexto matemático, os autores asseveram que a ideia de igualdade se aproxima mais do significado de equivalência



do que de identidade. Na Matemática, ao afirmar que um objeto só é idêntico a ele mesmo, o que justifica o significado identidade e, por outro lado, a equivalência matemática é sempre relativa. Nesse caso, a relação de igualdade é uma relação de equivalência, ou seja, ela é simétrica, uma vez que se $a = b$ então $b = a$, para quaisquer elementos a e b ; reflexiva, $a = a$ para todo elemento a ; assim como é transitiva, se $a = b$ e $b = c$ então $a = c$. É possível observar que os elementos que estão à esquerda e à direita do sinal são diferentes, isto é, não existe identidade entre eles, contudo representam o mesmo número, são equivalentes.

O sinal de igual é introduzido desde os Anos Iniciais e, comumente, ele é trabalhado como resultado de uma operação aritmética. Segundo Ponte, Branco e Matos (2009), na expressão $5 + 2 = 7$, por exemplo, está representando a reunião de dois conjuntos, sendo que o primeiro tem 5 elementos e o segundo 2, que gera um terceiro com 7 elementos. Eles advertem que ao apresentar as operações aritméticas similares a essa, sejam elas do campo aditivo ou multiplicativo, o professor esteja atento a esse sinal de igual, chamando a atenção dos estudantes que ele representa uma equivalência entre o primeiro e o segundo membro.

Na segunda década deste século, continuou a experienciar avanços nos estudos que focam na relação de equivalência, em especial aqueles que investigavam esse conceito no âmbito dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental. Podemos apontar as contribuições dos estudos de Bitencourt (2018) e de Bastos e Merlini (2020). O primeiro pesquisou sobre a presença do padrão de sequência, da equivalência e da relação funcional nos livros didáticos dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental. No que tange às relações de equivalência predominam tarefas com uso do ícone na situação da balança. No que se refere a situações-problema utilizando a representação numérica essas estão relacionadas a decomposição de números “com alguns aspectos que oportunizam discussões a respeito da igualdade. Eles trazem tarefas que trabalham com diversas operações de adição e multiplicação, que determinam o mesmo resultado” (Bitencourt, 2018, p. 119).

Já o segundo estudo analisou as estratégias de resolução de quatro alunos frente a duas situações que contemplam o contexto das equações. Com dados coletados a partir do método clínico piagetiano (Piaget, 2005) e encontrou que alunos dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental conseguem resolver situações com ênfase nas equações e na relação funcional. Esses alunos têm grande potencial em desenvolver o pensamento algébrico, ficando evidente quando fazem uso de propriedades algébricas e apresentam ideias gerais a partir de situações particulares.

3 Aporte teórico

Chegando em nossos dias, continuamos a encontrar valiosas contribuições sobre o tema nos estudos realizados por Radford (2022, p. 1151) afirma que “o conceito de igualdade numérica e o consequente conceito de equação são partes centrais da matemática escolar”. A partir dos resultados de diversas pesquisas realizadas com estudantes da Educação Básica, ele observou que foram identificados dois significados para o sinal de igual: um deles é o processual no qual o estudante concebe o sinal de igual com uma inscrição de realizar um cálculo; e o segundo é o significado relacional, no qual a igualdade refere-se a algum atributo entre os membros da equação que foram equiparados.

Diante disso, Radford (2022) desenvolve uma pesquisa longitudinal na qual acompanha uma turma de 2ª até a 4ª série de uma escola pública do Canadá, contudo nesse estudo ele analisa as resoluções externadas quando esses estudantes estavam na 3ª série. As atividades foram propostas por meio de problemas envolvendo cartões de hóquei e envelopes lacrados, nos quais as quantidades desses eram desconhecidas. Esses problemas foram apresentados de



forma manipulável, denominado por Sistema Semiótico Concreto; e depois representados pelos respectivos desenhos icônicos, chamado por Sistema Semiótico Icônico. Como principais resultados alcançados nesse estudo, o autor revela que há uma tendência de recorrer aos Procedimentos Computacionais e de Comparação. Entretanto, tal comportamento foi alterado na medida que, em trabalho conjunto com o professor, os estudantes puderam encontrar sentido às regras da equação, da necessidade de manter equivalência entre os dois membros, característica de Procedimentos Relacionais. Assim, é possível destacar que o significado relacional é complexo e necessita da intervenção do professor.

A esse respeito, os resultados dos estudos de Jungbluth, Silveira e Grando (2022) apontam que apesar de os professores reconhecerem a equivalência que existe entre os dois membros de uma equação, mencionam que tal não é trabalhado na escola. Além disso, ao responder como eles encontrariam o valor desconhecido da equação: $5 + 6 = __ + 8$, disseram que primeiro fariam a adição entre 5 e 6, depois veriam quanto falta para que o resultado do outro lado da igualdade fosse o mesmo. Esses autores ponderam que, nesse caso, o pensamento relacional não foi utilizado. Para eles, pensamento relacional somente foi expresso após os professores serem questionados sobre que outras estratégias de resolução poderiam usar. Esse resultado corrobora com aqueles encontrados por Magina, Oliveira e Merlini (2018, p. 20) ao afirmar que “não basta propor a introdução de conceitos algébricos nos Anos Iniciais, tampouco mudar o currículo; é preciso principalmente preparar os professores, responsáveis por implantar efetivamente tal currículo”.

