Conhecimento Interpretativo de professores de matemática dos Anos Finais e do Ensino Médio ao atribuírem significado a produções de alunos no âmbito da transformação geométrica isométrica translação

Interpretive Knowledge of lower and upper secondary mathematics teachers when giving meaning to student's productions within the scope of isometric geometric transformation translation

Caroline Silva[1]
Miguel Ribeiro[2]

Resumo: O Conhecimento Interpretativo é o conhecimento matemático especializado que fundamenta a prática de propiciar aos alunos o desenvolvimento de seu conhecimento. Esse conhecimento especializado possibilita ao professor entender e interpretar os raciocínios e formas de Pensar dos alunos para atribuir significado e propor um *feedback*. Como o Conhecimento Interpretativo não se desenvolve na prática e demanda um contexto formativo, para esse desenvolvimento, implementou-se uma Tarefa Interpretativa no âmbito da translação para 14 professores com essa intencionalidade. Os resultados revelam que os professores apresentam dificuldades em entender as propriedades do vetor da translação; efetuam, fundamentalmente, uma interpretação avaliativa com foco na identificação dos erros dos alunos e propõem, em geral, um *feedback* superficial ou explicativo de como resolver o problema.

Palavras-chave: Conhecimento Interpretativo. Tarefa Interpretativa. Translação. *Feedback*.

Abstract: Interpretive Knowledge is specialized mathematical knowledge that underpins the practice of enabling students to develop their knowledge. This specialized knowledge enables the teacher to understand and interpret students' reasoning and ways of thinking to attribute meaning and propose feedback. As Interpretive Knowledge is not developed in practice and requires a training context, for this development, an Interpretive Task was implemented within the scope of translation for 14 teachers with this intention. The results reveal that teachers have difficulties in understanding the properties of the translation vector; They fundamentally carry out an evaluative interpretation focused on identifying students' errors and generally propose superficial or explanatory feedback on how to solve the problem.

Keywords: Interpretive Knowledge. Interpretive Task. Translation. Feedback.

1 Introdução

O ensino dos tópicos de Geometria permite desenvolver o entendimento matemático dos alunos pelo desenvolver do Pensar geométrico (Jones, 2020), e um desses tópicos é a transformação geométrica isométrica translação. A aprendizagem da translação possibilita o entendimento matemático relacionado a outros tópicos como vetor, localização, paralelismo, perpendicularismo, congruência e muitos outros, que, em conjunto, contribuem para que os alunos desenvolvam seu conhecimento matemático, resolvam problemas e interpretem o mundo. Todavia, apesar de os professores considerarem que a translação é de simples compreensão (Gomes, 2012), a pesquisa mostra algo distinto e revela que esse é um tópico problemático, em termos de aprendizagem e de ensino, diante das dificuldades que os alunos (e professores) apresentam (Flores & Yanik, 2016; Gomes, 2012), tal como, entender que a

[1] Universidade Estadual de Campinas • Atibaia, São Paulo — Brasil • ✉ e-mail caroldesouza86@gmail.com • ORCID https://orcid.org/0000-0002-7089-7090
[2] Universidade Estadual de Campinas • Paulínia, São Paulo — Brasil • ✉ e-mail cmribas78@gmail.com • ORCID https://orcid.org/0000-0003-3505-4431

ISSN 2764-3158

translação é uma operação efetuada com todos os pontos da figura a partir de um vetor e suas componentes fundamentais (direção, sentido e comprimento) necessitam ser consideradas para realizar e compreender essa transformação.

Outras dificuldades dos alunos no âmbito da translação relacionam-se com compreender que figura e imagem são congruentes (Kidder, 1976); diferenciá-la das demais transformações isométricas (Yanik & Flores, 2009); compreender as suas principais propriedades (Gomes, 2012) e entender o significado do vetor de translação, essencialmente, sua componente comprimento, ao efetuarem a translação como um movimento indefinido ao desconsiderá-la, ou ainda, o erro de utilizar o comprimento do vetor como a medida da distância (espaço) entre figura e imagem (Flores & Yanik, 2016). Para ultrapassar essas e outras dificuldades de aprendizagens matemáticas nesse tópico (e em todos os outros), o conhecimento do professor é essencial, visto que, dentre os fatores controláveis, é o que mais impacta as aprendizagens e resultados dos alunos (e.g., Nye; Konstantopoulos; Hedges, 2004).

Diversas são as conceitualizações sobre o conhecimento do professor, porém, aqui, assumem-se as conceitualizações do Conhecimento Interpretativo (CI) e do *Mathematics Teacher's Specialised Knowledge*[3] – MTSK (Carrillo *et al.*, 2018) e considera-se que todo o conhecimento do professor (matemático e pedagógico) é especializado, uma vez que esse conhecimento fundamenta a prática matemática do professor no que tange a propiciar aos alunos o desenvolvimento de seu conhecimento matemático.

O CI (Di Martino, Mellone & Ribeiro, 2020; Jakobsen, Ribeiro & Mellone, 2014; Mellone *et al*., 2020) corresponde ao conhecimento matemático especializado que permite ao professor realizar sua prática interpretativa que envolve entender e interpretar para, posteriormente, atribuir significado às produções dos alunos e propor um *feedback*, mesmo que essas sejam incorretas ou não usuais (Jakobsen *et al*., 2014). A especialização do CI é sustentada nas especificidades do conteúdo do conhecimento matemático da conceitualização do MTSK (Ribeiro, 2024; Silva & Ribeiro, 2023), e como o conhecimento especializado não se desenvolve na prática de sala de aula (e.g., Ribeiro, Mellone & Jakobsen, 2013), mas requer contextos formativos que tenham por intencionalidade desenvolvê-lo, assumimos a necessidade de uma formação sustentada na implementação e discussão de tarefas para proporcionar uma prática matemática interpretativa inovadora (Ribeiro & Silva, 2024). Com esse fito, assume-se a perspectiva das Tarefas para a Formação – TpF (Ribeiro, Almeida & Mellone, 2021), mais especificamente, as categorizadas como Tarefas Interpretativas – TI (Mellone *et al*., 2020) que se associam ao objetivo formativo de desenvolver o conhecimento interpretativo e especializado do professor em cada tópico matemático.

Nesse sentido, a formação de professores que conceitualizamos são focadas na resolução, preparação e implementação de tarefas, pois essas são centrais na prática do professor, isso porque, o trabalho do professor em sala de aula, se materializa ao implementar tarefas para seus alunos (Mason & Johnston-Wilder, 2006). Por outro lado, os contextos de introdução aos tópicos são aqueles em que o professor mobiliza, de forma mais premente, o seu conhecimento especializado e que nos permite aceder e desenvolver o conteúdo desse conhecimento (Ribeiro, 2010). Assim, as TpF que conceitualizamos são sempre de introdução a algum tópico matemático e a sua implementação nos contextos formativos (e de coleta de informações) estão sempre associadas a alguma questão de pesquisa. Sua implementação ocorre de modo a possibilitar uma transposição de experiências e práticas para a sala de aula, a fim de desenvolver o conhecimento matemático e formas de Pensar dos alunos.

