

Da Integral de Riemann à Integral de Lebesgue: um estudo alicerçado na Pesquisa Baseada em Design

From the Riemann Integral to the Lebesgue Integral: Contributions of the Design-Based Research Methodology

Ismael Batista Maidana Silvestre¹
Vanilde Bisognin²

Resumo: Esse trabalho teve por objetivo investigar como os licenciandos de um curso de Licenciatura em Matemática, que cursam o último ano, compreendem o conceito de Integral de Riemann, suas limitações e a necessidade de um novo conceito, como o da Integral de Lebesgue, tendo como referencial teórico o Pensamento Matemático Avançado (PMA). Como metodologia de pesquisa, utilizamos a Pesquisa Baseada em Design (PBD). Foi proposto e aplicado um produto educacional construído a partir de princípios de design definidos preliminarmente. As análises foram feitas sobre as produções dos estudantes de uma turma de Análise Matemática. Os resultados evidenciaram que os princípios foram validados no decorrer da aplicação e que o produto educacional, contribuiu para a compreensão dos conceitos.

Palavras-chave: Integral de Riemann. Integral de Lebesgue. Imagem e Definição do Conceito. Pesquisa Baseada em Design.

Abstract: This work aimed to investigate how students in a Mathematics degree program, who are in their final year, understand the concept of the Riemann Integral, its limitations, and the need for a new concept, such as the Lebesgue Integral, using Advanced Mathematical Thinking (AMT) as the theoretical framework. As the research methodology, Design-Based Research (DBR) was used. An educational product built from previously defined design principles was proposed and applied. The analyses were conducted on the productions of students from a Mathematical Analysis class. The results showed that the principles were validated and that the educational product contributed to the understanding of the concepts.

Keywords: Riemann Integral. Lebesgue Integral. Image and Definition of the Concept. Design-Based Research.

1 Introdução

O ensino e aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral e Análise Real tem sido um problema nos cursos de graduação da área de ciências exatas segundo Nasser (2007), Reis (2009), Rasmussen, Marrongelle e Borba (2014), Pagani e Allevato (2014), Sousa (2015), entre outros. Dentre os tópicos apontados nas pesquisas, que trazem preocupações aos educadores matemáticos, está o de Integral de Riemann. Entre as principais causas das dificuldades estão as relacionadas com o desinteresse dos alunos, a falta de conhecimentos prévios, a necessidade de representação geométrica e a associação com o registro algébrico, a prática pedagógica do professor, a transição do pensamento elementar para o pensamento avançado em matemática, pouco uso de recursos tecnológicos, a falta de conexões entre os conteúdos e aplicabilidade, entre outras.

¹ Universidade Franciscana • Santa Maria, RS — Brasil • ✉ ismael.silvestre@ufn.edu.br • ORCID <https://orcid.org/0009-0001-7215-0097>

² Universidade Franciscana • Santa Maria, RS — Brasil • ✉ vanilde@ufn.edu.br • ORCID <https://orcid.org/0000-0001-5718-4777>

Evidências relacionadas às dificuldades dos alunos em relação ao tópico de integral de Riemann são vistas nas provas do Exame Nacional de Desempenho de Estudantes (Enade) de 2005 a 2021, junto ao Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP). O quadro a seguir apresenta o desempenho dos estudantes dos Cursos de Licenciaturas avaliados em questões sobre Integral de Riemann, considerando todo o país em que é destacado o índice de facilidade das questões, considerando o percentual de acertos.

Quadro 1 - Índice de Facilidade e classificação de questões sobre Integral de Riemann nas provas do Enade

Ano	Questão	Índice de Facilidade	Classificação
2005	26	Entre 0,16 e 0,40	Difícil
2008	19	0,26	Difícil
2011	17	0,22	Difícil
2014	10	0,30	Difícil
2017	9	0,25	Difícil
	23	0,22	Difícil
2021	Não Teve	-	-

Fonte: Autoria própria, com base nos relatórios SINAES.

