

## **Flexibilidade de cálculo mental na perspectiva do Sentido de Número: quando se manifesta em tarefas que envolvem as operações de multiplicação e divisão com números naturais?**

**Flexibility of mental calculation from the perspective of Number Sense: when does it  
manifest itself in tasks involving multiplication and division operations with natural  
numbers?**

Cília Cardoso Rodrigues da Silva<sup>1</sup>

**Resumo:** Mostro parte dos resultados de tese de doutoramento, concluída em 2023, em Portugal onde busquei os referenciais teóricos e no Brasil construí os dados empíricos. O objetivo foi compreender manifestações de flexibilidade de cálculo mental nas operações com números naturais quando estudantes de 4º ano resolvem tarefas que envolvem multiplicação e divisão. O paradigma interpretativo, com abordagem qualitativa, na modalidade de estudo de caso múltiplo, três casos, não comparativo, com observação participante foi a opção metodológica. A recolha de dados ocorreu em duas escolas públicas no Distrito Federal (DF), a partir de experiências de aprendizagem e ensino, numa perspectiva de sentido de número, com aplicação de tarefas envolvendo multiplicação e divisão com números naturais, em 03 turmas de 4º ano. Sentido de número, cálculo mental e flexibilidade de cálculo mental foram os principais aportes teóricos que apoiaram a construção dos dados empíricos e os resultados dessa investigação. Ensinar procedimentos e estratégias de cálculo mental não faz sentido, a flexibilidade de cálculo é uma capacidade a desenvolver que se manifestou nos procedimentos de contagem, aditivos e multiplicativos dos estudantes em que usaram as relações numéricas e as transformações dos números em operações de adição, multiplicação e divisão ao resolverem tarefas envolvendo multiplicação e divisão.

**Palavras-chave:** Flexibilidade de cálculo mental. Manifestações. Sentido de número. Experiência de aprendizagem e ensino. Ensino exploratório.

**Abstract:** I show part of the results of a doctoral thesis, completed in 2023, in Portugal where I sought the theoretical references and Brazil I constructed the empirical data. The objective was to understand manifestations of mental calculation flexibility in operations with natural numbers when 4th grade students solve tasks involving multiplication and division. The interpretative paradigm, with a qualitative approach, in the form of a multiple, non-comparative case study, three cases, with participant observation was the methodological option. Data collection took place in two public schools in the Federal District (DF), based on learning and teaching experiences from a number sense perspective, with the application of tasks involving multiplication and division with natural numbers, in 03 4th grade classes. Number sense, mental calculation and mental calculation flexibility were the main theoretical contributions that supported the construction of empirical data and the results of this investigation. Teaching mental calculation procedures and strategies makes no sense, calculation flexibility is a skill to be developed that manifests itself in the students' counting, additive and multiplicative procedures, where they use numerical relations and transformations of number in addition, multiplication and division operations when solving tasks involving multiplication and division.

**Keywords:** Flexibility of mental calculation. Manifestations. Number sense. Learning and teaching experience. Exploratory teaching.

<sup>1</sup> Secretaria de Estado de Educação do Distrito Federal. Brasília, DF – Brasil. [ciliacr@gmail.com](mailto:ciliacr@gmail.com) ORCID <https://orcid.org/0000-0001-5658-535x>

## 1 Entre dois Países: Portugal e Brasil

O estudo que apresento ocorreu em dois países: Portugal, na Universidade de Lisboa, Instituto de Educação onde busquei o referencial teórico da investigação, na área de Didática da Matemática e no Brasil construí os dados empíricos a partir da recolha de dados em duas escolas públicas do Distrito Federal.

O tema da investigação foi manifestações de flexibilidade de cálculo mental em operações com números naturais de tarefas que envolvem multiplicação e divisão. O objetivo foi compreender manifestações de flexibilidade de cálculo mental nas operações com números naturais quando estudantes de 4º ano resolvem tarefas que envolvem multiplicação e divisão. Que procedimentos de cálculo os estudantes usam para resolver tarefas que envolvem multiplicação e divisão com números naturais? E Que manifestações de flexibilidade de cálculo mental são identificadas nos diferentes procedimentos de cálculo? foram as duas questões que apoiaram a investigação?

Aprofundar estudos para desenvolver minhas capacidades profissionais, contribuir para as práticas dos profissionais que ensinam e aprendem matemática nos Anos Iniciais e dar visibilidade à manifestação da flexibilidade de cálculo mental no desenvolvimento do sentido de número foram as motivações que me levaram a desenvolver uma investigação em Educação Matemática.

Após levantamento nos principais bancos de teses e dissertações no Brasil e em Portugal que tratassem, especificamente de cálculo mental, constatei que o estudo desenvolvido traz relevância para o aprofundamento do tema no campo da educação matemática no Brasil e em Portugal.

No Brasil, no período de 2008 a 2017, observei uma escassez de trabalhos acadêmicos relacionados ao tema a que me propus estudar e nas investigações analisadas não percebi menções aos atributos adaptabilidade, precisão, eficiência, fluência e flexibilidade dados ao cálculo mental, conforme a literatura que embasou o estudo que realizei. Já entre os anos de 2018 e 2021, encontrei novos trabalhos relacionados ao cálculo mental em que o referencial teórico se aproximou ao estudo que desenvolvi: cálculo mental, sentido de número e flexibilidade de cálculo mental, todavia, investigações voltadas para as operações de adição e subtração.

Em Portugal, no período de 2013 a 2022, encontrei vários estudos com o referencial teórico semelhante e próximo ao tema estudado, principalmente, fazendo referências à flexibilidade de cálculo mental, o que confirma a relevância da investigação realizada, uma vez que mostra o pensamento de estudantes brasileiros a partir dos procedimentos e estratégias de cálculo mental registrados nas folhas de respostas referente às manifestações de flexibilidade de cálculo mental nas operações com números naturais que envolvem a multiplicação e divisão, o que corrobora com a ampliação das discussões que já acontecem nos espaços acadêmicos, de formação de professores e escolares desse país.

A fim de responder as duas questões do estudo e alcançar o objetivo da investigação

construí um referencial teórico robusto em que realizei revisões de literatura em teses, dissertações, artigos diversos, livros, participação em congressos e seminários, dentre outros que envolveram os temas: sentido de número, sentido de operação, cálculo mental, flexibilidade de cálculo mental, tarefas, ensino exploratório, experiência de ensino, simbolismo operacional etc. A partir desse aprofundamento as opções metodológicas foram apoiadas pelo paradigma interpretativo na abordagem qualitativa, na modalidade de estudo de caso múltiplo, não comparativo, três casos, o Caso Ipê Amarelo na Escola Sul com 20 estudantes e na Escola Norte o Caso Sempre Viva com 18 estudantes e o caso Caliandra com 22 estudantes, todas turmas de 4º ano dos Anos Iniciais. A recolha de dados foi guiada pela observação participante da investigadora, no caso eu, o que proporcionou a interação entre as professoras regentes e os estudantes de cada turma caso, com o uso de diário de campo e videogravações. Foram planejadas experiências de aprendizagem e ensino juntamente com as docentes das turmas, embasadas nos pressupostos teóricos do sentido de número, de operação, flexibilidade de cálculo mental dentre outros, em salas de aula do ensino regular, sem dar preferência a contextos educativos com as “melhores práticas, que possibilitaram a orientação da aplicação das tarefas e o uso de recursos necessários.