[3] Optamos por utilizar a nomenclatura em inglês por esta já ser reconhecida internacionalmente e a tradução poder acarretar uma dessignificação, que se encontra associada a cada uma das dimensões da conceitualização.

ISSN 2764-3158

Com o intuito de contribuir para o avanço da pesquisa e focar a atenção da formação, e por ser ainda uma área em aberto, aqui focamos o Conhecimento Interpretativo revelado por professores de matemática ao resolverem uma TI, tendo que interpretar e atribuir significado a produções de alunos para uma questão envolvendo a translação. Assim, questão de pesquisa que se busca responder é: *Que Conhecimento Interpretativo revelam professores de matemática dos Anos Finais e do Ensino Médio ao resolverem uma Tarefa Interpretativa no âmbito da translação, com foco nas principais dificuldades dos alunos?*

2 Algumas discussões teóricas

A translação é considerada, em geral, pelos alunos a mais fácil (Moyer, 1978) e pelos professores, como sendo a mais simples das transformações geométricas isométricas – as outras são a reflexão e rotação – (Gomes, 2012), embora os alunos apresentem diversas dificuldades de aprendizagens matemáticas e cometam erros ao terem de resolver tarefas no âmbito da translação. De acordo com a Base Nacional Comum Curricular – BNCC[4] (Brasil, 2018), é esperado que os alunos, a partir do 7.º ano, sejam capazes de (no sentido de *saber fazer*) reconhecer e construir figuras obtidas pela translação (Brasil, 2018). As principais dificuldades dos alunos associam-se a (i) compreender que para efetuar a translação é necessário seguir procedimentos específicos (algoritmos) que permitem diferenciar as transformações entre si (Yanik & Flores, 2009); (ii) compreender que figura e imagem são congruentes (Kidder, 1976); (iii) compreender que a medida de comprimento do vetor da translação corresponde à distância entre todos os pontos da figura e seus correspondentes da imagem (Flores & Yanik, 2016).

Essas dificuldades estão relacionadas às próprias dificuldades dos professores (Gomes, 2012) e associadas a uma falta de conhecimento geométrico por parte do professor (e.g., Gomes, 2012; Thaqi, Giménez & Rosick, 2011). Logo, o conhecimento do professor impacta diretamente as aprendizagens e resultados dos alunos (e.g., Nye *et al.*, 2004).

O conhecimento do professor é entendido aqui a partir das conceitualizações teóricas Conhecimento Interpretativo e *Mathematics Theacher's Specialised Knowledge* – MTSK (Carrillo *et al*, 2018). O MTSK considera todo o conhecimento do professor como especializado, tanto em âmbito do conhecimento matemático – *Mathematical Knowledge* (MK) –, quanto do conhecimento pedagógico – *Pedagogical Content Knowledge* (PCK). Aqui, focamos a atenção no MK, visto que é seu conteúdo que sustenta o Conhecimento Interpretativo (Ribeiro, 2024; Silva & Ribeiro, 2023). Esse será o foco das discussões, que também traz alguns exemplos desse conhecimento no âmbito da translação.

O MK corresponde ao conteúdo do conhecimento matemático do professor como um todo coerente, em termos de uma disciplina científica, dentro de um contexto educacional (Carrillo *et al*, 2018). É composto pelos subdomínios: *Knowledge of Topics* (KoT), *Knowledge of the Structure of Mathematics* (KSM) e *Knowledge of Practices in Mathematics* (KPM).

O *Knowledge of Topics* (KoT) corresponde ao conhecimento das grandes ideias matemáticas e tópicos a serem ensinados (Carrillo *et al.*, 2018). É composto pelas categorias: (i) procedimentos; (ii) definições, propriedades e fundamentos; (iii) registros de representação; (iv) fenomenologia e aplicações.

Em (i), procedimentos, inclui-se conhecer os diferentes modos de fazer matemático para resolver um problema, considerando como se faz? Quando se pode fazer? Por que se faz dessa maneira? E as características do resultado. No âmbito da translação, por exemplo, contempla

[4] A BNCC denomina equivocadamente todas as transformações geométricas isométricas por simetrias. O erro de linguagem ocorre ao "misturar" os termos translação (operação) e simetria (propriedade), ou seja, o movimento a ser efetuado na figura, com seu resultado possuir simetria, o que gera algumas das dificuldades de compreensão nesses tópicos.

ISSN 2764-3158

conhecer que os procedimentos para a efetuar, consistem em adicionar o vetor de translação a cada ponto da figura para obter como resultado o ponto correspondente na imagem.

Relativamente a (ii), definições, integra conhecer as diferentes definições para cada tópico elaboradas a partir de suas propriedades e fundamentos. Inclui, por exemplo, conhecer a definição em que "a translação $T_v: \Pi \rightarrow \Pi$ determinada pelo vetor v, é a transformação que leva cada ponto P do plano Π no ponto $T_v(P) = P + v$" (Lima, 1992, p. 142). Em propriedades, inclui-se conhecer o conjunto de todos os atributos matemáticos que são comuns aos tópicos. Um exemplo de propriedade da translação é a congruência entre figura e imagem, já que a translação é uma isometria (Coxeter & Greitzer, 1967). Os fundamentos referem-se a conhecer os atributos matemáticos fundamentais sem os quais o tópico não existe. Refere-se a conhecer, por exemplo, que os fundamentos da translação são a figura, o vetor de translação e a imagem.

Em (iii), registros de representação, envolve conhecer as diversas formas de representar um tópico, levando em consideração os diferentes tipos de registros. Inclui conhecer, por exemplo, que a translação de um ponto $P = (x,\ y)$ qualquer, a partir do vetor $\overrightarrow{u} = (a, b)$, pode ser representada algebricamente por: $T(P) = P + \overrightarrow{u} = (x + a, y + b)$, de modo que as coordenadas (x', y') do ponto $P' = T(P)$ são indicadas pelas equações $x' = x + a$ e $y' = y + b$.

No âmbito da (iv) fenomenologia e aplicações, integra conhecer os diferentes fenômenos e o significado de suas interpretações associados ao tópico que permitem entendê-lo, conforme os diferentes contextos. Envolve conhecer, por exemplo, que a translação pode ser entendida como uma transformação rígida definida por um vetor e suas três componentes, resultado de uma operação com uma figura para obter uma imagem congruente a essa figura, e uma função bijetora (relação entre pontos de dois conjuntos – figura e imagem).

O *Knowledge of the Structure of Mathematics* (KSM) compreende o conhecimento das conexões entre distintos tópicos matemáticos, considerando a dimensão temporal de sequenciação matemática e os elementos específicos de cada tópico (Carrillo *et al*., 2018).