Pelos resultados apresentados no quadro anterior, todas as questões foram classificadas como difíceis. Esse fato enfatiza as dificuldades que os estudantes de Licenciatura em Matemática têm em relação ao conteúdo de Integrais de Riemann.

Os reflexos das dificuldades dos estudantes nas disciplinas de Cálculo são sentidos na disciplina de Análise Matemática quando é exigida dos alunos a passagem do pensamento elementar para o pensamento avançado. Isso é corroborado por Pinto (1998) quando afirma:

O ensino de Análise Matemática tem demonstrado ser uma tarefa difícil. Estando no centro vital da transição dos estudantes do pensamento elementar para o pensamento avançado em Matemática, demandas conceituais são colocadas aos estudantes, como aquelas preocupadas com definições formais e prova formal. (Pinto, 1998, p. 293)

Outro ponto que está relacionado com o conceito de Integral de Riemann é a limitação em termos da classe de funções que pode ser integrável à Riemann. E nessa mesma linha, a existência de outros conceitos de integração, como o de Integral de Lebesgue. Apresentar a evolução conceitual do tema, além de mostrar aos estudantes que existem conceitos mais fortes do ponto de vista de integração, pode auxiliar na concepção de que a matemática não é uma ciência pronta, acabada, mas que pelo contrário, está em constante evolução. Essa concepção da matemática em evolução é discutida por muitos autores, dentre eles Lakatos (1976), Davis, Hersh e Marchisotto (2012).

Diante das ideias anteriores, delineamos o seguinte objetivo: investigar como os licenciandos compreendem o conceito de Integral de Riemann, suas limitações e a necessidade de um novo conceito, como o da Integral de Lebesgue, tendo como base teórica o pensamento matemático avançado.

Nesse trabalho descrevemos resultados de uma pesquisa que trata dos conceitos de Integral de Riemann e de Integral de Lebesgue, mostrando as limitações da primeira e a necessidade do segundo conceito. Utilizamos como referencial teórico o PMA com a classificação proposta por Domingos (2003) e a metodologia de Pesquisa Baseada em Design, segundo Plomp (2007).

2 Pensamento Matemático Avançado e a Teoria de Imagem do Conceito e Definição do Conceito

Segundo Tall (2002), o pensamento utilizado por matemáticos profissionais em suas produções, geralmente usando representações mentais de definições, teoremas e axiomas, para mostrar a validade de certas propriedades, ou então o pensamento dos estudantes quando se deparam com a matemática axiomática, é chamado de pensamento matemático avançado. Portanto, o pensamento matemático avançado ocorre quando se considera a matemática formal, abstrata, em que a essência está nas propriedades dos objetos que são elaboradas a partir da sua definição, inspirado em imagens conceituais, formalizado por definições conceituais e deduções lógicas.

A proposição de atividades que possam desenvolver imagens conceituais, favorecendo a aprendizagem de um conceito de forma sólida, poderá promover dentre outros aspectos, o desenvolvimento de características do PMA. Para Tall (2002), o PMA envolve a habilidade de construir representações mentais que permitem aos matemáticos explorar e compreender conceitos abstratos de forma profunda e flexível.

O termo imagem do conceito é assim usado para descrever a estrutura cognitiva total associada ao conceito e que inclui todas as imagens mentais (conjunto de todas as imagens que alguma vez foram associadas com o conceito), todas as propriedades e todos os processos que lhe estão associados. Por definição do conceito entende-se que a definição verbal explica o conceito de modo exato e de uma forma não circular (Vinner, 1983, p. 239). O conhecimento da definição não nos garante a compreensão do conceito, para isso, precisamos formar imagem significativa do conceito (Vinner, 1991).

Domingos (2003), em sua tese, procurou caracterizar a compreensão dos conceitos matemáticos de estudantes do início do Ensino Superior relacionados com os conteúdos: sucessões; funções; cálculo diferencial e integral. O autor utilizou várias teorias sobre a construção dos conceitos matemáticos para categorizar as imagens dos conceitos manifestados pelos participantes em imagem do conceito incipiente, imagem do conceito instrumental e imagem do conceito relacional. A imagem do conceito no nível incipiente se aproxima da matemática elementar e a imagem do conceito relacional, das características da matemática avançada.