Para esta comunicação mostro parte dos resultados da investigação, busco destacar, com alguns exemplos, quando emerge as manifestações de flexibilidade de cálculo mental nas operações com números naturais na resolução de tarefas que envolvem multiplicação e divisão: flexibilidade na contagem, flexibilidade de cálculo aditivo e flexibilidade de cálculo multiplicativo. Além de discutir os conceitos: sentido de número, cálculo mental, procedimentos e estratégias, manifestações e flexibilidade de cálculo mental.

## 2 Manifestações de flexibilidade de cálculo mental na perspectiva do sentido de número

Sentido de número é um termo que foi incluído na literatura de educação matemática no final da década de setenta, século passado, pela primeira vez por Carpenter et al. (1976). A partir dos anos oitenta, também século passado, conforme Mendes (2012), outras investigações foram realizadas sobre o tema tanto do ponto de vista da Psicologia como do ponto de vista da Educação Matemática. O sentido de número começa a fazer sentido para as crianças a partir dos diversos contextos dos números: contagem oral, contagem de objetos, cardinalidade, de medida, ordinal e não número (Fuson, 1988).

Na década de noventa, Sowder (1992) define o sentido de número como: a) o conhecimento dos números e o modo como podem ser utilizados em determinadas situações; b) a flexibilidade para usar estratégias de cálculo mental ou de cálculo aproximado; c) a capacidade para utilizar números de referência apropriados; d) a compreensão e o uso das diferentes representações dos números e; e) a compreensão dos efeitos relativos das operações numéricas e de suas propriedades. A autora aponta que o sentido de número se manifesta nas habilidades para compor e decompor números, reconhecer a grandeza dos números, de compreender os efeitos de realizar operações sobre os números, para realizar cálculo mental, usar números de maneira flexível, opinar sobre os processos das respostas produzidas, dentre outras. Na mesma década, McIntosh et al. (1992) apontam o sentido de número como a capacidade e a inclinação que a pessoa tem de usar de forma flexível os números e as operações a fim de construir raciocínios matemáticos e desenvolver estratégias úteis como meio de comunicação, processamento, e interpretação de informação, que resulta numa perspectiva de que números são úteis e que existe uma certa ordem na Matemática.

Autores como Markovits e Sowder (1994) dizem que o desenvolvimento do sentido de número é gradual e processual; Gersten e Chard (1999) referem-se ao sentido de número como a facilidade e flexibilidade com que as crianças operam com números; Baroody e Coslick

(1998) trazem um sentido intuitivo ao definirem o sentido de número, para eles o sentido intuitivo sobre os números e sobre como funcionam é guiado de maneira flexível e inteligente a partir das decisões sobre o uso deles.

Na entrada do milênio autores como Llinares (2001) considera que a ideia de sentido de número se baseia no conhecimento, por parte dos estudantes, de uma rede conceitual que relaciona os conceitos de agrupamento e valor de posição com a habilidade de utilizar grandezas absolutas e relativas dos números. Castro e Rodrigues (2008) ressaltam que o sentido de número diz respeito à compreensão global e flexível dos números e operações com o intuito de compreender os números e as suas relações e desenvolver estratégias úteis e eficazes para utilizarmos no nosso dia a dia, nossa vida profissional, ou como cidadãos ativos. Brocardo e Serrazina (2008) consideram a perspectiva de pensar os números e operações em termos de sentido de número nos programas curriculares de matemática.

A partir dessas definições concebo “o sentido de número como uma rede conceitual e procedimental que se amplia conforme se tem experiências com números e operações, sem perder de vista seus efeitos, propriedades, grandezas, contextos e as relações existentes entre números/números, operações/operações e números/operações” (Silva, 2023, p. 44). Assim como a compreensão global que se tem dos números e operações e o seu uso de maneira flexível (Castro & Rodrigues, 2008).

O termo flexível aparece atrelado ao sentido de número como usar números e operações de forma flexível e, no uso de estratégias de cálculo seja mental e/ou escrito e até mesmo aproximado. Na revisão de literatura não há um consenso em relação as definições de cálculo mental e flexibilidade de cálculo mental. É comum entre os autores que o cálculo mental é passível de ser registrado nas folhas de respostas, pensado “com a cabeça”, é flexível, não se ensina diretamente, também é uma capacidade que se desenvolve de forma gradual e processual, pode ser exato ou não (Baroody & Coslick, 1998; Brocardo, 2011; Buys, 2008; Carvalho, 2016; Gómez, 1989; McIntosh et al., 1992; Reys et al., 1985; Sowder, 1990; Taton, 1996; Thompson, 1999; Trafton 1978).

A revisão de literatura me levou a entender o cálculo mental “como um cálculo efetuado a partir dos processos mentais que se desenvolvem à medida que se tem conhecimento e experiência com números e operações, tornando-se flexível por meio das relações existentes entre ambos e o uso consciente ou não de suas propriedades” (Silva, 2023, p. 63). É um cálculo “passível de ser visualizado nos procedimentos/estratégias inventados ou não, registrados nas folhas de respostas das tarefas e/ou percebido a partir de um diálogo com quem o produz” (Silva, 2023, p. 44). É um cálculo pensado “com a cabeça”, pode ser exato ou não, flexível. Pode ser “desenvolvido a partir de boas práticas pedagógicas (aulas planejadas, dialogadas, proposições de tarefas adequadas), sem perder de vista o respeito ao conhecimento prévio dos estudantes, sua mobilização para resolver problemas e socialização dos procedimentos/estratégias encontradas nas resoluções” (Silva, 2023, p. 44).

À expressão cálculo mental está associada à atributos como flexibilidade, adaptabilidade, precisão e eficiência. Mendes (2012) ressalta que o desenvolvimento do cálculo mental na sala de aula relaciona-se com determinados aspectos do sentido de número dos estudantes. A autora aponta que a ideia de flexibilidade requer o conhecimento de mais do que um método de cálculo para resolver certo tipo de problemas e selecionar uma estratégia apropriada a cada um. Serrazina e Rodrigues (2021) complementam que uma característica marcante do cálculo mental e do sentido de número é “a flexibilidade que permite ao estudante adaptar os números de forma adaptativa às operações em questão, ou ajustar as operações mobilizadas a circunstâncias específicas das situações inerentes a diferentes contextos”

(Serrazina & Rodrigues, 2021, p. 21). Para as autoras adaptabilidade está relacionada a “uma rica rede de conhecimento sobre as características dos números e as relações numéricas entre os números (McMullen et al., 2016, p. 172). Elas sinalizam que o cálculo mental envolve flexibilidade e adaptabilidade, está diretamente interrelacionado ao sentido de número e ambos contribuem uma para o desenvolvimento do outro. Afirmam ainda que a “construção de uma rede de relações numéricas torna-se um elemento essencial no processo de desenvolvimento de flexibilidade de cálculo” (Serrazina & Rodrigues, 2021, p. 36). Por fim, posso dizer que a “flexibilidade de cálculo mental é a representação do pensamento adaptativo e dinâmico, que se adapta ao contexto requerido. Propicia a produção de conexões simbólicas e estratégias operatórias para a resolução de situações quantitativas a partir de processos mentais” (Silva, 2023, p. 85). Pode ser evidenciada à medida que se “tem conhecimento e experiência com números e operações por meio das relações numéricas existentes entre ambos e do uso intuitivo de suas propriedades e das relações inversa” (Silva, 2023, p. 86). A palavra manifestações mostrada no estudo que desenvolvi, liga-se à flexibilidade de cálculo mental no sentido de tornar público, de revelar a ação do pensamento (Silva, 2023, p. 86).