O *Knowledge of Practices in Mathematics* (KPM) corresponde ao conhecimento das práticas matemáticas situadas em um contexto da prática profissional do professor de matemática (Carrillo *et al*., 2018). É composto pelas categorias: (i) prática de demonstrar; (ii) prática de definir; (iii) prática de resolver problemas; (iv) o papel da linguagem matemática.

A (i), prática de demonstrar, envolve conhecer como se desenvolvem e são validadas as demonstrações matemáticas. No âmbito da translação, por exemplo, contempla conhecer que em termos de generalização, não se pode assumir para demonstrar algo associado que as figuras transformadas por translações sempre permitem obter imagens localizadas em um local físico diferente da figura inicial, pois isso deixa de ser verdade quando se considera a translação identidade determinada pelo vetor nulo em que figura e imagem coincidem.

Em (ii), prática de definir, integra conhecer as condições necessárias e suficientes para gerar definições e as suas características, isso é, hierarquia, não circularidade, não ambiguidade, não contradição, minimalidade, independência sob a mudança de representação, equivalência e elegância de uma definição. Um exemplo no âmbito da translação, inclui conhecer que não se pode definir a translação como uma simetria, já que seria uma pseudodefinição por não identificar univocamente o ente que se pretende definir, uma vez que simetria (translacional) é uma das propriedades da figura e imagem obtidas por translação.

Na (iii), prática de resolver problemas, contempla conhecer as estratégias de simplificar, reinterpretar, decompor, sistematizar e introduzir um elemento auxiliar para explorar a solução de um problema, valendo-se do conhecimento do uso de gráficos e desenhos como heurísticos.

Como exemplo, considera-se conhecer que, diante do problema em ter que transladar uma figura no contexto da malha quadriculada e cujo vetor de translação é oblíquo, pode-se determinar a medida de comprimento do vetor de translação considerando as medidas de comprimento dos lados dos quadrados da malha quadriculada na horizontal e vertical como catetos de um triângulo retângulo e utilizando o teorema de Pitágoras, pois a medida de comprimento do vetor corresponderá a medida da hipotenusa desse triângulo.

Já em (iv), o papel da linguagem matemática, inclui-se conhecer os papéis dos símbolos para reduzir e expressar brevemente informações, inclusive dos símbolos convencionais em contextos de validação, o papel da notação matemática e do significado dos quantificadores e do uso da linguagem matemática adequada. Na translação, inclui conhecer em termos da linguagem matemática adequada, que denominar "simetria de translação" para se referir a translação é inadequado, pois simetria é uma propriedade (algo que se identifica na figura) e translação é uma operação (algo que se faz na figura).

O conteúdo desse conhecimento matemático especializado sustenta a prática interpretativa do professor, que também é especializada e envolve assumir como ponto de partida as próprias produções dos alunos que revelam o que e como eles conhecem (Ribeiro, Policastro, Almeida, Caldatto, & Mellone, 2018). Esse conhecimento do professor fundamenta, portanto, o que o professor diz e faz, e como isso ocorre, em sala de aula; logo, para uma efetiva prática interpretativa é necessário o conhecimento matemático especializado, denominado de Conhecimento Interpretativo – CI (Di Martino *et al*., 2020; Jakobsen *et al*., 2014; Mellone *et al*., 2020). De acordo com a Enciclopédia Springer Nature, o CI é definido como:

> o conhecimento matemático amplo e profundo que permite aos professores apoiarem os alunos no desenvolvimento de seu próprio conhecimento matemático tendo como ponto de partida seus próprios raciocínios e produções, independentemente de serem não usuais ou incorretas. O CI complementa o conhecimento de erros típicos ou estratégias dos alunos, com o conhecimento de possíveis origens de erros típicos e atípicos e o conhecimento do uso dos erros como uma efetiva fonte de aprendizagem (Di Martino *et al*., 2020, p. 426).

O CI corresponde, portanto, ao conhecimento matemático especializado para a prática interpretativa, que entra em "jogo", essencialmente, quando o professor se depara com produções dos alunos que são incorretas ou não usuais, isso é, as que são matematicamente adequadas, porém desconhecidas pelo professor, o que requer um conhecimento mais elevado para entender a matemática que as sustenta. Além disso, quando a produção do aluno é não usual para o professor, indica que seu conteúdo não faz parte do denominado espaço solução do professor, que corresponde ao conjunto de elementos que cada indivíduo possui e mobiliza ao ter de resolver ou representar um determinado problema, o que se associa a seu conhecimento das formas de proceder e representar um tópico ou conceito matemático (Jakobsen *et al*., 2014).

Nota-se que o conteúdo do espaço solução relaciona-se diretamente com o conteúdo do conhecimento matemático especializado, e, por isso, ao desenvolver o conhecimento especializado do professor, seu espaço solução é ampliado. Uma demanda urgente é ampliar o espaço solução do professor, uma vez que, em geral, ele é composto por um único elemento (Jakobsen *et al*., 2014), o que significa que o professor conhece, tipicamente, uma única forma de proceder para resolver um problema, o que dificulta interpretar e atribuir significado às formas de pensar e proceder que estejam além desse elemento do seu espaço solução. Essa problemática implica diretamente em sua prática interpretativa e se associa a um nível inicial de CI, pois o professor ao se deparar com uma produção de aluno que expressa uma forma

ISSN 2764-3158

diferente de proceder da sua, sem um nível mais elevado de CI, terá dificuldades para a interpretar, podendo assumi-la como incorreta, apenas por ser diferente da sua própria forma de proceder, o que impactará no tipo e conteúdo de *feedback* que irá propor.

O *feedback* corresponde à forma de comunicação entre professor e aluno (Black & William, 1998). Quando o *feedback* contém orientações detalhadas (recorrendo, por exemplo, a questionamentos) que estimulam o aluno a analisar novamente sua produção para reformular raciocínios e aprimorar as estratégias utilizadas, esse *feedback* é do tipo construtivo e ultrapassa a mera avaliação de correto ou incorreto (Santos & Pinto, 2009), realmente auxiliando o aluno a desenvolver o seu entendimento matemático (Jakobsen *et al*., 2014). Contudo, propor *feedback* é difícil e de extrema complexidade (Santos & Pinto, 2009). Existem várias categorias de *feedback* (Galleguillos & Ribeiro, 2019) que não são considerados construtivos: (i) *feedback* sobre como resolver o problema; (ii) *feedback* confuso; (iii) contraexemplo como *feedback*; (iv) *feedback* superficial. O *feedback* sobre como resolver o problema, contém instruções indicando os procedimentos a serem seguidos pelos alunos (ensina a regra) para resolverem um problema específico; o *feedback* confuso, apesar de correto, é incompreensível para o aluno, ao conter orientações complexas demais; no contraexemplo como *feedback*, a orientação contém um exemplo explicativo do porquê a resolução do aluno está incorreta; e o *feedback* superficial contém uma orientação insuficiente, que não ajuda o aluno a entender seus erros.