No Quadro 2, são destacadas algumas características em relação aos termos: *objetos*, *processos*, *tradução entre representações*, *propriedades* e *pensamento proceitual*, para cada um dos níveis.

Quadro 2 - Principais características de cada nível

	Incipiente	Instrumental	Relacional
Objetos	• Elementares; • As ações realizadas sobre os objetos não conduzem a processos possíveis de encapsular nos objetos que representam o conceito.	• Há uma variedade de objetos elementares, mas com pouca interiorização e coordenação; • Objetos são interiorizados em processos que não são encapsulados.	• Os conceitos assumem o estatuto de objetos matemáticos; • Os objetos são obtidos por <i>reificação</i>³; • Os objetos são encarados como <i>proceitos</i>.

³ Sfard (1991) diz que *reificação* é o processo cognitivo pelo qual uma sequência de operações ou ações é transformada em um conceito que pode ser manipulado como um todo. Esse processo permite aos aprendizes pensar sobre um conceito matemático como uma entidade completa e independente, em vez de apenas uma série de ações ou processos.

Processos	• Manifestação de ventriloquismo; • Processos baseados na automatização de procedimentos; • Processos interiorizados de nível elementar.	• Processos interiorizados e condensados; • Coordenação de processos que por vezes resultam na criação de objetos; • Dificuldades em realizar processos envolvendo objetos abstratos.	• Os processos mais utilizados resultam do descapsular de objetos; • Os processos realizados sobre objetos mais elementares são coordenados e capsulados em novos objetos.
Tradução entre Representações	• Baseada em procedimentos muito elementares para o nível de ensino; • As representações entre as quais é feita a tradução não são objetos matemáticos; • As traduções são quase sempre incompletas.	• Baseada em processos repetitivos; • Baseada em procedimentos interiorizados; • É feita de modo operacional; • As traduções simbólicas são quase sempre incompletas.	• Traduções simbólicas dos conceitos; • Tem por base objetos que são descapsulados; • Há um predomínio de aspectos estruturais em detrimento dos aspectos operacionais; • Fluidez na tradução entre representações.
Propriedades	• Manifestação de ventriloquismo; • Memorização.	• Propriedades elementares usadas com compreensão; • São estabelecidas de modo operacional.	• São enunciadas com compreensão; • São usadas de forma estrutural.
Pensamento Proceitual	• Símbolos que apenas representam o conceito de forma parcial; • Uso parcial do <i>proceito</i> destacando apenas a sua componente processual; • Símbolos desprovidos do significado esperado; • Componentes processual e conceitual do conceito desligadas uma da outra.	• No pensamento <i>proceitual</i>, destacam a sua componente processual; • Os conceitos mais complexos têm uma tradução simbólica incompleta; • Memorização de algumas sequências de símbolos; • Uso de <i>proceitos</i> em algumas partes da tradução simbólica de conceitos.	• É possível traduzir simbolicamente os conceitos; • Os símbolos são usados como <i>proceitos</i>; • No pensamento <i>proceitual</i> é possível observar as componentes processual e conceitual em interação.

Fonte: Autoria própria, adaptado de Domingos (2003).

Essa classificação é uma forma de analisar as atividades desenvolvidas pelos estudantes e, a partir dos resultados, concluir se as atividades propostas e a metodologia empregada foram capazes de promover a manifestação de indícios de PMA.