Quanto aos significados matemáticos dados ao sinal de igual, Molina, Castro e Castro (2009) trazem 11 significados diferentes do sinal de igual no contexto da aritmética e da álgebra, que auxiliam a explicar a compreensão dos estudantes. Todavia, para efeito desse estudo, destacou-se três deles, a saber: operador; expressão de uma ação e expressão de equivalência, precisamente a equivalência numérica. De acordo com os autores acima,

Operador (também conhecido como significado aritmético ou operacional do sinal de igual). Isso refere-se ao uso do sinal para indicar a resposta a um cálculo ou a simplificação de uma expressão escrita à sua esquerda (por exemplo, $4 \times 5 = 20$, $x(x - 2) + 3x^2 = 4x^2 - 2x$). Isso é interpretado como um símbolo de operador, lido apenas a partir da esquerda para direita. **Expressão de uma ação**: um significado bidirecional que amplia o significado do operador reconhecendo a propriedade simétrica da igualdade. Ocorre em frases com símbolos operacionais em apenas um lado do sinal de igual, à direita ou à esquerda (por exemplo, $2x = x(x - 2) - x^2 + 4x$, $24 = 12 + 12$, $12 + 12 = 24$). **Expressão de equivalência**: Ocorre quando o sinal de igual é utilizado para relacionar dois representantes do mesmo objeto matemático (Molina, Castro & Castro, 2009, p. 347, tradução e grifos nossos).

Nota-se que o significado ‘operador’ indica uma operação a ser realizada e o seu resultado, sua resposta é apresentada à direita do sinal de igual. Como é possível observar a partir dos exemplos, este significado está previsto tanto em situações aritméticas como em situações algébricas, sendo unidirecional. O significado ‘expressão de uma ação’ é diferente do significado operador, pois o resultado poderá estar à direita ou à esquerda do sinal de igual, o que o caracteriza como bidirecional. Por fim, no âmbito do terceiro significado, ‘expressão de equivalência’, Molina, Castro, Castro (2009) destacam três tipos: equivalência numérica; equivalência simbólica e equivalência por definição ou por notação. Esses autores tratam da equivalência numérica quando o sinal de igual conecta-se com duas expressões aritméticas, cujas representações geram o mesmo número. Por exemplo, $2 + 3 = 4 + 1$, ou ainda, $5 \times (4 + 2) = 5 \times 6$ que, embora o primeiro e segundo membro da igualdade sejam diferentes, suas



respostas se equivalem. Além disso, o significado do sinal de igual é tido como relacional, o que difere do operacional aritmético.

Já a ‘equivalência simbólica’ está presente entre duas expressões algébricas nas quais o mesmo valor numérico satisfaz todos os valores das variáveis. Estes dois exemplos ilustram esse tipo de equivalência: $3x^2 + x = x(3x + 1)$ ou, ainda, $a + b = b + a$. Por fim, o significado da ‘equivalência por definição ou por notação’ pode estar presente tanto entre expressões aritméticas quanto algébricas. É possível citar, como exemplo, a relação de equivalência das frações, $\frac{2}{3} = \frac{8}{12}$, a relação entre unidades de medidas $1000mm = 1m$, ou, ainda, uma das propriedades das potências, como $\frac{a}{b} = ab^{-1}$.

Cabe salientar que neste estudo o interesse recai na equivalência numérica. Diante do exposto, é nítido observar que o sinal de igual perpassa tanto pela aritmética como pela álgebra que, segundo Carraher e Schliemann (2018), a interpretação limitada do sinal de igual, de alguns estudantes, fica evidenciada quando eles são apresentados à álgebra.

4 Procedimento Metodológico

No que se refere ao procedimento metodológico, trata-se de um estudo diagnóstico que, de acordo com Rudio (2001), é uma pesquisa descritiva na qual o pesquisador busca conhecer e interpretar a realidade, sem nela interferir. Nesse sentido, para Fiorentini e Lorenzato (2006), a metodologia descritiva descreve e caracteriza a situação analisada com detalhes.

Quanto aos colaboradores da pesquisa, foram 111 estudantes, sendo que 51 deles cursavam o 3º ano e 60 o 5º ano do Ensino Fundamental, de duas Escolas Públicas de um município do Sul da Bahia. A escolha dessas escolas se deu pela acessibilidade, sendo que a escolha das turmas está relacionada ao final de ciclos, de Alfabetização (3º Ano) e o final dos Anos Iniciais (5º Ano). A aplicação do instrumento diagnóstico foi realizada pelos pesquisadores, com a presença da professora da turma, que leram duas vezes cada uma das dez situações referentes aos conceitos algébricos, relação funcional, sequência de padrões e relação de equivalência. Ao terminar a leitura, os estudantes tinham um tempo para resolvê-las e somente quando a maioria tivesse respondido é que se passava para a leitura da situação seguinte. Os estudantes responderam de forma individual e sem apoio de qualquer material, além do lápis e da borracha.