### **3 Experiência de aprendizagem e ensino na perspectiva do sentido de número em turmas de 4º ano**

Aprender e ensinar são ações inseparáveis que se relacionam, se complementam e se integram, são verbos que se traduzem em processos (Fosnot & Dolk, 2001). As autoras apontam que quando a aprendizagem e o ensino estão intimamente relacionados “o ensino será visto como intimamente relacionado à aprendizagem, não apenas na linguagem e no pensamento, mas também na ação” (Fosnot & Dolk, 2001, p. 1).

Foi nessa perspectiva de aprender e ensinar que as experiências de aprendizagem e ensino foram planejadas a partir da seleção de tarefas em contextos de semi-realidade, ou seja, não se trata de uma realidade que de fato observamos, mas uma realidade construída, totalmente descrita pelo texto do exercício, nenhuma outra informação é relevante e o único propósito é resolver o exercício conforme aponta Skovsmose (2000) e na concepção de Ponte (2005) de que uma tarefa pode dar lugar a atividades diversas: (i) a tarefa proposta; e (ii) a situação didática criada pelo docente. Para o referido autor uma tarefa envolve exercício, problema, jogo, raciocínio etc., e atividade é um sistema de ações com o significado de acompanhar o pensar, o raciocinar e o fazer (Ponte, 2005).

As experiências de aprendizagem e ensino embasadas pelos pressupostos teóricos do sentido de número, sentido de operação, cálculo mental, flexibilidade de cálculo mental, procedimentos e estratégias ocorreram no contexto real da sala de aula do ensino regular em duas escolas públicas do Distrito Federal, em turmas de 4º ano, constituindo-se três casos: Ipê Amarelo, com 20 estudantes, na Escola Sul; Sempre Viva, com 18 estudantes e Caliandra com 22 estudantes na Escola Norte. No entendimento de que criança aprende/ensina com criança, com professor, investigadora e vice-versa. Todos os envolvidos no aprender e ensinar matemática interagem, articulam e trocam conhecimentos a partir de suas experiências com números, operações e outros temas.

Em cada uma das escolas a experiência de aprendizagem e ensino foi estruturada, apresentada, planejada e aplicada juntamente com as professoras docentes nos espaços da coordenação pedagógica e sala de aula onde estabelecemos parceria e colaboração com os estudantes. Na coordenação pedagógica foram levados em conta os aspectos: (i) análise, adaptação, seleção e resolução das tarefas envolvendo as operações de multiplicação e divisão com números naturais; (ii) objetivos de aprendizagem envolvidos nas tarefas; e (iii) antecipação dos procedimentos de cálculo usados pelos estudantes a fim de realizar as possíveis mediações



e intervenções. E na sala de aula, conduzidas pelas professoras, com a colaboração e participação da investigadora, no caso eu, foram estabelecidas parcerias com os estudantes a partir dos seguintes combinados e ações: (i) resolução de tarefas envolvendo as operações de multiplicação e divisão com números naturais; (ii) registros dos procedimentos de cálculo nas folhas de respostas; e (iii) socialização dos procedimentos de cálculo no quadro branco.

A Tabela 1 mostra o quantitativo de Tarefas aplicadas e resolvidas e a quantidade de folhas de respostas que foram analisadas nos três casos.

**Tabela 1:** Quantitativo de Tarefas resolvidas e folhas de respostas analisadas nos três casos

	Estu- dantes	Tarefas aplica- das	Possí- veis registros de tarefas resolvi- das	Tarefas não resolvi- das por ausên- cias	Tarefas resolvi- das	Tarefas com represen- tações icônicas	Tarefas incom- pletas e/ou erros	Folhas de respos- tas analisa- das
Ipê Amarelo	20	10	200	24	176	0	5	171
Sempre Viva	18	11	198	36	162	44	26	92
Caliandra	22	11	242	52	190	59	45	86
Total	60	32	630	112	528	103	76	349

**Fonte:** Dados da Pesquisa

É possível perceber que o Caso Ipê Amarelo sobressai em relação aos outros dois casos nos seguintes aspectos: ausência em sala de aula são menores, os estudantes usaram apenas representações simbólicas em suas resoluções e o número de tarefas com erros e/ou incompletas é reduzido. Os casos Sempre Viva e Caliandra tiveram muitas ausências no momento de aplicação das tarefas, a quantidade do uso de representações icônicas foi superior bem como a quantidade de tarefas incompletas e/ou com erros, o que me levou a inferir que a experiência com os números e as operações do caso Ipê Amarelo era além dos casos Sempre Viva e Caliandra.

O estudo realizado não foi comparativo, todavia as diferenças encontradas interferiram na seleção das produções escritas dos estudantes dos três casos, havendo maior número pertencente ao caso Ipê Amarelo conforme mostrado na Tabela 1. Este fato não interferiu na análise, pois o quantitativo de folhas de respostas (349) reunidas dos três casos possibilitou, ainda, selecionar 113 procedimentos de cálculo classificados em procedimentos de contagem, procedimentos aditivos, procedimento subtrativo e procedimentos multiplicativos a partir das categorias inventariadas por Mendes (2012), utilizadas como exemplos para discutir os dados da investigação.

**Tabela 2:** Categorias de procedimentos inventariado por Mendes (2012)

<b>Categorias de procedimentos</b>	<b>Procedimentos específicos</b>
<b>Procedimentos de contagem</b>	Contagem por saltos
<b>Procedimentos aditivos</b>	Adicionar sucessivamente
	Adicionar dois a dois
	Adicionar em coluna
<b>Procedimentos subtrativos</b>	Subtrair sucessivamente
<b>Procedimentos multiplicativos</b>	Usar produtos conhecidos
	Usar relações de dobro
	Usar múltiplos de cinco e dez
	Usar uma decomposição não decimal de um dos fatores
	Usar decomposição decimal de um dos fatores
	Ajustar e compensar
	Usar relações de dobro e de metade
	Multiplicar sucessivamente a partir de um produto de referência
	Multiplicar em coluna

No estudo desenvolvido por Mendes (2012, p. 242-256) essas categorias estão caracterizadas dessa maneira:

#### Procedimentos de contagem

*Contar por saltos.* Corresponde a uma contagem sistemática, partindo de um determinado número e “saltando” invariavelmente um mesmo valor, o que corresponde a adicionar sucessivamente esse valor, nomeando ou registrando apenas o resultado da adição. Exemplo, contar um conjunto de 35 objetos organizados em grupos de cinco, dando saltos de cinco, corresponde a enumerar 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35.