3 A Metodologia de Pesquisa Baseada em Design

Na PBD estudam-se intervenções educacionais, tendo em vista promover certas aprendizagens ou mudanças sistêmicas e compreender os processos que lhes estão subjacentes (Cobb, Confrey, Disessa, Lehrer e Schaube, 2003; Gravemeijer e Cobb, 2013). A PBD assume que o conhecimento não se localiza nas pessoas consideradas como indivíduos, mas antes constitui um processo que envolve a pessoa que conhece o contexto em causa e a atividade em que esta participa. (Barab e Squire, 2004)

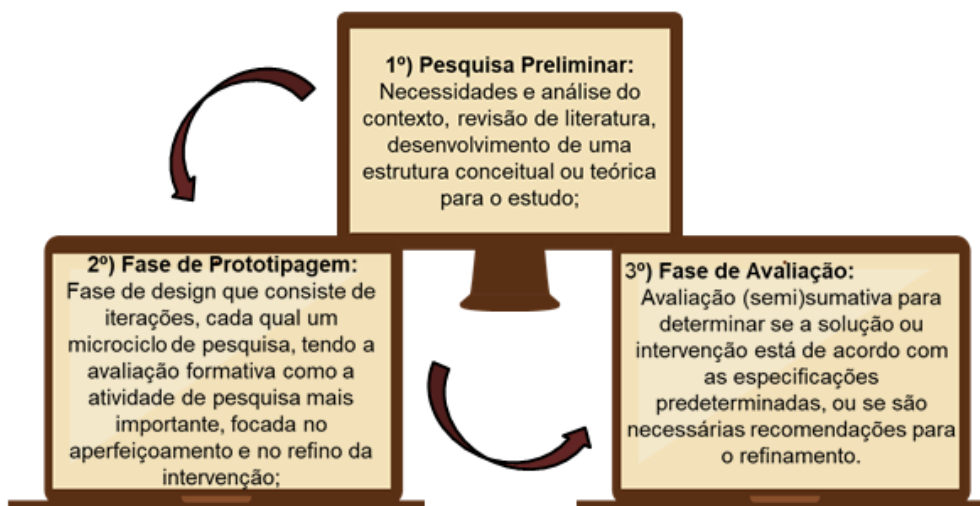
Autores como Cobb, Jackson e Dunlap (2015) sugerem que a PBD se caracteriza por cinco aspetos fundamentais: 1) incide sobre os problemas que se colocam aos profissionais (professores ou formadores) no seu trabalho de ensino, procurando promover a aprendizagem dos alunos ou de formação dos professores; 2) é baseada em intervenções, para transformar

processos que ocorrem no mundo real; 3) tem simultaneamente uma forte orientação teórica e pragmática; 4) envolve testar e, se necessário, rever ou rejeitar conjecturas sobre os processos de aprendizagem dos participantes e os meios de os promover; e, 5) dada a sua preocupação teórica, visa a generalidade.

Segundo Plomp (2007), um aspecto fundamental da PBD é a concepção de um grupo de colaboração (profissionais, pesquisadores, gestores entre outros). Com base na literatura e em pesquisas anteriores, os pesquisadores em colaboração com o grupo desenvolvem intervenções viáveis (caráter de praticidade) e eficazes, estudando e refletindo cuidadosamente sobre as sucessivas versões (ou protótipos) de intervenções em seu contexto-alvo com a intenção de gerar produtos utilizáveis e princípios de design.

Independente do propósito da PBD, o processo de pesquisa sempre incorpora processos de desenho sistemático de elaboração, na forma de ciclos. Os pesquisadores podem divergir em alguns detalhes na PBD, mas todos são unânimes no entendimento de que ela é composta de fases. No caso da PBD como pesquisa de desenvolvimento, Plomp (2018) sugere que as fases ocorram de acordo com o esquema da Figura 1.

Figura 1 - Fases da Pesquisa Baseada em Design



Fonte: autoria própria, adaptado de Plomp (2018).