Quando consideramos o conhecimento interpretativo, levamos em conta diferentes categorias de práticas interpretativas que formam parte desse conhecimento e se associam a níveis de conhecimento (Mellone *et al*., 2017): (i) interpretação avaliativa; (ii) interpretação para a prática letiva; (iii) interpretação como pesquisa.

A (i) interpretação avaliativa é aquela que o professor faz estabelecendo uma correspondência entre o seu modo de proceder e o do aluno, assumindo como incorreta toda produção que diferir da sua e, por isso, corresponde a um nível elementar de CI (nível 1). Um exemplo desse tipo de interpretação no âmbito da translação envolve o professor, ao se deparar com uma produção de aluno que efetua a translação considerando apenas a direção e sentido do vetor e desconsidera a componente comprimento, considerá-la como incorreta, instruindo ao aluno o que fazer para acertar o problema (no sentido de *saber fazer*) e apontando seu erro. Em relação à (ii) interpretação para a prática letiva, refere-se ao professor conceber a produção do aluno para rever seu planejamento e repensar sua prática futura, delineando um novo percurso para alcançar os objetivos de aprendizagens matemáticas. Nota-se que essa prática já se associa a um nível intermediário de CI (nível 2). Envolve, por exemplo, o professor ao se deparar com a mesma produção (translação desconsiderando o comprimento do vetor), considerá-la como parcialmente correta, buscando rever as tarefas (futuras) a serem propostas aos alunos, de modo a ultrapassar essa dificuldade – compreender o vetor de translação como um fundamento da translação – e erro associado. Na (iii) interpretação como pesquisa, o professor busca entender o porquê dos erros e das abordagens não usuais, fazendo das produções dos alunos uma fonte de pesquisa e de discussão matemática, independentemente se elas parecem ou não com o que é tradicionalmente ensinado na escola. Dessa forma, demanda que o professor detenha um conhecimento que lhe permita (re)ver sua própria formalização matemática, sendo que essa é uma prática fundamentada em um nível mais elevado de CI (nível 3). Nessa prática interpretativa, um exemplo a ser considerado inclui o professor, ao se deparar com a mesma produção (translação desconsiderando o comprimento do vetor), considerá-la também como parcialmente correta, porém, faz dessa produção uma fonte de pesquisa, almejando entender o raciocínio presente e os porquês matemáticos de os alunos apresentarem essa dificuldade comum e erro associado (o que o aluno ainda não conhece).

A interpretação como pesquisa é aquela que assumimos fundamental para uma

ISSN 2764-3158

transformação da prática matemática e entendimento dos alunos pelo que, idealmente, todos nós, professores, deveremos estar em condições de realizar, pois associa-se a que, após interpretar a produção do aluno, sejam tomadas decisões pedagógicas que de fato auxiliam o aluno a desenvolver seu entendimento matemático (Jakobsen *et al*., 2014), em uma perspectiva de escutar o Pensar dos alunos. Entretanto, como esse conhecimento não se desenvolve na prática de sala de aula – em uma perspectiva de mudança de nível –, ao longo dos anos de experiência (e.g., Ribeiro *et al*., 2013), são necessários contextos formativos com essa intencionalidade, assumindo uma abordagem sustentada na prática (Smith, 2001), tendo como objetivo desenvolver o Conhecimento Interpretativo.

O CI é um conhecimento matemático especializado; logo, não se trata de conhecimento pedagógico, tampouco corresponde à performance do professor (Ribeiro *et* al., 2018, Ribeiro, 2024). A performance do professor é sustentada em diferentes práticas – como é a interpretativa –, que, por sua vez, é sustentada no Conhecimento Interpretativo (Ribeiro, 2024).

3 Contexto e método

Este trabalho forma parte de uma investigação mais ampla que busca compreender que Conhecimento Interpretativo revelam e desenvolvem professores no âmbito das transformações geométricas isométricas e simetria, considerando para isso um contexto formativo, em que foram conceitualizadas e propostas Tarefas para a Formação – TpF (Ribeiro *et al.*, 2021), mais especificamente, as categorizadas em Tarefas Interpretativas – TI (Mellone *et al*., 2020). Participaram do contexto formativo – com nove encontros – 14 professores de matemática. Aqui, focamos a atenção em um desses encontros em que foi implementada e discutida uma TI no âmbito da translação. Os professores foram divididos em grupos de três ou quatro elementos (de diferentes etapas educativas e experiências profissionais) e a coleta das informações incluiu as produções escritas dos professores ao resolverem a TI e gravações áudio e vídeo das discussões nos pequenos grupos e da discussão coletiva – centrada na formadora.

A Tarefa Interpretativa foi conceitualizada e validada previamente à sua implementação no grupo CIEspMat[5] e estruturada em Parte Preliminar, Parte I e Parte II. Na Parte Preliminar se indagou os professores sobre o que é translação, visando aceder ao seu conhecimento associado à fenomenologia. A Parte I é composta por uma tarefa para o aluno em que se foca nos procedimentos para efetuar a translação (assumidos como parte de um algoritmo); as principais propriedades e fundamentos da translação (o vetor e o significado de cada uma de suas componentes – direção, sentido e comprimento –, e a congruência entre figura e imagem transladada, por se tratar de uma isometria). Nessa Parte I, incluem-se questões para o professor que pretendem, pela discussão associada, levá-lo a responder à tarefa para o aluno e desenvolver seu conhecimento especializado, focando as possibilidades de problematizações a serem discutidas com os alunos para o desenvolvimento da visualização geométrica – antecipar o resultado da transformação; as principais dificuldades de aprendizagens matemáticas dos alunos e que elementos matemáticos devem ser discutidos para as ultrapassar; e que respostas corretas e incorretas os alunos poderiam apresentar ao representarem a translação de uma determinada figura (a mesma a ser discutida na Parte II), com o intuito de antecipar as possíveis respostas. A Parte II (Figura 1) foca na atribuição de significado matemático e *feedback* construtivo a um conjunto de produções, contemplando diferentes raciocínios e formas de Pensar dos alunos para efetuar a translação na malha quadriculada, pois trata-se de um recurso que permite iniciar a discussão com os alunos sem o uso de instrumentos de desenhos. Aqui,

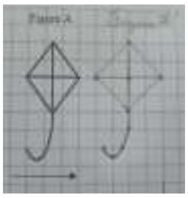
[5] O CIEspMat é um grupo de Pesquisa e Formação que desenvolve trabalhos focados no desenvolvimento do Conhecimento Interpretativo e Especializado do professor e futuro professor de e que ensina matemática – desde a Educação Infantil ao Ensino Médio. www.ciespmat.com.br

ISSN 2764-3158

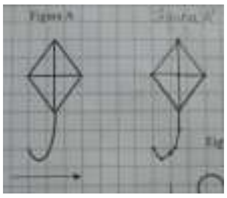
por motivos de espaço, focamos apenas uma dessas figuras e a produção de Paula associada.