Para efeito deste artigo, foram analisadas as respostas aos três itens (a , b e c) do problema 6, do instrumento diagnóstico. Esta situação, que corresponde à relação de equivalência, está apresentada no Quadro 1, a seguir.

Quadro 1: Problema analisado neste artigo

- 6) Escreva os números que estão faltando para que as sentenças matemáticas fiquem verdadeiras:
- a) $5 + \underline{\quad} = 9$
 - b) $3 + \underline{\quad} = 4 + \underline{\quad}$
 - c) $2 + \underline{\quad} + 3 = 6 + \underline{\quad}$

Fonte: Instrumento diagnóstico utilizado na Pesquisa.

A forma como foi elaborado o item 6a pode ser considerado como uma variante do que Molina, Castro e Castro (2009) consideraram o significado expressão de uma ação, levando em conta que no significado operador o resultado está sempre à direita do sinal de igual, neste item o resultado a ser encontrado é a incógnita que está à esquerda do sinal, o que sugere admiti-lo



como sendo bidirecional. Quanto aos outros dois itens, 6b e 6c, atendem ao significado de expressão de equivalência (Molina, Castro & Castro, 2009), uma vez que o sinal de igual conecta duas expressões aritméticas distintas, cujas representações geram o mesmo resultado numérico.

Quanto à análise dos dados, ela é de natureza qualitativa, pois o interesse do estudo está centrado na concepção do sinal de igualdade que os estudantes do 3º e do 5º Anos dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental ao se deparar com situações de relação de equivalência. Assim, a partir dos protocolos foram criadas categorias de análise.

5 Discussão e análise dos dados

De posse dos protocolos, todas as respostas foram categorizadas, a princípio de quatro formas: Incompreensível; Expressão de uma ação; Operador e Equivalência Numérica, sendo que as duas últimas apresentam subcategorias. O Quadro 2, a seguir, traz as categorias e suas respectivas descrições.

Quadro 2: Categorias de análise e suas descrições

Categorias	1. Incompreensível	Não se entende o raciocínio do estudante
	2. Expressão de uma ação	Admitir o sinal de igual como bidirecional
	3. Operador	3.1 Ignora a incógnita do 2º membro da equação
		3.2 A primeira incógnita satisfaz a Soma 4 (6b) ou 6 (6c) e a segunda incógnita traz o resultado de outra adição
		3.3 A primeira incógnita satisfaz a Soma 4 (6b) ou 6 (6c) e a segunda incógnita traz o resultado dessa adição
		3.4 Realiza a adição entre os números conhecidos sendo que o resultado é a incógnita, ignorando o sinal da igualdade
	4. Equivalência	4.1 Busca a equivalência repetindo o valor para as duas incógnitas
		4.2 A primeira incógnita satisfaz a Soma 4 (6b) ou 6 (6c), a segunda incógnita utiliza o elemento neutro da adição
		4.3 Encontro da relação de equivalência com valores distintos

Fonte: Elaborado pelos autores.

Nas figuras que seguem constam extratos de protocolos, cujo propósito é ilustrar as categorias e subcategorias elencadas com suas respectivas descrições.

Figura 1: Categoria 1 - Incompreensível

Extrato protocolo estudante E349	Extrato protocolo estudante E532

Fonte: Dados de Pesquisa.

A denominação da categoria Incompreensível está relacionada ao não entendimento dos pesquisadores, do porquê da escolha da(s) incógnita(s) feita pelo estudante. Cabe salientar que essa categoria está presente nas respostas registradas pelos estudantes nos três itens (6a, 6b e 6c).



Figura 2: Categoria 2 - Expressão de uma ação

6) Escreva os números que estão faltando para que as sentenças matemáticas fiquem verdadeiras: a) $5 + \underline{4} = 9$	6) Escreva os números que estão faltando para que as sentenças matemáticas fiquem verdadeiras: a) $5 + \underline{4} = 9$
Extrato protocolo estudante E341	Extrato protocolo estudante E537

Fonte: Dados de Pesquisa.

A categoria 2 - Expressão de uma ação foi denominada assim por admiti-la como uma variante do significado, de mesmo nome, dado por Molina, Castro e Castro (2009), uma vez que a resposta a ser registrada, a incógnita, está à esquerda do sinal de igual. O significado bidirecional amplia o significado do operador, fazendo com que o estudante possa reconhecer a propriedade simétrica da igualdade. Esta categoria está diretamente ligada ao item 6a, no qual o símbolo operacional da adição (+) está apenas à esquerda do sinal de igual.

Quanto à terceira categoria, esta foi denominada por Operador, porque o sinal de igual é admitido com significado de operação, de fazer uma ação. As respostas, registradas pelos estudantes, estão atreladas ao resultado da adição dos números que estão presentes na equação. Dentro dessa categoria, foi possível observar algumas especificidades nas respostas registradas, o que originou quatro subcategorias. Cabe salientar que todas as respostas desta categoria estão relacionadas às respostas dos estudantes registradas dos itens 6b e 6c e, ainda, que levaram ao erro.