Com base na teoria e em estudos prévios, ou seja, na literatura científica, que chamaremos de T_1 , os pesquisadores elaboram a versão inicial do produto educacional, o protótipo 1, P_1 . Esse, utilizado e submetido à análise crítica, gera novos entendimentos teóricos, T_2 . Com esse incremento nos entendimentos teóricos, é feito o refinamento/redesenho do protótipo P_1 gerando o protótipo P_2 , e assim sucessivamente.

$$T_1 \rightarrow P_1 \rightarrow T_2 \rightarrow P_2 \rightarrow \dots \rightarrow T_{n-1} \rightarrow P_{n-1} \rightarrow \begin{cases} T_n \\ P_n \end{cases}$$

Os ganhos teóricos T_n (princípios de design) não devem ser vistos como regras, nem o sucesso como garantido. Para representar essa generalização como declarações heurísticas, Van den Akker (1999) desenvolveu o seguinte modelo:

Se você quiser projetar a intervenção X para o propósito/função Y no contexto Z, então é melhor você dar a essa intervenção as características A, B e C (ênfase

substantiva), e fazer isso por meio dos procedimentos K, L e M (ênfase procedimental), por causa dos argumentos P, Q e R. (Van den Akker, 1999, p. 9)

Corroboramos com a visão/discurso da necessidade de intervenções com origem na prática e para a prática. E para que isso seja possível, não visualizamos outra possibilidade, sem o envolvimento de quem está na sala de aula. Essas intervenções que pesquisadores envolvidos em PBD buscam, são de alta qualidade, que tenham validade teórica, que tenham efetividade e sejam práticas (praticidade).

4 Procedimentos Metodológicos

O presente trabalho foi desenvolvido em uma abordagem qualitativa, seguindo a metodologia de PBD, detalhada na seção anterior. As atividades foram organizadas em três unidades, tendo como objetivo a construção dos conceitos: de Integral de Riemann (Unidade 1); de Primitivas (Unidade 2); e o conceito de Integral de Lebesgue (Unidade 3). No Quadro 3 é apresentada uma breve descrição de cada uma dessas unidades.

Quadro 3 – Descrição do que foi trabalhado em cada unidade

	Objetivo	O que foi feito?
Unidade 1 - Integral de Riemann	- Construir o conceito de Integral de Riemann; - Mostrar que existem funções que não são integráveis à Riemann; - Evidenciar a existência de outros conceitos de integração, como o de Lebesgue.	- A atividade 1.1 procura mostrar as limitações da geometria plana no cálculo de áreas; - Nas atividades 1.2 à 1.6, é feita a construção do conceito de integral de Riemann; - Nas atividades 1.7 e 1.8, os estudantes se depararam com funções que são e outras que não são integráveis à Riemann.
Unidade 2 - Primitivas	- Construir o conceito de Primitivas; - Mostrar que existem funções que possuem, ou não, primitivas e que são, ou não, integráveis à Riemann.	- Na atividade 2.1 é feito a construção do conceito de Primitiva; - As atividade de 2.2 à 2.5 procuram mostrar aos estudantes que existem funções que possuem, ou não, primitivas e que são, ou não, integráveis à Riemann e ainda, sob quais condições uma função possui primitiva; - Na atividade 2.6 é feita prova do Teorema Fundamental do Cálculo (TFC); - Nas atividades 2.7 e 2.8 são abordadas funções em que o TFC pode ou não ser utilizado para o cálculo de área.
Unidade 3 - Integral de Lebesgue	- Construir o conceito de integral de Lebesgue; - Mostrar que o conceito de integral de Lebesgue integra uma classe maior de funções do que o de Riemann.	- A atividade 3.1 procura mostrar a ideia utilizada na construção do conceito da integral de Lebesgue; - Nas atividades 3.2 à 3.4, é feita a construção do conceito de integral de Lebesgue; - Nas atividades 3.5 à 3.8, os estudantes se depararam com funções são integráveis a Lebesgue e não à Riemann e outras integráveis tanto a Riemann quanto a Lebesgue.

Fonte: autoria própria.

Num primeiro momento foi constituído o grupo de colaboração, envolvendo pesquisador, professores e aluno bolsista do curso de Licenciatura em Matemática de um Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia em que a pesquisa foi desenvolvida.

Desde então, o grupo tem feito encontros quinzenais, normalmente utilizando o *Google Meet*. Nesses encontros são feitos estudos sobre a metodologia de PBD, trabalhos de colaboração na construção e aplicação desse protótipo, além de outras atividades em temas específicos que são problemáticos no curso de Licenciatura em Matemática.