Figura 1: Parte II de uma Tarefa Interpretativa no âmbito da translação

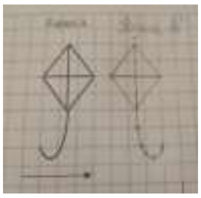
1. A professora Josi implementou na sua sala do 7.º ano C a tarefa anterior. Obteve algumas respostas distintas e como estava a participar de uma formação da responsabilidade do CIEspMat decidiu levar essas produções para a formação para discutir.



Producão da Paula



Producão da Laura



Producão da Maria

a) Para cada uma das produções, indique se as considera matematicamente corretas (adequadas) ou não, justificando o raciocínio matemático evidenciado.
b) Proponha um *feedback* construtivo às alunas (mais do que dizer se está correto ou incorreto ao professor cumpre atribuir significado às resoluções das alunas de modo a, posteriormente, auxiliar no desenvolvimento do seu conhecimento matemático).

Fonte: Arquivo da Pesquisa

A Parte Preliminar foi respondida individualmente, em seguida, em pequenos grupos os professores discutiram e responderam as Partes I e II, entregues separadamente, conforme respondiam, sendo orientados a registrar como resposta a síntese das discussões. Somente após todos terem terminado de responder a TI completamente (com tempo definido), foi efetuada a discussão coletiva das respostas, que ocorreu a partir da socialização das respostas dos grupos para validação matemática e pedagógica (ou não), por meio de indagações e reflexões com foco no objetivo de cada pergunta da TI, sendo que a sistematização da Parte Preliminar ocorreu apenas no final do contexto formativo, objetivando possibilitar que os professores reelaborassem as suas respostas pelo conhecimento desenvolvido.

Considerando a intencionalidade formativa de desenvolver o CI, cada uma das produções contidas na Parte II, apesar de serem matematicamente incorretas, foram incluídas com o propósito de os professores interpretarem – o que requer entender como o aluno pensou – e discutirem as principais dificuldades de aprendizagens matemáticas, levando em consideração o que sustenta os erros apresentados no âmbito da translação, bem como estabelecer uma perspectiva comparativa (elementos comuns e diferentes) entre elas, na busca de uma produção mais próxima e outra mais distante da resposta que cada um esperava na tarefa, discutindo se elas são matematicamente adequadas ou não, e os porquês que sustentam essa (in)adequação. A produção de Paula foi incluída com o intuito de direcionar a atenção para o conhecimento associado a compreender uma das propriedades da translação (congruência entre figura e imagem), uma vez que nessa produção a imagem não é congruente com a figura (Yanik & Flores, 2009). A produção de Laura foi incluída, pois possibilita discutir o vetor de translação enquanto um fundamento do tópico e erros associados ao não considerar suas componentes e a produção de Maria foi incluída para discutir algumas diferenças entre as transformações isométricas e quais são os elementos constituintes que permitem diferenciá-las.

Ao solicitar aos professores proporem um *feedback* a cada produção, objetivou-se situá-los no contexto de sua prática profissional futura, para que passem a propor um *feedback* construtivo, partindo do que e como o aluno revela conhecer expresso em suas produções.

A análise, aqui, foca as produções escritas dos grupos antes da discussão coletiva. Para essa análise consideram-se as categorias de CI definidas por Mellone *et al*. (2017): interpretação avaliativa; interpretação para a prática letiva; interpretação como pesquisa. As produções dos grupos foram transcritas *ipsis litteris* e, posteriormente, foram destacadas evidências de CI, identificando-se palavras-chave que permitissem evidenciar a validação (ou não) da matemática presente na produção, por exemplo: "incorreta", "parcialmente correta" e "correta". Cada evidência foi identificada com um código para o número do encontro (E1 a E9), especificando o grupo (G1 a G4) e a parte da TI (Parte Preliminar – P, Parte I – I e Parte II – II), terminado com a indicação da questão. Assim, como aqui focamos no encontro dois, uma evidência do Encontro 2, Grupo 1, Parte II, questão a) corresponde a E2G1IIa. A análise do conhecimento matemático revelado foi efetuada associada às categorias do MTSK, identificando o descritor resultante dessa análise por um acrônimo (por exemplo, KoTfa1 identifica o conhecimento de fenomenologia e aplicações) constituído pelas iniciais do subdomínio em questão, acrescido da(s) letra(s) representativa(s) da categoria associada e seguido de um número sequencial de acordo com a ordem em que aparece no texto. Nessa identificação, considera-se procedimentos (p); definições (d); propriedades (pp); fundamentos (f); fenomenologia e aplicações (fa); o papel da linguagem matemática adequada (la). Quando o conteúdo do conhecimento revelado foi considerado como matematicamente inadequado, os descritores associados foram identificados com o símbolo "*" após o código.

De forma associada a essa identificação as produções dos professores foram categorizadas considerando o conhecimento matemático especializado revelado e situadas nas categorias de práticas interpretativas, organizando-os em um quadro. Com esse duplo foco de atenção analítico (palavras-chave de interpretação e categorias do MTSK) estabeleceu-se uma correspondência entre o conteúdo do conhecimento matemático especializado revelado e os tipos de interpretação efetuados (para mais informações, ver Ribeiro, 2024). O *feedback* fornecido para a aluna também foi categorizado e relacionado com o conhecimento matemático especializado revelado e organizado em um quadro. Aqui, por motivo de espaço e por priorizarmos um foco em profundidade, discutem-se as respostas fornecidas por cada grupo para a produção de Paula, em uma perspectiva de integrar os elementos em comum e diferentes em relação à validação matemática efetuada e, em seguida, apresenta-se e discute a atribuição de significado à resolução da aluna – *feedback* proposto.

4 Análise e discussão

Considerando um panorama geral das respostas dos professores para a Parte Preliminar da TI, constata-se que utilizam o termo movimento para se referir ao que é a translação (associado a entender o fenômeno) sem especificar o que define esse movimento. Essa imprecisão relaciona-se a conhecer a translação de modo intuitivo e associado a um *saber fazer* e não a conhecer que a translação é entendida como uma operação efetuada com uma figura, a partir de um vetor translação, obtendo uma imagem congruente com a figura (KoTfa1).

Relativamente às respostas da Parte I, ao responderem à tarefa para o aluno, três dos quatro grupos de professores realizaram corretamente a translação, considerando todas as componentes do vetor de translação fornecido. Apesar de ser um tópico previsto de ser ensinado a partir do 7.º ano (Brasil, 2018), e, por isso, ser esperado que os professores pelo menos detenham um conhecimento associado a obter a resposta correta (*saber fazer* – nível do aluno), um dos grupos efetuou a translação, cometendo o mesmo equívoco que é comum aos alunos – desconsiderar a medida de comprimento do vetor de translação (Flores & Yanik, 2016) –, o que se associa a não conhecer que o vetor de translação é um dos fundamentos da translação (KoTf1). Esse mesmo grupo, ao determinar a direção, sentido e distância entre os pontos originais e seus transformados, inverteram a direção e o sentido em suas respostas, o que revela ausência de conhecer que direção é a inclinação de uma reta, de acordo com um determinado ângulo entre essa reta e o plano horizontal e sentido é a orientação da direção (KoTd1*).