#### Procedimentos aditivos

*Adicionar sucessivamente.* Este procedimento corresponde a adicionar sucessivamente um mesmo número, apresentando os cálculos horizontalmente sob a forma de uma adição de parcelas iguais.

*Adicionar dois a dois.* Este procedimento corresponde à realização de uma adição de parcelas iguais, mas em vez de estas serem adicionadas sucessivamente são agrupadas duas a duas, de modo a progredir mais rapidamente na procura do resultado.

#### Procedimentos subtrativos

*Subtrair sucessivamente.* Este procedimento corresponde a realizar subtrações sucessivas, partindo do aditivo e subtraindo repetidamente um mesmo número, o subtrativo. O aditivo vai-se alterando ao longo dos cálculos, mas o subtrativo é sempre o mesmo em todas as subtrações. Os cálculos são apresentados tanto horizontalmente como verticalmente e estão associados à resolução de problemas com um contexto de divisão.

#### Procedimentos multiplicativos

*Usar produtos conhecidos.* Este procedimento corresponde à utilização de produtos ou fatos conhecidos dos estudantes para efetuar os cálculos necessários à resolução de um determinado problema. Entende-se por produtos conhecidos os que correspondem às tabuadas já trabalhadas por estes estudantes.

*Usar relações de dobro.* Este procedimento consiste tal como o nome indica, na

utilização, de modo explícito, do dobro de um número na realização de um cálculo multiplicativo.

*Usar múltiplos de cinco e de dez.* Este procedimento consiste no uso explícito de múltiplos de cinco e/ou de dez no cálculo de produtos.

*Usar uma decomposição não decimal de um dos fatores.* Este procedimento consiste tal como o nome sugere no uso de uma decomposição não decimal de um dos fatores do produto, transformando-o em produtos parciais e tem subjacente a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição. A decomposição não decimal de um dos fatores corresponde muitas vezes, à substituição de um número por uma adição de duas parcelas iguais ou de parcelas que de alguma forma, facilitam o cálculo que é necessário realizar.

*Usar a decomposição decimal de um dos fatores.* Este procedimento consiste no uso de produtos parciais, baseados na decomposição decimal (separando centenas, dezenas e unidades, no caso dos números naturais e décimas e centésimas no caso de números na representação decimal) de um dos fatores do produto. Este procedimento de cálculo tem subjacente a propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição.

*Ajustar e compensar.* Este procedimento consiste na substituição de um produto por outro, que envolve um fator que é “próximo” de um dos números do produto que é preciso calcular, mas mais fácil de efetuar. Depois é feita a compensação necessária através de uma subtração. Subjacente a este procedimento está a propriedade distributiva da multiplicação em relação à subtração. No caso dos números, na maior parte das vezes, o produto inicial é substituído por um outro que inclui um fator múltiplo de 10, ou que seja um número de referência. No caso com números racionais não negativos na sua representação decimal o produto inicial, que envolve um número decimal, é substituído por um número natural “próximo” ou, também por um número de referência.

*Usar relações de dobro e de metade.* Este procedimento baseia-se no estabelecimento de relações de dobro e de metade entre os fatores de um mesmo produto. Consiste no uso da propriedade associativa da multiplicação usando sempre a relação dobro/metade.

*Multiplicar sucessivamente a partir de um produto de referência.* Este procedimento corresponde a realizar, como ponto de partida, um produto de referência, e tal como o seu nome indica, a multiplicar sucessivamente a partir dele mantendo um dos fatores e aumentando em uma unidade o outro fator. Subjacente a este procedimento está o uso de múltiplos de dez ou de produtos conhecidos.

*Multiplicar em coluna.* Este procedimento corresponde à realização de cálculos na forma vertical e atendendo à decomposição decimal dos números envolvidos. Os cálculos parciais são efetuados da esquerda para a direita e trabalha-se com números e não com dígitos, ao contrário do que acontece no cálculo algorítmico<sup>3</sup> (Mendes, 2012, pp. 242-256).

Assim, a análise dos dados foi feita em três etapas. A primeira etapa consistiu em selecionar as folhas de respostas que seriam analisadas a partir dos critérios estabelecidos: as representações icônicas foram eliminadas, pois na literatura estudada sobre flexibilidade de cálculo mental os exemplos apresentados são procedimentos de cálculo em que se utilizam representações simbólicas, ou seja, números no lugar de desenhos, e na maioria inventadas pelos estudantes.



A segunda foi analisar as 349 folhas de respostas que continham representações simbólicas. Nessa etapa de análise foi inventariado o procedimento de cálculo que denominei de “divisão através de um cálculo em coluna” que se traduz na realização de produtos distintos entre o quociente e o divisor, efetuando as diferenças desses produtos a partir do dividendo. Esse procedimento tem como partida a relação existente entre as operações de adição, subtração, multiplicação e divisão (Silva, 2023, p. 182). Há indícios de se tratar de um cálculo em que se trabalha com números e não com dígitos, como acontece muitas vezes no cálculo algorítmico. Trabalhar com dígitos se traduz no uso de procedimentos de cálculo sem compreensão, por exemplo, dos valores relativos e absolutos dos números. É quando se realiza um algoritmo tradicional sem compreender o agrupar e/ou desagrupar, ou seja, realiza as operações aritméticas sem ter compreendido que o “vai um” representa agrupar 1 dezena ou 10 unidades.

E por último, a terceira etapa consistiu em realizar uma análise global dos procedimentos de cálculo identificados na segunda etapa a partir das categorias: flexibilidade na contagem; flexibilidade de cálculo aditivo; e flexibilidade de cálculo multiplicativo designadas na investigação após a análise dos procedimentos de cálculo. Nessa etapa os três casos se aglutinam possibilitando mostrar um retrato global de forma a identificar manifestações de flexibilidade de cálculo mental que emergiram nos procedimentos de cálculo: contagem, aditivo, subtrativo e multiplicativo.

A Tabela 2 mostra o panorama dos procedimentos de cálculo dos três casos, ou seja, responde a primeira questão do estudo: Que procedimentos de cálculo os estudantes usam para resolver tarefas que envolvem multiplicação e divisão com números naturais?