Figura 3: Subcategoria 3.1 - Ignora a incógnita do 2º membro da equação

6) Escreva os números que estão faltando para que as sentenças matemáticas fiquem verdadeiras: a) $5 + \underline{4} = 9$ b) $3 + \underline{1} = 4 + \underline{\quad}$ c) $2 + \underline{1} + 3 = 6 + \underline{\quad}$	6) Escreva os números que estão faltando para que as sentenças matemáticas fiquem verdadeiras: a) $5 + \underline{4} = 9$ b) $3 + \underline{1} = 4 + \underline{\quad}$ c) $2 + \underline{1} + 3 = 6 + \underline{\quad}$
Extrato protocolo estudante E341	Extrato protocolo estudante E537

Fonte: Dados de Pesquisa.

A resposta do estudante era classificadas na subcategoria 3.1 (ignora a incógnita do 2º membro da equação) quando ele, nos itens (6b) e (6c), deixa em branco o espaço da incógnita relativa ao segundo membro da equação. É possível observar que todas as respostas registradas pelos estudantes, na primeira incógnita que está no primeiro membro, são sempre as mesmas, qual seja o numeral 1. Uma possível argumentação, para esse tipo de resposta, é que esse numeral satisfaz o valor logo após o sinal de igual que está no segundo membro, uma vez que no item 6b seria $3 + \underline{1} = 4$, assim como no item 6c a expressão aritmética seria $2 + \underline{1} + 3 = 6$, uma vez que o estudante atende o resultado da soma que está à direita do sinal de igual, nada mais tem a realizar nessa situação, a não ser ignorar a segunda incógnita.

Figura 4: Subcategoria 3.2 - A primeira incógnita satisfaz a soma 4 (item 6b) ou 6 (item 6c) e a segunda incógnita traz o resultado de outra adição

6) Escreva os números que estão faltando para que as sentenças matemáticas fiquem verdadeiras: a) $5 + \underline{4} = 9$ b) $3 + \underline{1} = 4 + \underline{9}$ c) $2 + \underline{1} + 3 = 6 + \underline{12}$	6) Escreva os números que estão faltando para que as sentenças matemáticas fiquem verdadeiras: a) $5 + \underline{4} = 9$ b) $3 + \underline{1} = 4 + \underline{8}$ c) $2 + \underline{1} + 3 = 6 + \underline{12}$
Extrato protocolo estudante E318 (itens 6b e 6c)	Extrato protocolo estudante E527 (itens 6b e 6c)

Fonte: Dados de Pesquisa.



Quanto à subcategoria 3.2 (a primeira incógnita satisfaz a soma 4 (item 6b) ou 6 (item 6c), e a segunda traz o resultado de outra adição), o estudante também registra o numeral 1 como resposta da primeira incógnita, que satisfaz a soma 4 (item 6b) ou 6 (item 6c). Contudo, o valor atribuído à incógnita do segundo membro da equação, de forma implícita, é o resultado da adição de todas as parcelas do primeiro membro com a primeira parcela do segundo membro. Assim sendo, é razoável supor que no item (6b) o 8 represente a adição de $3 + 1 + 4$ e, de maneira análoga, no item (6c) o 12 traduza a adição de $2 + 1 + 3 + 6$.

Figura 5: Subcategoria 3.3 – A primeira incógnita satisfaz a Soma 4 (item 6b) ou 6 (item 6c) e a segunda incógnita traz o resultado dessa adição

6) Escreva os números que estão faltando para que as sentenças matemáticas fiquem verdadeiras: a) $5 + \underline{4} = 9$ b) $3 + \underline{1} = 4 + \underline{4}$ c) $2 + \underline{1} + 3 = 6 + \underline{6}$	6) Escreva os números que estão faltando para que as sentenças matemáticas fiquem verdadeiras: a) $5 + \underline{4} = 9$ b) $3 + \underline{1} = 4 + \underline{4}$
Extrato protocolo estudante E311(itens 6b e 6c)	Extrato protocolo estudante E524 (itens 6b)

Fonte: Dados de Pesquisa.

No que se refere à subcategoria 3.3 (a primeira incógnita satisfaz a Soma 4 (item 6b) ou 6 (item 6c), e a segunda traz o resultado dessa adição), novamente é possível observar, a partir de respostas registradas pelos estudantes, que eles colocam o numeral 1 na primeira incógnita, valor que atende o valor da soma que está logo em seguida do sinal de igual. Quanto à incógnita do segundo membro da equação, o valor do resultado dessa adição é repetido na segunda incógnita, que está no segundo membro da equação.

Figura 6: Subcategoria 3.4 - Realiza a adição entre os números conhecidos sendo que o resultado é a incógnita, ignorando o sinal da igualdade

6) Escreva os números que estão faltando para que as sentenças matemáticas fiquem verdadeiras: a) $5 + \underline{14} = 9$ b) $3 + \underline{7} = 4 + \underline{11}$	6) Escreva os números que estão faltando para que as sentenças matemáticas fiquem verdadeiras: a) $5 + \underline{14} = 9$ b) $3 + \underline{7} = 4 + \underline{11}$ c) $2 + \underline{5} + 3 = 6 + \underline{9}$
Extrato protocolo estudante E321(itens 6a e 6b)	Extrato protocolo estudante E512 (itens 6a, 6b e 6c)

Fonte: Dados de Pesquisa.