Considerando a utilização de uma linguagem matemática adequada, observa-se, nas respostas de dois grupos, um conhecimento que leva ao uso inadequado de "tamanho" para se referirem aos elementos comuns entre figura e imagem na translação, o que se relaciona a conhecer que quando comparamos figura e imagem necessitamos considerar comparar medidas comparáveis (dimensões congruentes), ou seja, valores de medida de grandezas correspondentes na figura e na imagem obtida pela translação (KPMlm1*).

Sobre as principais dificuldades matemáticas dos alunos do 7.º ano ao resolver a tarefa (questão ii)), os professores elencaram entender direção e sentido, sendo que essas dificuldades identificadas nos alunos correspondem às reveladas pelos próprios professores e que a sua erradicação tem correspondência com conhecer que direção, sentido e módulo são propriedades de qualquer vetor que determina a transformação geométrica translação (KoTpp1*). Um grupo evidenciou que os alunos poderiam apresentar o erro de realizar ampliações na imagem transladada, o que se relaciona a conhecer que, na translação, não se efetua ampliações na imagem obtida, já que essa deve ser congruente com a figura (KoTpp2). Ao serem questionados que respostas incorretas os alunos podem apresentar ao representarem a translação da Figura A indicam, principalmente: (i) transladar a parte curva da figura, o que demanda conhecer que para transladar figuras (ou componentes de uma figura) curvas é necessário considerar alguma especificidade que permita mover essa componente de forma também otimizada, adicionando esses pontos especiais ao vetor de translação para obter a correspondente imagem (KoTp1); (ii) refletir a figura ao invés de transladar, envolvendo conhecer que o que diferencia reflexão de translação está associado fundamentalmente a que para efetuar a reflexão sempre necessitamos sair do plano e que a translação sempre se efetua no mesmo plano (KoTpp3); (iii) ampliar a imagem e utilizar escalas diferentes em diferentes partes da figura – que são duas dificuldades distintas, mas que se sustentam no mesmo conhecimento –, que se relaciona a conhecer que na translação figura e imagem são congruentes e que, portanto, aplicando o vetor da translação a todos os pontos da figura obtemos a imagem (KoTpp4).

Considerando as produções escritas referentes à produção de Paula (Parte II) apresenta-se e discute-se as evidências de conhecimento referente a validar a matemática presente na produção (questão a)), que foram categorizadas conforme as práticas interpretativas correspondentes e relacionadas ao conhecimento matemático que as sustenta (Quadro 1).

Quadro 1: Prática Interpretativa e conhecimento matemático revelado diante da produção de Paula

Evidências	Prática interpretativa	Conhecimento matemático
E2G1IIa. incorreta, pois não manteve a proporcionalidade da figura e alterando o formato (ponto no meio do quadrado).	Interpretação avaliativa: Interpretar como incorreta uma produção de aluno que ao transladar não mantém as medidas da figura na imagem, alterando seu formato e, ainda, indica na produção onde está o erro.	Conhecer que na translação a figura e a imagem são congruentes*.
E2G2IIa. Matematicamente está errado pois ela alterou as dimensões no sentido horizontal, não executou corretamente a curvatura da figura	Interpretação avaliativa: Interpretar como incorreta uma produção de aluno que ao efetuar a translação de uma figura altera suas dimensões em determinado sentido. Além disso, indica o erro na produção, em relação a parte curva da figura.	Conhecer que, na translação, não se alteram dimensões em nenhum sentido mesmo quando estão envolvidas componentes curvas.
E2G3IIa. a estudante compreendeu a proposta parcialmente, pois ajustou a distância	Interpretação equivocada: Interpretar como parcialmente correta uma produção de aluno que ajusta distâncias – amplia parte de uma figura – ao efetuar sua	Conhecer que, na translação de uma figura no contexto da malha quadriculada, não se altera a distância entre os

para que os pontos se encaixem na malha	translação, o que é matematicamente incorreto.	pontos da figura e os correspondentes na imagem, pois a translação é uma isometria – conserva distâncias*.
E2G4IIa. parcialmente correta, pois a estudante realizou corretamente o sentido e direção da figura original. No entanto, a distância ponto a ponto da figura original para a imagem de Paula, diverge em alguns pontos.	Interpretação avaliativa: Interpretar como parcialmente correta uma produção de aluno que realiza a translação, considerando corretamente o sentido e a direção da figura original, porém não considera algumas distâncias entre pontos correspondentes. Dessa forma, evidencia o erro na produção em não considerar as três componentes do vetor de translação, desconsiderando a medida de comprimento, mas foca no que o aluno já revela conhecer (para efetuar a translação deve-se considerar a direção e o sentido do vetor de translação).	Conhecer que na translação deve-se utilizar o sentido e a direção do vetor de translação, bem como a distância (para todos os pontos) da figura para obter os correspondentes na imagem*.

Fonte: Dados da Pesquisa

Os grupos (G1 e G2) consideraram a produção de Paula incorreta, enquanto os outros (G3 e G4) assumiram que estava parcialmente correta. Ainda assim, a interpretação efetuada pelos grupos 1, 2 e 4 caracteriza-se como uma interpretação avaliativa, pois apesar de identificarem na produção algum indício de possível entendimento da aluna (*realizou corretamente o sentido e direção* (E2G4IIa)), focam em descrever o erro evidenciado ou o que deveria ser realizado adequadamente (*alterou as dimensões* (E2G2IIa)), bem como o que faltou em termos de conhecimento relativo a manter a congruência entre figura e imagem (Kidder, 1976). Os professores (G1, G2 e G3) revelam conhecer que na translação o valor das medidas da figura é conservado na imagem, pois é uma transformação isométrica – conservam-se as distâncias e a amplitude dos ângulos (KoTpp5). Além disso, G4 identifica o erro na produção (*a distância ponto a ponto da figura original para a imagem de Paula, diverge em alguns pontos* (E2G4IIa)) e associa-o a desconsiderar a medida de comprimento do vetor (Flores & Yanik, 2016), bem com revelam conhecer que o vetor de translação e suas três componentes (direção, sentido e comprimento) devem ser consideradas para efetuar a translação (KoTf2). O G3 refere que a aluna (*compreendeu [...] parcialmente* (E2G3IIa)) ao considerar que a produção revela uma compreensão parcial de como se efetua a translação, realizando uma interpretação equivocada, uma vez que a produção é matematicamente inadequada, pois na translação não se pode ajustar a distância entre os pontos em nenhum contexto.