**Tabela 3:** Procedimentos de cálculo inventariados nos três Casos desta investigação

Procedimentos de cálculo				
Operações Significados		Ipê Amarelo	Sempre Viva	Caliandra
Multiplicação	Adição de parcelas iguais	Contar por saltos; adicionar dois a dois; usar produtos conhecidos; usar uma composição não decimal de um dos fatores; usar a decomposição decimal de um dos fatores; multiplicar em coluna; <i>*divisão através de um cálculo em coluna</i>	Adicionar sucessivamente; e adicionar dois a dois; multiplicar em coluna	Adicionar sucessivamente; e adicionar dois a dois; usar a decomposição decimal de um dos fatores; multiplicar em coluna
	Multiplicação como arranjo retangular	Contar por saltos; adicionar dois a dois; usar produtos conhecidos; usar a decomposição decimal de um dos fatores	Contar por saltos; adicionar sucessivamente; adicionar dois a dois; multiplicar em coluna	Contar por saltos; adicionar dois a dois; multiplicar sucessivamente a partir de um produto de referência; multiplicar em coluna
Divisão	Medida	Contar por saltos; adicionar sucessivamente; e adicionar dois a dois; subtrair sucessivamente; usar relações de dobro; usar múltiplos de cinco e	Contar por saltos; adicionar dois a dois; usar relação de dobro; usar múltiplos de cinco e de dez; multiplicar em coluna	Contar por saltos; adicionar sucessivamente; adicionar dois a dois; usar relações de dobro

	de dez; multiplicar sucessivamente a partir de um produto de referência; *divisão através de um cálculo em coluna		
Partilha	Adicionar sucessivamente; usar produtos conhecidos; usar a decomposição decimal de um dos fatores; *divisão através de um cálculo em coluna	Contar por saltos; adicionar sucessivamente; subtrair sucessivamente; usar relações de dobro; usar a decomposição decimal de um dos fatores; multiplicar sucessivamente a partir de um produto de referência	Adicionar sucessivamente; e adicionar dois a dois; subtrair sucessivamente; usar produtos conhecidos; usar uma decomposição não decimal de um dos fatores; usar a decomposição decimal de um dos fatores; usar relação de dobro e de metade; e multiplicar sucessivamente a partir de um produto de referência

Fonte: Dados da Pesquisa

A partir da análise desses procedimentos de cálculo busquei responder a segunda questão do estudo: Que manifestações de flexibilidade de cálculo mental são identificadas nos diferentes procedimentos de cálculo? Com isso identifiquei três categorias que emergiram manifestações de flexibilidade de cálculo mental: Flexibilidade na contagem; Flexibilidade de cálculo aditivo e Flexibilidade de cálculo multiplicativo conforme Tabela 3.

**Tabela 4:** Procedimentos de cálculo por categoria de flexibilidade de cálculo em cada

Categorias	Ipê Amarelo	Sempre Viva	Caliandra
Flexibilidade na contagem	3	2	1
Flexibilidade de cálculo aditivo	3	5	3
Flexibilidade de cálculo multiplicativo	16	4	6
<b>Total</b>	<b>22</b>	<b>11</b>	<b>10</b>

Fonte: Dados da Pesquisa

O conhecimento sobre números e operações não era o mesmo nos três casos, tendo o caso Ipê Amarelo mostrado um maior domínio, que refletiu nos procedimentos identificados em cada uma das categorias conforme mostrado na Tabela 3, especialmente para a categoria Flexibilidade no cálculo multiplicativo, o que pode dar indício de um maior trabalho realizado ao nível da multiplicação e divisão. A seguir mostro alguns exemplos em que emergiram as manifestações de flexibilidade de cálculo mental nas operações com números naturais quando estudantes do 4º ano resolvem tarefas que envolveram multiplicação e divisão. Como também discuto alguns resultados e encerro com uma breve conclusão.

#### 4 Manifestações de flexibilidade de cálculo mental

Um dos aspectos relacionados ao desenvolvimento de sentido de número diz respeito à compreensão dos contextos em que os números começam a fazer sentido. Destaco a ação da contagem de objetos, da cardinalidade e ordinal. Os três estão relacionados e se associam a ação de contar, pois a partir da contagem de objetos vão se construindo os conceitos de cardinal e

ordinal, ou seja, os termos numéricos passam a ter sentido de numerosidade e posição. Thompson (2003) se refere à contagem como um dos atributos para desenvolver a flexibilidade de cálculo mental. O autor destaca que a contagem feita a partir do maior, no caso de uma soma, inclui a capacidade de comparar dois números com sucesso para decidir qual é o maior e uma consciência (implícita ou explícita) da propriedade comutativa da adição sendo que esse tipo de estratégia é um impulso natural para a economia cognitiva. No caso desta investigação a contagem apareceu nas resoluções de tarefas envolvendo situações de multiplicação e divisão com números naturais.

Threlfall (2009) descreve a contagem como um tipo de flexibilidade de estratégia bastante comum entre as crianças, pode ser uma contagem regressiva (para trás) ou contagem para frente. O autor aponta que as soluções encontradas para determinada tarefa não dependem de uma escolha e sim da interação única e local entre perceber algo nos números e o conhecimento adquirido sobre os números.

O procedimento de contagem apareceu nas tarefas que envolviam os significados de multiplicação como adição de parcelas iguais, multiplicação como arranjo retangular, divisão como medida, e divisão como partilha (Ponte & Serrazina, 2000). Ao revisitar os procedimentos de cálculo dos três casos me deparei com as seguintes evidências em situações de contagem: (i) emerge o simples ato de contagem; (ii) a contagem se transforma em estrutura multiplicativa; (iii) compreende o invariante da situação usando-o como marcador para a contagem; e (iv) realiza a correspondência de um para muitos. Essas evidências referem-se à compreensão que se tem dos números para agrupá-los, seja de 2 em 2; de 5 em 5; de 10 em 10; de 30 em 30, etc. É o entendimento de que cada grupo representa um elemento único a ser contado, ou seja, o reconhecimento do grupo como unidade (*unitizing*), um dos aspectos relacionados à compreensão do conceito de multiplicação.

A situação de contagem surgiu na resolução do problema que envolveu a divisão como medida. João (Figura 1) usou o invariante da situação, no caso o 30 para realizar a contagem. Por se tratar de um número grande ele realizou a contagem de 3 em 3 e estabeleceu a relação numérica do 30 com o produto  $3 \times 10$  conforme explicação dada à professora: “*Olha só! Eu não sei contar número grande, 30 é grande. Eu comecei 30,  $30 + 30 = 60$ ; depois  $60 + 30 = 90$ , ia demorar muito fazer a conta. Então eu lembrei que 3 vezes 10 é 30*” (Silva, 2023, p. 192). Neste caso na estratégia de cálculo usada por João (Figura 1) há indício de flexibilidade de cálculo ao reconhecer que para somar dezenas exatas, basta adicionar o número de dezenas e depois acrescentar o zero, usando o invariante da situação para contagem e a compreensão das grandezas dos números ao estabelecer a relação numérica do 30 com o produto  $3 \times 10$ .

**Figura 1** João – Resolução Tarefa 8

1. A escola levará os alunos ao cinema. Cada ônibus cabem 30 alunos sentados. 625 alunos irão ao cinema. Quantos ônibus a escola irá precisar para todos os alunos irem sentados?

30 540  
60 570  
90 600  
120 630  
150  
180  
210  
240  
270  
300  
330  
360  
390  
420  
450  
480  
510

21 Ônibus

**Discuta com os colegas o resultado**

**Fonte:** Acervo da Pesquisa

A categoria analítica Flexibilidade de cálculo aditivo diz respeito ao uso de procedimentos aditivos para se resolver tarefas envolvendo as operações de multiplicação e divisão com números naturais. Destaco as seguintes evidências: referência do 10 e do 5 para realizar as adições sucessivas e/ou adições duas a duas; uso do invariante da situação através de adições; reconhecimento da parte dentro do todo através de adições; uso da adição repetida para resolver um produto; uso de múltiplos de 10 quando se trata de números multidígitos; uso da propriedade comutativa da adição sem nomeá-la; e aparecimento da relação de dobro e de metade nas adições sucessivas e/ou adições duas a duas.