Para a construção do produto educacional, na fase de pesquisa preliminar, fizemos a análise do problema, revisão de literatura e levantamento de alguns princípios de design iniciais. Esses princípios foram, preliminarmente, assim definidos: 1) atividades organizadas envolvendo recursos tecnológicos facilitam a compreensão dos conceitos de Integral de Riemann e de Lebesgue; e, 2) atividades que possibilitam a busca por padrões, abstrações e generalizações, tendo a noção de área como raiz cognitiva para o ensino de Integral de Riemann.

Na fase de prototipagem, foram elaboradas oito atividades para cada uma das unidades, conforme descritas no Quadro 3. Em cada uma das atividades, assim como no escopo geral de cada Unidade, procuramos considerar os princípios 1 e 2, acreditando que a partir deles pudéssemos elaborar boas atividades que possibilitassem a compreensão dos conceitos envolvidos. As atividades estão validadas com base na revisão de teses e dissertações com os temas de estudo, além de livros usualmente utilizados no ensino de Análise Matemática e Cálculo, além da experiência profissional dos colaboradores do grupo de pesquisa.

O produto educacional foi pensado para ser aplicado durante três semanas na disciplina de Análise Matemática que dispõe de 4h semanais e faz parte do último semestre do curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal Farroupilha – Campus Alegrete. Os discentes já tinham estudado os conceitos de integral de Riemann e Primitivas na disciplina de Cálculo II. A aplicação ocorreu no formato presencial e com pouca interferência do pesquisador, considerando as características das atividades e priorizando a independência dos estudantes na construção dos conceitos.

As atividades foram aplicadas entre novembro e dezembro de 2023 e participaram do estudo cinco estudantes matriculados na disciplina de Análise Matemática do curso de Licenciatura em Matemática do Instituto Federal Farroupilha – Campus Alegrete, os quais foram divididos em duas duplas e um realizou as atividades individualmente, identificadas como D1, D2 e E1. A coleta de dados se pautou na produção escrita dos participantes, obtida a partir da aplicação das atividades das três unidades.

Na fase de avaliação, as resoluções dos estudantes foram analisadas tendo como base o aporte teórico do PMA e seguindo a classificação proposta por Domingos (2003) em três níveis: Incipiente, Instrumental e Relacional. No próximo tópico, são detalhadas as respectivas resoluções apresentadas pelos participantes para algumas atividades consideradas “chaves”, do ponto de vista conceitual, ou seja, atividades que exigem a manifestação das imagens dos conceitos Integral de Riemann e Integral de Lebesgue, acompanhadas de discussões e de reflexões suscitadas a partir delas.

5 Análise dos Dados

A Unidade 1 teve como objetivo a construção do conceito de Integral de Riemann, conectando com a ideia de cálculo de áreas, e também da construção do conceito a partir do limite das somas de Riemann. A partir disso, se estudou as condições de integrabilidade de funções e as limitações do conceito.

As atividades 1.7 e 1.8, constantes da Unidade 1, tratam de verificar se os estudantes compreenderam de fato o conceito de Integral de Riemann. Na Figura 2 é possível visualizar a resposta de E1 para a atividade 1.7.

Figura 2 - Resposta do estudante E1 para a atividade 1.7

Atividade 1.7: A função $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ a seguir é Riemann Integrável? Justifique sua resposta.

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{se } x \in \mathbb{Q} \\ 0, & \text{se } x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q} \end{cases}$$

NÃO! pois analisando vemos que a $\alpha(p) = 0$ e a $\beta(p) = 1$
Portanto o Limite da soma superior é diferente do limite
da soma inferior.

Fonte: autoria própria.