Diante da especificidade do conhecimento do professor, algumas problemáticas foram evidenciadas nas respostas fornecidas relativamente ao papel da linguagem matemática adequada, aos procedimentos e às propriedades no âmbito da translação. G1 utiliza inadequadamente o termo proporcionalidade para se referir ao erro da aluna de ampliar parte da figura (*não manteve a proporcionalidade da figura* (E2G1IIa)), sendo que o termo adequado seria congruência – conhecer que, na translação de uma figura, há a conservação dos valores das medidas para a imagem (KPMlm2). Como o objetivo da tarefa para o aluno não visava discutir os procedimentos utilizados na construção geométrica para efetuar a translação, a "perfeição" na parte curva destacada por G2 (*não executou corretamente a curvatura da figura* (E2G2IIa)) está associada à dificuldade em efetuar as transformações isométricas em figuras curvas, pela necessidade de escolher adequadamente os pontos a serem considerados para a transformação – conhecer que para efetuar a translação de uma figura curva se faz necessário considerar quais pontos fundamentais da figura, ou parte dela, que permitem minimizar a quantidade de procedimentos que consistem em adicionar o vetor de translação e obter os pontos correspondentes da imagem (KoTp2). G4 expressa que a figura possui sentido e direção (*realizou corretamente o sentido e direção da figura original* (E2G4IIa)), o que se trata de uma incorreção, pois essas são duas propriedades do vetor da translação – conhecer que o vetor da translação possui direção, sentido e comprimento que determinam a translação (KoTpp6).

As práticas interpretativas evidenciadas (G1, G2 e G4 – interpretação avaliativa e G3 – interpretação equivocada) e que se sustentam no conhecimento matemático estão associadas, por sua vez, a níveis distintos de Conhecimento Interpretativo (CI). O grupo que efetuou uma interpretação equivocada está situado no nível 0 de CI e os grupos que efetuaram uma interpretação avaliativa estão, portanto, situados no nível 1 de CI.

O nível de CI dos professores impactou, também, no tipo e conteúdo de *feedback* que foi proposto. G1 e G4 forneceram um *feedback* generalizado que não considera as especificidades de cada produção e tampouco se trata de um *feedback* construtivo como era solicitado (questão b)). Aqui, considera-se apenas o *feedback* proposto por G2 e G3 que trazem algumas especificidades associadas à produção de Paula.

Quadro 2: *Feedback* e conhecimento matemático revelado diante da produção de Paula

Evidências	***Feedback***	Conhecimento matemático
E2G2IIb. Perguntaria se a ~~figura~~ imagem manteve as dimensões da figura e por que?	*Feedback* superficial, pois considerar a congruência entre figura e imagem, não é suficiente para a aluna entender especificamente a translação.	Conhecer que uma propriedade da translação é a congruência entre figura e imagem.
E2G3IIb. indagar o aluno se a contagem de cada ponto da figura possuí quatro unidades a direita.	*Feedback* sobre como resolver o problema, pois indicam na produção o que deveria ser feito para manter a congruência entre figura e imagem ao utilizar a medida de comprimento do vetor.	Conhecer que a medida de comprimento do vetor da translação é a distância entre cada ponto da figura e seu correspondente na imagem.

Fonte: Dados da Pesquisa

O *feedback* fornecido (superficial) por G2 relaciona-se com o conhecimento matemático revelado, uma vez que foca apenas uma das propriedades da translação (*imagem manteve as dimensões da figura* (E2G2IIb)), o que não contribui para que a aluna entenda que na translação (e em todas as isometrias) figura e imagem sempre são congruentes, inclusive para generalizar esse entendimento para todas as translações. Apenas com esse *feedback* a aluna não entenderá o porquê de sua produção estar matematicamente inadequada. Em relação ao conhecimento matemático revelado pelo G3, apesar de focar na medida de comprimento do vetor de translação (*a contagem de cada ponto da figura possuí quatro unidades a direita* (E2G3IIb)), também, não permite generalizar o entendimento do tópico e associa-se a uma prática instrutiva, fornecendo um *feedback* sobre como resolver o problema, direcionada a *saber fazer*, no sentido de ensinar a aluna como "aplicar a regra" a um determinado problema, notadamente em que a medida de comprimento do vetor corresponde a quatro unidades.

A mudança do tipo de *feedback* que foi proposto para um *feedback* que seja de fato construtivo, é maximizada pelo desenvolvimento do conhecimento matemático especializado – CI – que sustenta interpretar a produção do aluno, para além dos erros, dificuldades associadas ou estratégias não usuais e propicia a realização de uma prática interpretativa como pesquisa.

ISSN 2764-3158

5 Considerações finais

Ao resolverem uma Tarefa Interpretativa com foco no desenvolvimento do Conhecimento Interpretativo no âmbito da translação, os professores revelam um conhecimento matemático especializado associado a procedimentos, propriedades, fundamentos, definições, fenomenologia e ao papel da linguagem matemática adequada, sendo algum desse conhecimento correto e outro nem tanto. Esse conhecimento sustenta uma prática interpretativa avaliativa (Mellone *et al*., 2017) – que corresponde ao nível 1 de conhecimento interpretativo –, associada a um foco no erro dos alunos (Ribeiro, 2024) e a um *feedback* superficial ou sobre como resolver um problema (Galleguillos & Ribeiro, 2019), relacionado a uma prática instrutiva (Mellone *et al*., 2017), que não tem por objetivo desenvolver o entendimento dos alunos associado a um Pensar matemático que permite generalizar os procedimentos da translação, ou suas principais propriedades e fundamentos.

Em três dos quatro grupos, os professores mostram conhecer como efetuar uma translação, revelando conhecer um conjunto de procedimentos a serem utilizados e um dos grupos revela não conhecer os fundamentos da translação (figura, vetor de translação e imagem). Referente ao que significa a medida de comprimento do vetor de translação (distância entre todos os pontos da figura e seus correspondentes da imagem), o que se associa um *saber fazer* matematicamente inadequado – falta de correspondência entre o que se questiona na tarefa e o que se responde –, efetuando a translação como um movimento indefinido, ao desconsiderar (incorretamente) a medida de comprimento do vetor como se explicitava na tarefa.

Os professores revelaram que conseguem identificar o erro nas produções dos alunos, o que se associa a um conhecimento interpretativo que sustenta a prática avaliativa, mas não fazem desse erro uma fonte de aprendizagem (Borasi, 1987), ou seja, como uma oportunidade – ponto de partida – para discutir o que e como os alunos revelam conhecer para desenvolver seu conhecimento, e buscam ensinar o que deveriam fazer para acertar o problema, o que não é suficiente para desenvolver o conhecimento matemático dos alunos. Assim, apesar de revelarem um conhecimento matemático que permite antecipar as principais dificuldades de aprendizagens matemáticas dos alunos em uma tarefa não usual (para eles), não propuseram um *feedback* que contribua para auxiliar o aluno a desenvolver o seu conhecimento matemático a partir das suas próprias dificuldades e erros cometidos. Somente um nível mais elevado de conhecimento interpretativo, e de conhecimento especializado que o sustente, permitirá que os professores passem a propor esse *feedback* construtivo. A formação de professores (inicial e continuada) necessita, portanto, considerar a prática do professor como central nas discussões e o conhecimento que a fundamenta, especificamente, em tópicos da geometria, para desenvolver o conhecimento matemático especializado e interpretativo.