A esse conjunto de evidências está perceptível o pensamento aditivo por abranger a operação de adição e considerar que esta operação se relaciona com as operações de multiplicação e divisão na transição do pensamento aditivo para o multiplicativo, como referem Mendes et al. (2013). Existem ainda estudantes que manifestam flexibilidade nos procedimentos usados, adaptando-os aos números envolvidos nos cálculos, como no exemplo da Figura 2, em que aparece o registo das adições repetidas do 48 e do lado o produto  $4 \times 48 = 192$  (Silva, 2023, p. 196).

**Figura 2** Talles – Resolução Tarefa 1, item 1

1. Pedro faz coleção de figurinhas. Ele comprou 48 pacotes com 4 figurinhas cada um. Quantas figurinhas ele comprou?

$$\begin{array}{r} 3 \\ 48 \\ \times 4 \\ \hline 192 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 3 \\ 48 \\ \times 4 \\ \hline 192 \end{array}$$

Ele tem 192 figurinhas

**Fonte:** Acervo da Pesquisa

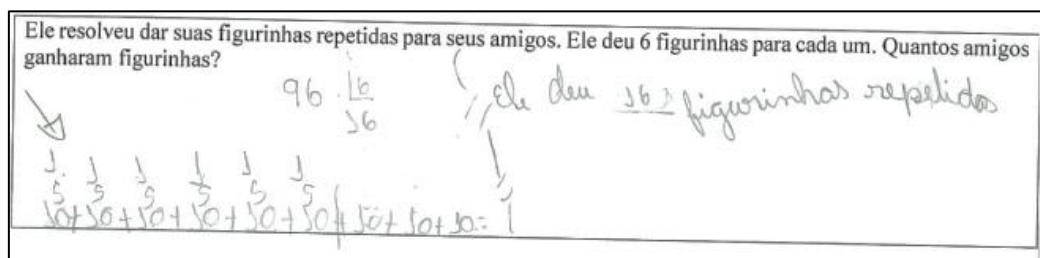
Thompson (2003) aponta um conjunto de atributos subjacente para desenvolver a

flexibilidade no cálculo mental, de que destaco a compreensão do que é possível efetuar com os números e o que não é. Neste atributo Thompson (2003) se refere à inclusão das propriedades dos números, das operações e as relações entre as operações.

Os procedimentos aditivos surgiram nos diferentes significados das operações de multiplicação e de divisão e nos três casos, o que pode evidenciar a presença do pensamento aditivo como suporte para a estratégia de cálculo mental que envolve essas operações. Não significa que é um pensamento primário, mas sim um pensamento relacional que se refere ao saber o que fazer e por quê (Skemp, 1978). Cebola e Brocardo (2019) referem que “a discussão em torno da flexibilidade na construção de estratégias desenvolve-se ainda na relação entre conhecimento conceitual (compreender porque fazer) e de procedimentos (saber como fazer)” (p. 573). As referidas autoras apontam que estas relações acontecem na influência que cada um determina no outro e no quanto ambos são imprescindíveis para a compreensão matemática.

Ao usar o 10 e o 5 como referência para realizar a adição sucessiva (Figura 3) fica evidente que houve a partição do todo para chegar ao resultado. O que evidencia a compreensão entre o tamanho do todo, o número de partes a serem consideradas e o tamanho das partes (Fosnot & Dolk, 2001). O uso do 10 e do 5 como referência (Figura 3) se traduz na decomposição decimal do 96 em  $(90 + 6)$ , ou seja,  $(10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10)$  e depois  $(1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1)$ . Ainda na decomposição dos três 10 restantes em  $(5 + 5 + 5 + 5)$ . Thompson (2003) refere que a flexibilidade de cálculo mental é desenvolvida pelo que se conhece dos números, das operações e o que é possível fazer com eles. Na situação (Figura 3) o uso da decomposição do número 96 mostra o conhecimento que Isabel (Figura 3) tem do número (Thompson, 2003) e sua capacidade em transformá-lo (Threlfall, 2002, 2009) para resolver uma situação que envolve a divisão. Dessa forma, Isabel (Figura 3) mostra dominar a decomposição do 96 suportada pelas relações entre a parte e o todo. Parece haver indício da construção de uma rede de relações numéricas em torno do número 96, podendo inferir-se que a flexibilidade de cálculo mental se manifesta na operação de adição ao decompor o número envolvido na tarefa para resolver a situação de divisão (Silva, 2023, p. 153).

**Figura 3** Isabel – Resolução Tarefa 1, Item 3



**Fonte:** Acervo da Pesquisa

Nos três casos nota-se a compreensão do que se pode efetuar com os números, e que as estratégias de cálculo mental emergem nas transformações numéricas a partir do contexto da tarefa. Nota-se a percepção de um pensamento relacional (Cebola & Brocardo, 2019; Skemp, 1978), por exemplo, na explicação dada pelo estudante Miguel (Figura 4): “são dois 50 no 100 e quatro 25. Em duas caixas vão ficar 50 brigadeiros e em 4 vão ficar 25” (Silva, 2023, p. 156), há percepção do conhecimento do número, as partes no todo, o que mostra a relação entre o conhecimento conceitual (compreender por que fazer) e de procedimentos (saber como fazer).



**Figura 4:** Miguel – Resolução Tarefa 2, item 2

<p>2 caixas</p> $\begin{array}{r} 50 \\ 50 \\ \hline 100 \end{array}$	<p>4 caixas</p> $\begin{array}{r} 25 \quad 50 \\ +25 \quad +50 \\ \hline 50 \quad 100 \end{array}$
---	--

**Fonte:** Acervo da Pesquisa

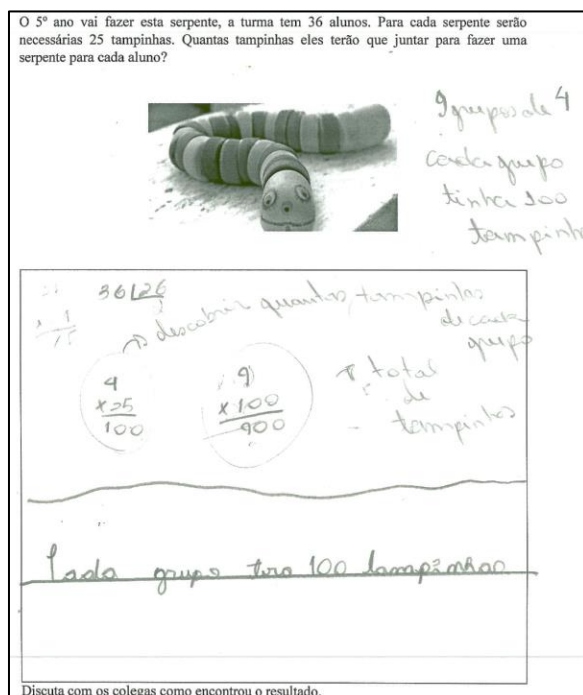
A categoria Flexibilidade de cálculo multiplicativo está subdividida em duas subcategorias: uso das propriedades das operações e uso da relação inversa. No uso das propriedades das operações e no uso da relação inversa visualizadas nos procedimentos multiplicativos há manifestações de flexibilidade de cálculo mental nas operações com números naturais?