A subcategoria 3.4 (realiza a adição entre os números conhecidos sendo que o resultado é a incógnita, ignorando o sinal da igualdade), foi assim denominada pois as respostas registradas nas duas lacunas, embora implicitamente, passa a ser o resultado de uma adição e não uma das parcelas. É possível observar esse tipo de estratégia de resolução nos três itens, sendo que no item 6a o valor 14 corresponde à adição entre 5 e 9; na primeira incógnita dos itens 6b e 6c, os valores 7 e 5 são resultados de $3 + 4$ e de $2 + 3$, respectivamente. No que se refere à incógnita do segundo membro, essa traz o resultado da adição da última parcela do primeiro membro e da primeira parcela do segundo membro, isto é, no item (6b) o numeral 11 é a soma de $7 + 4$ e no item (6c) o valor 9 é o resultado de $3 + 6$.

Na categoria 4 (equivalência) estão os protocolos que, de alguma forma, os estudantes buscaram relacionar o primeiro com o segundo membro da equação, exclusivamente nos itens 6b e 6c. Quanto ao item 6a, que à primeira vista o sinal de igual poderia estar classificado como operador, a incógnita não estava no resultado da operação, mas sim numa das parcelas. Sendo assim, levando-se em conta que o significado do operador é que o sinal realize uma operação aritmética explícita, nesse caso a adição, a resposta solicitada é uma das parcelas que satisfaz a igualdade. As respostas aqui categorizadas levaram tanto ao erro quanto ao acerto.



Figura 7: Subcategoria 4.1 - Busca a equivalência repetindo o valor para as duas incógnitas

6) Escreva os números que estão faltando para que as sentenças matemáticas fiquem verdadeiras: C a) $5 + \underline{4} = 9$ C b) $3 + \underline{1} = 4 + \underline{1}$ C c) $2 + \underline{1} + 3 = 6 + \underline{1}$	6) Escreva os números que estão faltando para que as sentenças matemáticas fiquem verdadeiras: C a) $5 + \underline{4} = 9$ C b) $3 + \underline{1} = 4 + \underline{1}$
Extrato protocolo estudante E347 (itens 6b e 6c)	Extrato protocolo estudante E504 (itens 6b)

Fonte: Dados de Pesquisa.

Como é possível observar, a subcategoria 4.1 (busca a equivalência repetindo o valor para as duas incógnitas) aparece tão somente nos itens 6b e 6c não levando ao acerto. Nesta subcategoria, foram computadas todas as respostas nas quais os estudantes colocaram o numeral 1 na primeira e na segunda incógnita dos itens 6b e 6c. Ao colocar o numeral 1 na primeira incógnita, como fora citado anteriormente, eles satisfazem o numeral que vem logo em seguida do sinal do igual. Assim, é possível inferir que esses estejam buscando a equivalência não pela relação entre o primeiro e segundo membros da equação, mas sim $1 = 1$ e, conseqüentemente, esta estratégia levou ao erro.

Figura 8: Subcategoria 4.2 - quando a primeira incógnita antes do sinal de igual satisfaz a soma de tal forma a chegar no valor 4 (no item b, $3 + 1$) ou, no item 6c, usa o elemento neutro (0) da adição para a segunda incógnita

6) Escreva os números que estão faltando para que as sentenças matemáticas fiquem verdadeiras: C a) $5 + \underline{4} = 9$ C b) $3 + \underline{1} = 4 + \underline{0}$ C c) $2 + \underline{1} + 3 = 6 + \underline{0}$	6) Escreva os números que estão faltando para que as sentenças matemáticas fiquem verdadeiras: C a) $5 + \underline{4} = 9$ C b) $3 + \underline{1} = 4 + \underline{0}$ C c) $2 + \underline{1} + 3 = 6 + \underline{0}$
Extrato protocolo estudante E317 (itens 6b e 6c)	Extrato protocolo estudante E503 (itens 6b e 6c)

Fonte: Dados de Pesquisa.

No que tange à subcategoria 4.2 (A primeira incógnita satisfaz a Soma 4 (6b) ou 6 (6c), a segunda incógnita utiliza o elemento neutro da adição), foi constatado que todos os estudantes que utilizaram essa estratégia de resolução tiveram êxito. Isso se deve ao fato que em todos os protocolos nos quais eles utilizaram o elemento neutro da adição no segundo membro, colocaram na primeira incógnita o numeral 1 e, desse modo, os alunos puderam satisfazer a equivalência da equação.

Figura 9: Subcategoria 4.3 - Encontro da relação de equivalência com valores distintos

6) Escreva os números que estão faltando para que as sentenças matemáticas fiquem verdadeiras: C a) $5 + \underline{4} = 9$ C b) $3 + \underline{6} = 4 + \underline{6}$	6) Escreva os números que estão faltando para que as sentenças matemáticas fiquem verdadeiras: C a) $5 + \underline{4} = 9$ C b) $3 + \underline{3} = 4 + \underline{2}$ C c) $2 + \underline{5} + 3 = 6 + \underline{4}$
Extrato protocolo estudante E334 (item 6b)	Extrato protocolo estudante E549 (itens 6b e 6c)

Fonte: Dados de Pesquisa.