Em uma perspectiva de continuidade em investigar o conhecimento do professor de matemático, almejando compreender suas especificidades para desenvolvê-lo, algumas questões ainda em aberto e que necessitam ser discutidas são:

(i) Que Conhecimento Interpretativo os professores desenvolveram após as discussões coletivas? Como isso se relaciona com o desenvolvimento do conhecimento matemático especializado em cada tópico foco da discussão?
(ii) Que categoria de *feedback* os professores passaram a propor ao longo do contexto formativo? Houve mudança de categoria de *feedback*?

Agradecimentos: O presente trabalho é parte dos projetos de pesquisa financiado pelo CNPq (317937/2023-5) e (404959/2021-0).

ISSN 2764-3158

Referências

Black, P., & Wiliam, D. (1998). Assessment and classroom learning. *Assessment in Education: Principles, Policy & Practice, 5*(1), 7–74.

Borasi, R. (1987). Exploring mathematics through the analysis of errors. *For the learning of Mathematics*, *7*(3), 2-8.

Brasil. (2018). *Base Nacional Comum Curricular*: Educação é a base. Brasília, DF: Ministério da Educação.

Carrillo, J., Climent, N., Montes, M., Contreras, L. C., Flores-Medrano, E., Escudero-Ávila, D., Vasco, D., Rojas, N., Flores, P., Aguilar-Gonzáles, A., Ribeiro, M., & Muñoz-Catalán, C. (2018). The mathematics teacher's specialised knowledge (MTSK) model. *Research in Mathematics Education, 20*(3), 236-253.

Coxeter, H. S. M., & Greitzer, S. L. (1967). *Geometry Revisited*. The Mathematical Association of America. Washington, DC.

Di Martino, P., Mellone, M., & Ribeiro, M. (2020). Interpretative knowledge. In: Stephen Lerman. (Org.). *Encyclopedia of Mathematics Education. 1ed.: Springer International Publishing*, 424-428.

Flores, A., & Yanik, H. B. (2016). Geometric Translations: An Interactive Approach Based on Students' Concept Images. *North American GeoGebra Journal*, *5*(1).

Galleguillos, J., & Ribeiro, M. (2019). Prospective mathematics teachers' interpretative knowledge: focus on the provided feedback. In *Proceedings CERME 11*. Utrecht, Netherlands.

Gomes, A. (2012). Transformações geométricas: conhecimentos e dificuldades de futuros professores. In Pinto, H., Jacinto, H., Henriques, A., Silvestre, A. & Nunes, C. (Orgs.), *Atas do XXIII SIEM* (pp. 233-244). Lisboa: Associação de Professores de Matemática.

Jakobsen, A., Ribeiro, C. M., & Mellone, M. (2014). Norwegian prospective teachers' MKT when interpreting pupils' productions on a fraction task. *Nordic Studies in Mathematics Education, 19*(3-4), 135-150.

Jones, K. (2020). *Re-imagining geometry education in schools* (pp. 31-38). WTM-Verlag.

Kidder, F. R. (1976). Elementary and middle school children's comprehension of Euclidean transformations. *Journal for Research in Mathematics Education*, *7*(1), 40-52.

Lima, E. L. (1992). *Coordenadas no plano:* geometria analítica, vetores e transformações geométricas (2.ed.). Rio de Janeiro: GRAFTEX Comunicação Visual.

Mason, J.; Johnston-Wilder, S. (2006). *Designing and using mathematical tasks*. St Albans: Tarquin.

Mellone, M., Ribeiro, M., Jakobsen, A., Carotenuto, G., Romano, P., & Pacelli, T. (2020). Mathematics teachers' interpretative knowledge of students' errors and non-standard reasoning. *Research in Mathematics Education*, *22*(2), 154-167.

Mellone, M., Tortora, R., Jakobsen, A., & Ribeiro, M. (2017). Prospective teachers interpret student responses: Between assessment, educational design and research. In *Proceedings CERME 10*. Dublin, Ireland.

Moyer, J. C. (1978). The relationship between the mathematical structure of Euclidean transformations and the spontaneously developed cognitive structures of young children.

Journal for Research in Mathematics Education, 9(2), 83-93.

Nye, B., Konstantopoulos, S., & Hedges, L. V. (2004). How large are teacher effects?. *Educational evaluation and policy analysis, 26*(3), 237-257.

Ribeiro, C. (2010). A prática de uma professora e seus objectivos: percursos e (in) alterações. *Actas do XXI SIEM* (pp. 60-71).

Ribeiro, C. M., Mellone, M., & Jakobsen, A. (2013). Characterizing prospective teachers' knowledge in/for interpreting students' solutions. In *Proceedings PME 37* (Vol. 4, pp. 89-96). Kiel: PME.

Ribeiro, M. (2024). Conhecimento interpretativo de futuros professores da Educação Infantil e dos Anos Iniciais ao atribuírem significado a produções de alunos no contexto de abordagens alternativas ao algoritmo típico da subtração. *Debates em Educação*, *16*(38), e16020-e16020.

Ribeiro, M., Almeida, A., & Mellone, M. (2021). Conceitualizando tarefas formativas para desenvolver as especificidades do conhecimento interpretativo e especializado do professor. *Perspectivas da Educação Matemática*, *14*(35), 1-32.

Ribeiro, M., Policastro, M. S., Almeida, A., Caldatto, M. E., & Mellone, M. (2018). Conhecimento Interpretativo e especializado do professor de e que ensina matemática: uma discussão articulada em contextos de formação. *Anais do VII (SIPEM)*. Foz do Iguaçu: SBEM.

Ribeiro, M., & Silva, C. (2024). Especificidades do Conhecimento Interpretativo do professor e das Tarefas para a Formação como elementos para práticas criativas e matematicamente inovadoras. *Revista Ibero-Americana de Estudos em Educação*, 19(n. esp. 2), e024073–e024073.

Santos, L., & Pinto, J. (2009). Lights and shadows of feedback in mathematics learning. In M. Tzekaki, M. Kaldrimidou & H. Sakonidis (Eds.), *Proceedings of PME 33* (Vol. 5, pp.49–56). Thessaloniki: PME.

Silva, C., & Ribeiro, M. (2023). Relações Teóricas entre o Mathematics Teacher's Specialised Knowledge e o Conhecimento Interpretativo. In *Actas del VI CIMTSK* (pp. 320-327). Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.

Smith, M. S. (2001). *Practice-based professional development for teachers of mathematics*. Reston VA: NTCM.smuth

Thaqi, X., Giménez, J., & Rosich, N. (2011). Geometrical transformations as viewed by prospective teachers. In *Proceedings CERME 11* (pp. 578-587). Rzeszow. Poland.

Yanik, H. B., & Flores, A. (2009). Understanding rigid geometric transformations: Jeff's learning path for translation. *The Journal of Mathematical Behavior*, *28*(1), 41-57.

ISSN 2764-3158