Uma das habilidades para desenvolver o sentido de número segundo Sowder (1992) é a habilidade para realizar cálculos mentais mediante estratégias mentais que aproveitem as propriedades dos números e das operações.

McIntosh et al. (1992) apontam três componentes para a capacidade de compreender e usar operações: (i) compreensão do efeito da operação; (ii) noção das propriedades matemáticas das operações; e (iii) noção da relação entre as operações. Os autores chamam atenção para o uso intuitivo das propriedades aritméticas pelos estudantes ao inventarem procedimentos de cálculo. Slavit (1995) considera que o sentido de operação envolve vários tipos de concepções flexíveis que podem ser interrelacionadas pelos estudantes, uma delas diz respeito às propriedades das operações. Ele aponta que compreender as propriedades de uma operação pode promover flexibilidade no pensamento sobre o cálculo. Threlfall (2009) destaca que o uso flexível e adaptativo de procedimentos parte da percepção que se tem dos números e o conhecimento que se tem deles e não da escolha de uma “estratégia” para se chegar à solução. Nesta premissa a estratégia emerge inconscientemente da conexão entre o que se notou dos números da tarefa e o que se sabe sobre os números e suas relações.

O uso das propriedades das operações relaciona-se à decomposição decimal ou não de um dos fatores para se resolver determinada tarefa sem que haja conhecimento formal dessas propriedades. No geral, aparece em situações que envolvem a multiplicação, mas é possível visualizar em situações de divisão. É comum o uso da propriedade distributiva da multiplicação em relação à adição, todavia, a propriedade comutativa e a associativa também são usadas. O conhecimento de fatos básicos e a decomposição de um dos fatores é o principal indício para o uso destas propriedades.

A decomposição não decimal de um dos fatores envolvendo números multidígitos em situação de multiplicação como adição de parcelas iguais está presente na Figura 5. Nesta situação a estratégia de cálculo mental parece emergir a partir da influência das características do contexto do problema, no exemplo, toma como referência o tamanho do grupo, no caso 25, sem perder de vista a quantidade de grupos, 36. Por isso, começa a transformar os números do problema, inicia com a decomposição não decimal do 36 ( $9 \times 4$ ) para depois fazer as relações já conhecidas, como os 4 grupos de 25 equivalente a 100. Percebe-se o uso de fatos básicos já conhecidos, no caso o fato do  $9 \times 4 = 36$ , como também já ter conhecimento que quatro grupos de 25 equivale a 100 e  $9 \times 100 = 900$ . Implicitamente no procedimento de cálculo aparece a sentença matemática  $4 \times 25 \times 9 = 900$ ; ( $4 \times 25 = 100$  e  $100 \times 9 = 900$ ), o que revela a utilização da propriedade associativa da multiplicação.

**Figura 5:** Pedro – Resolução Tarefa 9**Fonte:** Acervo da Pesquisa

As evidências onde emergiram manifestações de flexibilidade de cálculo mental nos três casos sinalizam a compreensão de conceitos como: estrutura decimal do número, dobro, metade, grandezas dos números (valores posicionais, relativos e absolutos), fatos básicos, decomposição, correspondência de um para muitos e a parte todo. Este conhecimento dos números e as suas transformações possibilitaram a percepção do pensamento relacional (Cebola & Brocardo, 2019; Skemp, 1978) ao mostrar o que se sabe fazer com eles, os efeitos das operações a partir do uso flexível de relações numéricas ao decompor os números e das relações inversas, evidenciadas nas folhas de respostas e nas socializações dos estudantes dos três casos. Assim, como refere Serrazina e Rodrigues (2021) “a construção de uma rede de relações numéricas torna-se um elemento essencial no processo de desenvolvimento da flexibilidade de cálculo” (p. 36).

Nos três casos ficou evidente que as estratégias de cálculo foram inventadas a partir do conhecimento anterior dos estudantes, ou seja, estratégias alcançadas e não selecionadas, escolhidas ou aplicadas. Houve o reconhecimento de que o pouco conhecimento dos números e operações, assim como do algoritmo formal, não influenciaram emergir a flexibilidade de cálculo mental, pois foi perceptível a construção de uma rede de transformações dos números (Threlfall, 2009; Thompson, 2003) e relações numéricas (Serrazina & Rodrigues, 2021) nos procedimentos de cálculo registrados nas folhas de respostas dos estudantes, o que indicia manifestações de flexibilidade de cálculo mental.

As ações do pensamento dos estudantes tornaram-se públicas, principalmente, pelo modo como as experiências de aprendizagem e ensino foram planejadas e conduzidas nos três casos, o que me leva a ressaltar que o aprender e ensinar matemática perpassam: planejamento antecipado da aula e da condução na sala de aula; seleção e análise das tarefas, previamente; e socializações das produções escritas dos estudantes com mediação, intervenção e interação. Além de evidenciar a importância do ensino exploratório e problematizador no processo de aprender e ensinar matemática, seja na sala de aula de espaços escolares, acadêmicos e/ou nas

formações continuadas e em serviço.

Além desses aspectos destaco o aspecto formativo da avaliação no sentido de proporcionar o diálogo entre professor(a) e estudantes, assim como na valorização do registro escrito e da socialização dos procedimentos e estratégias de cálculo de quem resolve as tarefas, o que pode ampliar as aprendizagens da turma e possibilitar que os docentes possam mapear os conhecimentos dos estudantes para uma intervenção efetiva.

Posso dizer que o tema do estudo desenvolvido traz abordagens e perspectivas ainda pouco discutidas nos documentos curriculares brasileiros, assim como nas discussões acadêmicas. Como citado no início do texto não encontrei no banco de dados da Capes trabalhos com temas semelhantes. E para essa comunicação também não encontrei nos anais dos SIPEM anteriores algum estudo que pudesse realizar uma articulação com o tema que fui investigar manifestações de flexibilidade de cálculo mental em tarefas que envolvem as operações de multiplicação e divisão. É um estudo que provoca reflexões e discussões sobre o fazer e saber dos estudantes e dos docentes, principalmente, em relação ao planejar e conduzir a sala de aula com colaboração, participação e cooperação ampliando as relações de mediar, intervir e interagir. Mas também apontou fragilidades como, por exemplo, na condução das socializações das soluções encontradas pelos estudantes, muitas vezes o pensamento do estudante fica imperceptível aos olhos do professor e/ou investigador levando a perda de oportunidades e/ou possibilidades de ter mais informações sobre o raciocínio matemático do estudante.

Por fim, é um estudo que provoca outras investigações, como por exemplo, a compreensão do desenvolvimento de flexibilidade de cálculo mental seja nas operações com números naturais, números racionais dentre outras áreas de conhecimento da educação matemática.