Finalmente na subcategoria 4.3 (Encontro da relação de equivalência com valores distintos) é aquela em que os estudantes, de fato, encontraram valores diferentes para as duas incógnitas que tornam verdadeira a igualdade entre os dois membros da equação, nos três itens, 6a, 6b e 6c. Assim, todas estratégias registradas nos protocolos dessa subcategoria levaram ao acerto.

Apresentadas as categorias e suas respectivas subcategorias. A seguir, será apresentada a análise dos dados coletados, acompanhada por uma discussão dos resultados encontrados.



Para tanto, foram contabilizados 333 registros de todos os protocolos, sendo que o 3º Ano apresentou um total de 153 possíveis respostas (produto entre 51 estudantes e três itens de respostas) e, no 5º Ano, foram 180 possíveis respostas (produto entre 60 estudantes e os três itens de respostas).

Tabela 1: Síntese das estratégias utilizadas pelos dois anos escolares nos três itens

Categorias	Subcategorias	Item 6a		Item 6b		Item 6c		TOTAL
		5 + ____ = 9		3 + ____ = 4 + ____		2 + ____ + 3 = 6 + ____		
		3º ano (n=51)	5º ano (n=60)	3º ano (n=51)	5º ano (n=60)	3º ano (n=51)	5º ano (n=60)	
1. Incompreensível		8	9	16	18	24	25	100
2. Expressão de uma ação		40	48					88
3. Operador	3.1				5	1	3	9
	3.2			5	16	5	14	40
	3.3			6	5	5	5	21
	3.4	3	3	4	4	3	2	19
4. Equivalência	4.1			12	3	8	3	26
	4.2			5	5	4	4	18
	4.3			3	4	1	3	11
Branco						1	1	1

Fonte: Dados da Pesquisa.

A primeira informação importante que se pode tirar dos dados apresentados na Tabela 1, temos que das 333 respostas possíveis vindas de todos os estudantes em todos os três itens, 30% delas (100 respostas) foram incompreensíveis. Essa categoria foi a que aglutinou o maior número de respostas. Cabe destacar que somente uma resposta foi em branco, o que é um indicador de que esses tentaram efetivamente resolver os três itens do problema. Como já fora citado, enfatizamos que a incompreensão está atrelada aos pesquisadores e como não houve entrevista com os alunos, não há o que argumentar a esse respeito.

Quanto à categoria 2 (Expressão de uma ação relativa), foram classificadas 88 respostas, todas nas respostas referentes ao item 6a. Todas as 88 respostas estavam corretas. Tal resultado leva à hipótese de que este item foi o mais fácil para os dois grupos de estudantes, já que ambos tiveram aproximadamente 80% de acerto. Uma possível explicação para esse sucesso são os baixos valores (menor que uma dezena) utilizados no item. Isto permite que a estratégia de resolução pode ter sido tanto pela subtração como pela ideia do completar, partindo do número 5 até chegar ao 9. A BNCC traz que o sinal de igualdade, normalmente, antecede o resultado da operação, contudo o resultado da adição já era conhecido (9), o que estava sendo procurado era uma das parcelas (Brasil, 2017). Assim, é conveniente ressaltar que nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental, a disposição de uma operação de adição similar ao item 6a: $5 + ___ = 9$, não é usual. Diante desse resultado, é possível inferir que esse formato de expressões numéricas poderia ser uma boa estratégia de ensino para que os estudantes reconheçam o sinal de igual como bidirecional (Molina, Castro & Castro, 2009).

No que diz respeito à Categoria 3 (Operador), foram classificadas 89 respostas distribuídas entre suas quatro subcategorias. A esse respeito, Kieran (1981) assevera que a interpretação da igualdade está centrada na ação, como um operador, sendo que o sinal de igual está atrelado em fazer a adição de duas parcelas conhecidas e que se procura um resultado, e não uma relação de equivalência.

As respostas que compõem a subcategoria 3.1, o estudante ignora a incógnita do 2º membro da equação, sendo que esse tipo de resposta vem ao encontro da afirmação de Ponte,



Branco e Matos (2009) que o sinal de igual introduzido nos Anos Iniciais, comumente é trabalhado como sendo o resultado de uma operação aritmética.

Na subcategoria 3.2 (as respostas colocadas na segunda incógnita trazem o resultado de outra adição), agora de todos os números que já faziam parte da equação original e do número 1 colocado na primeira incógnita, onde vem o resultado 8 no item 6b ($3 + \underline{1} + 4 = 8$); e o resultado 12 no item 6c ($2 + \underline{1} + 3 + 6 = 12$). Diante disso, é possível reportar-se a Booth (1995) ao destacar que, na Aritmética, os símbolos de + (adição) e = (igual) estão atrelados a alguma ação a ser realizada, não necessariamente de equivalência.