## Agradecimentos

As possibilidades para desenvolver o estudo foram diversas, a começar pela Secretaria de Estado de Educação do Distrito Federal que me afastou das minhas funções para estudar no exterior. A Universidade de Lisboa que me acolheu, proporcionou várias trocas de experiências e conhecimentos, em especial meus orientadores Professora Doutora Maria de Lurdes Serrazina e João Pedro da Ponte, assim como todos os demais professores da Universidade, colegas dentre outros. Não podia deixar de mencionar a Capes que financiou parcialmente minha estada no exterior e agora devolvo as oportunidades com publicações tornando pública e visível uma pesquisa com um tema relevante, novo e importante que agrega ao campo da Educação Matemática tanto nas Universidades, nas Escolas e Formações continuadas e em serviço.

## Referências

- Baroody, A., Baroody, A. J., & Coslick, R. T. (1998). *Fostering children's mathematical power: An investigative approach to K-8 mathematics instruction*. Routledge.
- Brocardo, J. (2011). Uma linha de desenvolvimento do cálculo mental: Começando no 1.º ano e continuando até ao 12.º ano. *Atas do Profmat2011*. APM.
- Brocardo, J., & Serrazina, L. (2008). O sentido do número no currículo de Matemática. In J. Brocardo, L. Serrazina, & I. Rocha (Eds.), *O sentido do número: Reflexões que entrecruzam teoria e prática* (pp. 97-115). Escolar Editora.
- Buys, K. (2008). Mental arithmetic. In M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Children learn mathematics* (pp. 121-146). Sense Publishers.
- Cebola, G., & Brocardo, J. (2019). Estratégias, Representações e Flexibilidade na Resolução

- de Tarefas de Comparação Multiplicativa. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 33, 568-590.
- Carpenter, T. P., Copurn, T. G., Reys, R. E., & Wilson, J. W. (Eds.). (1976). Using research in teaching: Notes from National Assessment: estimation. *The Arithmetic Teacher*, 23(4), 296-302.
- Carvalho, R. (2016). *Cálculo mental com números racionais: um estudo com alunos do 6.º ano de escolaridade* [Tese de doutorado, Universidade de Lisboa].
- Castro, J., & Rodrigues, M. (2008). *Sentido de número e organização de dados*. Ministério da Educação. DGIDC.
- Fosnot, C., & Dolk, M. (2001). *Young mathematicians at work: Constructing multiplication and division*. Heinemann.
- Fuson, K. C. (1988). *Children's counting and concepts of number*. Springer.
- Gersten, R., & Chard, D. (1999). Number sense: Rethinking arithmetic instruction for students with mathematical disabilities. *The Journal of special education*, 33(1), 18-28. <https://doi.org/10.1177/002246699903300102>
- Gómez, B. (1989). Cálculo mental: Clasificación de estrategias. *Enseñanza de las ciencias: Revista de investigación y experiencias didacticas*, 287-288. <https://doi.org/10.1177/002246699903300102>
- Llinares, S. (2001). El sentido numérico y la representación de los números naturales. En E. Castro (Ed.), *Didáctica de la Matemática en la Educación primaria* (pp. 151-175). Madrid: Editorial Síntesis.
- Markovits, Z., & Sowder, J. T. (1994). Developing number sense: An intervention study in Grade 7. *Journal for Research in Mathematics Education*, 25(1), 4-29. <https://doi.org/10.2307/749290>
- McIntosh, A., Reys, B. J., & Reys, R. E. (1992). A proposed framework for examining basic number sense. *For the Learning of Mathematics*, 12(3), 2-8, 44. <https://www.jstor.org/stable/40248053>
- McMullen, J., Brezovsky, b., Rodriguez-Aflecht, G., Pongsakdi, N., Hannula-Sormunen, M. M., & Lehtinen, E. (2016). Adaptive number knowledge: Exploring the foundations of adaptivity with whole-number arithmetic. *Learning and Individual differences*, 47, 172-181.
- Mendes, M. F. P. C. (2012). *A aprendizagem da multiplicação numa perspectiva de desenvolvimento do sentido de número: um estudo com alunos do 1.º ciclo* [Tese de doutorado, Universidade de Lisboa]. Repositório Institucional da UL. <http://hdl.handle.net/10451/5893>
- Mendes, F., Brocardo, J., & Oliveira, H. (2013). A evolução dos procedimentos usados pelos alunos: contributo de uma experiência de ensino centrada na multiplicação. *Quadrante*, 22(1), 133-162. <https://doi.org/10.48489/quadrante.22884>
- Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In Grupo de Trabalho de Investigação [GTI] (Ed.), *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). APM.
- Ponte, J. P. D., & Serrazina, M. D. L. (2000). *Didáctica da Matemática do 1.º ciclo*. Universidade Aberta.

- Serrazina, L., & Rodrigues, M. (2021). Number Sense and Flexibility of calculation: A common Focus on Number Relations. In A. G. Spinillo, S. L. Lautert, & R. E. S. R. Borba (Eds.), *Mathematical Reasoning of children and Adults*. (pp. 19-40). Springer. [https://doi.org/10.1007/978-3-030-69657-3\\_2](https://doi.org/10.1007/978-3-030-69657-3_2)
- Silva, C. C. R. D. (2023). *Manifestações de flexibilidade de cálculo mental em tarefas que envolvem multiplicação e divisão numa perspectiva do sentido de número*. [Tese de doutorado, Universidade de Lisboa]. Repositório Institucional da ULisboa. <http://hdl.handle.net/10451/64857>
- Skemp, R. R. (1978). Relational understanding and instrumental understanding. *The Arithmetic Teacher*, 26(3), 9-15
- Skovsmose, O. (2000). Cenários para investigação. *Bolema-Boletim de Educação Matemática*, 13(14), 66-91.  
<https://www.periodicos.rc.biblioteca.unesp.br/index.php/bolema/article/view/10635>
- Slavit, D. (1995, October 21-24). Operational Sense in First Grade Addition. *17th Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, OH. <https://files.eric.ed.gov/fulltext/ED389623.pdf>
- Sowder, J. (1990). Mental computation and number sense. *The Arithmetic Teacher*, 37(7), 18-20. <https://doi.org/10.5951/AT.37.7.0018>
- Sowder, J. (1992). Estimation and number sense. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching* (pp. 371-389). MacMillan.
- Taton, R. (1996). *O cálculo mental*. Arcádia.
- Thompson, I. (1999). Mental calculation strategies for strategies for addition and subtraction. Part 1. *Mathematics in School*, 28(5), 2-4. <https://www.jstor.org/stable/30215422>
- Thompson, I. (2003). Written methods of calculation. In I. Thompson (Ed.), *Issues in teaching numeracy in primary schools* (pp. 169-183). Open University Press.
- Threlfall, J. (2002). Flexible mental calculation. *Educational Studies in Mathematics*, 50(1), 29-47. <https://doi.org/10.1023/A:1020572803437>
- Threlfall, J. (2009). Strategies and flexibility in mental calculation. *ZDM Mathematics Education*, 41(5), 541-555. <https://doi.org/10.1007/s11858-009-0195-3>
- Trafton, P. R. (1989). Reflections on the number sense conference. In J. T. Sowder, & B. P. Schappelle (Eds.), *Establishing foundations for research on number sense and related topics: Report of a conference* (pp. 74-77). San Diego State University Center for Research in Mathematics and Science Education.