A segunda incógnita da subcategoria 3.3 traz, de forma repetida, o resultado da adição do primeiro membro, tanto no item 6b ($3 + \underline{1} = 4 + \underline{4}$) quanto no item 6c ($2 + \underline{1} + 3 = 6 + \underline{6}$). Em suma, nas subcategorias 3.1, 3.2 e 3.3, as respostas apresentadas na incógnita do segundo membro, reportam-se ao alerta feito por Ponte, Branco e Matos (2009). Esses autores asseveram que, ao apresentar as operações aritméticas sejam elas do campo aditivo ou do campo multiplicativo, o professor evidencie que o sinal de igualdade representa mais do que uma ação a ser feita, trata-se de uma equivalência entre o primeiro e o segundo membro da equação.

A subcategoria 3.4 (realiza a adição entre os números conhecidos sendo que o resultado é a incógnita, ignorando o sinal da igualdade) chama a atenção por perpassar por todos os três itens, 6a, 6b e 6c. Nesta subcategoria, estão as respostas nas quais o estudante coloca no lugar da primeira incógnita a soma dos dois números, o que a precede e a posterior; na segunda incógnita, é colocada a soma do último número do primeiro membro e o primeiro número do segundo membro. Mais uma vez, o sinal + (adição) e o sinal = (igual) refletem diretamente a alguma ação a ser realizada e a escrita de uma resposta numérica (Booth, 1995). Ainda a esse respeito, Kieran (1981) certifica que a interpretação da igualdade está centrada na ação, como um operador, sendo que o sinal de igual está atrelado em fazer a adição de duas parcelas conhecidas e que se procura um resultado, e não uma relação de equivalência.

A última categoria (Equivalência) apresentou um total de 55 respostas, sendo que 29 delas foram consideradas corretas. A subcategoria 4.1, tida como busca a equivalência repetindo o mesmo valor para as duas incógnitas que, embora tenha levado ao erro, tem uma característica interessante do ponto de vista da relação equivalência. É possível que o estudante tenha focado nas duas lacunas e eleito um único número, por conta da propriedade da simetria, para satisfazer a relação de equivalência. As subcategorias 4.2 e 4.3 levaram ao acerto, foram 29 respostas no total, aproximadamente 13% das 222 respostas possíveis relativas aos itens 6b e 6c. Na subcategoria 4.2, os estudantes colocaram o número 1 na primeira incógnita e para responder a incógnita do segundo membro, lançaram mão da propriedade do elemento neutro da adição, colocando o numeral zero na segunda lacuna. Finalmente, a subcategoria 4.3, os alunos registraram valores distintos nas duas incógnitas de tal forma que a relação de equivalência se tornasse verdadeira. De acordo com os dados, apesar de ter 13% de respostas corretas, é possível admitir que o sinal de igual, com o significado de equivalência, não é natural entre os estudantes do 3º e do 5º anos, se comparadas às respostas categorizadas como incompreensível e operador.

6 Considerações finais

Tendo em vista o objetivo do presente estudo, investigar qual a concepção do sinal de igualdade que os estudantes do 3º e do 5º Anos dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental ao se deparar com situações de relação de equivalência, os dados obtidos permitem que se faça considerações a esse respeito. Cabe salientar que a amostra deste estudo não permite a generalização, contudo são resultados que podem levar a reflexões de como estudantes dos Anos Iniciais concebem o sinal de igual.



De acordo com os dados analisados, esses foram distribuídos de forma muito próxima em três grandes grupos, o incompreensível, a expressão de uma ação e o operador. Nesse primeiro grupo, os estudantes não tiveram êxito e perpassaram pelos três itens, em especial nos itens 6b e 6c. É importante salientar que a incompreensão é por parte dos pesquisadores, uma vez que não houve entrevista para que tivessem a chance de entendê-la. No que se refere ao grupo expressão de uma ação, esse diz respeito exclusivamente às respostas corretas do item 6a. A maioria deles teve êxito neste item, levando em conta que a resposta deveria ser escrita à esquerda do sinal de igual e, além disso, a operação apropriada para obter tal resposta não poderia ser a adição como indicada na expressão, mas sim a operação inversa, a subtração. Esse dado é importante, pois embora a adição seja trabalhada desde o princípio dos Anos Iniciais, essa forma de expressão, a qual é dado uma das parcelas (5) e a soma (9) e solicita a outra parcela (incógnita), não é usualmente utilizada. Isso significa que situações desse tipo, tida como expressão de uma ação, amplia o significado do operador, fazendo com que o estudante possa reconhecer a propriedade simétrica da igualdade. Desse modo, poderia ser uma porta de entrada promissora para o ensino do sinal de igual como bidirecional.

Quanto ao terceiro grupo operador, este perpassou pelos itens 6b e 6c, o qual a interpretação feita pelos estudantes é que a igualdade está centrada na ação, como um operador, sendo que o sinal de igual está atrelado em fazer a adição de duas parcelas conhecidas e que se procura um resultado, e não uma relação de equivalência. O fato de o sinal de igual ser introduzido nos Anos Iniciais e comumente trabalhado como sendo o resultado de uma operação aritmética, os símbolos de + (adição) e = (igual) estão atrelados a alguma ação a ser realizada, não necessariamente de equivalência. Diante das respostas registradas por eles, aquelas compreendidas pelos pesquisadores, é possível concluir que a concepção desses, do 3º e do 5º anos, em relação ao sinal de igual é de operador.

Cabe ressaltar que esse resultado se refere a equivalência numérica e, portanto, o sinal de igual e seus significados perpassam tanto pela aritmética como pela álgebra. Levando em conta a afirmação de Carraher e Schliemann (2018), a interpretação limitada do sinal de igual, de alguns estudantes, fica evidenciada quando eles são apresentados à álgebra. Quanto a isso, é relevante reportar-se ao alerta feito por Ponte, Branco e Matos (2009) que, ao apresentar as operações aritméticas, sejam elas do campo aditivo ou do campo multiplicativo, o professor evidencie que o sinal de igualdade representa mais do que uma ação a ser feita, trata-se de uma equivalência entre o primeiro e o segundo membro da equação. Assim, de acordo com os resultados alcançados e com vistas na literatura apresentada, há necessidade de que a interpretação do sinal de igual seja ampliada desde os Anos Iniciais do Ensino Fundamental. Assim sendo, é importante e necessário que a discussão dos diferentes significados do sinal de igual perpassa pela formação inicial e continuada de professores, em especial daqueles que ensinam Matemática nos Anos Iniciais.

Agradecimentos

Agradecemos à Universidade Estadual de Santa Cruz (UEC/BA), pelo financiamento da pesquisa (cadastro PROPP: 00220.1300.1778). Agradecemos ainda às escolas parceiras que colaboraram em permitir a coleta dos dados para que este estudo fosse realizado.

Referências

BITENCOURT, D. V. (2018). *Early Algebra na perspectiva do livro didático*. 2018. 126 f. Dissertação de Mestrado em Educação Matemática, Universidade Estadual de Santa Cruz, Ilhéus-BA.



- BASTOS, S., B & MERLINI, V., L. (2020) Early algebra: a álgebra que emerge das estratégias de resolução utilizadas por alunos dos anos iniciais. *REnCiMa*, 11 (1), p. 91-109.
- BOOTH, L. R. (1995). Dificuldades das crianças que se iniciam na álgebra. In: AF Coxford, & AP Shulte (Eds.), *As ideias da álgebra*. São Paulo, SP: Atual.
- BRASIL (2017). Base Nacional Comum Curricular. (2017). Brasília: Ministério da Educação.
- CARRAHER, D. W. & SCHLIEMANN, A. D. (2018). Cultivating Early Algebraic Reasoning. In: C. Kieran (Ed.), *Teaching and learning algebraic thinking with 5- 12- year-olds*. The Global Evolution of an Emerging Field of Research and Practice. ICME-13 Monographs. Chaim, Switzerland: Springer International Publishing. Hamburg, Germany.
- FIORENTINI, D. & LORENZATO, S. (2006). *Investigação em educação matemática: percursos teóricos e metodológicos*. Campinas, SP: Autores Associados.
- JUNGBLUTH, A.; SILVEIRA, E.; GRANDO, R. C. (2022). A Álgebra no Currículo de Matemática dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental: a Voz dos Professores. *Educação Matemática Pesquisa Revista do Programa de Estudos Pós-Graduados em Educação Matemática*, São Paulo, 24 (1), p. 250-288. DOI: 10.23925/1983-3156.2022v24i1p250-288.
- KIERAN, C. (1981). Concepts associated with the equality symbol, *Educational Studies in Mathematics*, Dordrecht, 12, p. 317-326.
- MAGINA, S. M. P.; OLIVEIRA, C. F. & MERLINI, V. L. (2018). O Raciocínio algébrico no Ensino Fundamental: O debate a partir da visão de quatro estudos. *Em teia – Revista de Educação Matemática e Tecnologia Iberoamericana*, 9 (1), p. 1-23. Recuperado em <https://periodicos.ufpe.br/revistas/emteia/article/view/235070>, em 20 de maio de 2024.
- MOLINA, M.; CASTRO, E. & CASTRO, H. (2009). Elementary students' understanding of the equal sign in number sentences. *Electronic Journal of Research in Educational Psychology*, 17(7), p. 341-368.
- PIAGET, J. (2005). *A representação do mundo na criança: com um concurso de onze colaboradores/ Jean Piaget*. Tradução A. U. S. (colaboração de Maria Stela Gonçalves). Aparecida, SP: Ideias & Letras
- PONTE, J. P.; BRANCO, N. & MATOS, A. (2009). *Álgebra no ensino básico*. Lisboa, PT: DGIDC.
- RADFORD, L. (2022). Introducing equations in early algebra. *ZDM Mathematics Education* 54, p. 1151-1167. Recuperado em <https://doi.org/10.1007/s11858-022-01422-x>, em 28 de maio de 2024.
- RIBEIRO, A. J. & CURY, H. N. (2015). *Álgebra para a formação do professor*. Belo Horizonte, MG: Autêntica Editora. (Coleção Tendências em Educação Matemática).
- RIBEIRO, A. J. (2016) Álgebra e seu ensino: dando eco às múltiplas “vozes” da educação básica. *REnCiMa*, Edição Especial: Educação Matemática, 7 (4), p. 1-14.
- RUDIO, F. (2001). *Introdução ao Projeto de Pesquisa Científica*. Petrópolis, RJ: Vozes, Ed. 32.