A resposta apresentada mostra que se trata de uma imagem relacional porque, em relação aos processos, percebemos que foram realizados sobre objetos mais elementares, foram coordenados e capsulados em novos objetos. É o que aconteceu com os conceitos de limite, somas por falta e por excesso que foram capsulados no novo objeto, no caso a integral de Riemann. No pensamento *proceitual* é possível observar as componentes processual e conceitual em interação, por exemplo: ele observa que, independentemente do particionamento, as somas inferiores são sempre 0 (considerando os pontos irracionais) e as somas superiores são sempre 1 (considerando os pontos racionais). A partir disso, o estudante conclui que, devido às propriedades da função de Dirichlet, os limites das somas inferior e superior não convergem para o mesmo valor. Percebemos também um predomínio de aspectos estruturais em detrimento dos aspectos operacionais. O estudante E1 deteve-se na parte conceitual, sem necessidade de operações elementares para concluir sobre essa função ser, ou não, integrável.

Na Figura 3 é possível visualizar da resposta da dupla D1 para a atividade 1.8c. Esta atividade tem como enunciado: “Utilizando o *Geogebra* avalie se as seguintes funções são Riemann integráveis. Justifique sua resposta”.

Figura 3 - Resposta da dupla D1 para a atividade 1.8c

c) $f(x) = \begin{cases} 2, & \text{se } 0 \leq x \leq 3 \\ 4, & \text{se } 3 < x \leq 6 \end{cases}$ no intervalo $[0, 6]$ é RIEMANN INTEGRÁVEL.

Quando analisamos 2, se $0 \leq x \leq 3$ encontramos um retângulo menor e quando analisamos 4, se $3 < x \leq 6$ encontramos um retângulo maior que somados as áreas dos retângulos temos por falta como por excesso as mesmas áreas serão as mesmas. Ou seja:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S(p) = \lim_{n \rightarrow \infty} s(p)$$

Fonte: autoria própria.

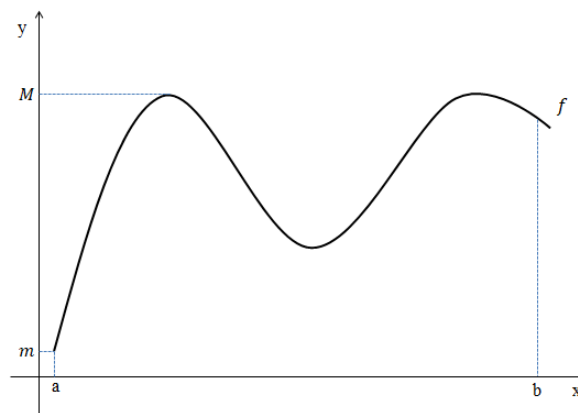
A partir da resposta da dupla percebe-se que se trata de uma imagem do conceito relacional porque, o objeto integral de Riemann é encarado como um *proceito*, pois a dupla usa o *GeoGebra* para criar uma representação visual da função do tipo escada e das somas de Riemann, visualizam a integral como a área total sob a curva da função e manipulam os intervalos para explorar como essa área é calculada. A dupla entende que a integral de Riemann é tanto um processo dinâmico (cálculo das somas de Riemann) quanto um objeto estático (a área sob a curva). Na resposta, percebemos que a dupla foi capaz de explicar como a integral de Riemann é construída a partir das somas de Riemann, mostrando a transição do processo para o objeto final. Ainda, os processos realizados sobre objetos mais elementares são coordenados e capsulados em novos objetos. Há um predomínio de aspectos estruturais em detrimento dos aspectos operacionais.

A Unidade 2 tratou de estudos referentes à existência ou não de Primitivas. Aqui os alunos tiveram a oportunidade de discutir as limitações da Integral de Riemann e a necessidade de ampliar a classe de funções integráveis com a construção de um novo conceito, ou seja, o da Integral de Lebesgue.

A atividade do Quadro 4 faz parte da Unidade 3 e foi pensada para desenvolver o conceito de integral de Lebesgue e mostrar a evolução desse novo conceito em relação ao de integral de Riemann. Para isso, anteriormente foi discutido com os alunos o conceito medida de conjuntos.

Quadro 4 - Atividade 3.3 que faz parte da Unidade 3

Atividade 3.3: A partir esboço do gráfico da função $f: [a, b] \rightarrow R$, realize as atividades que seguem.

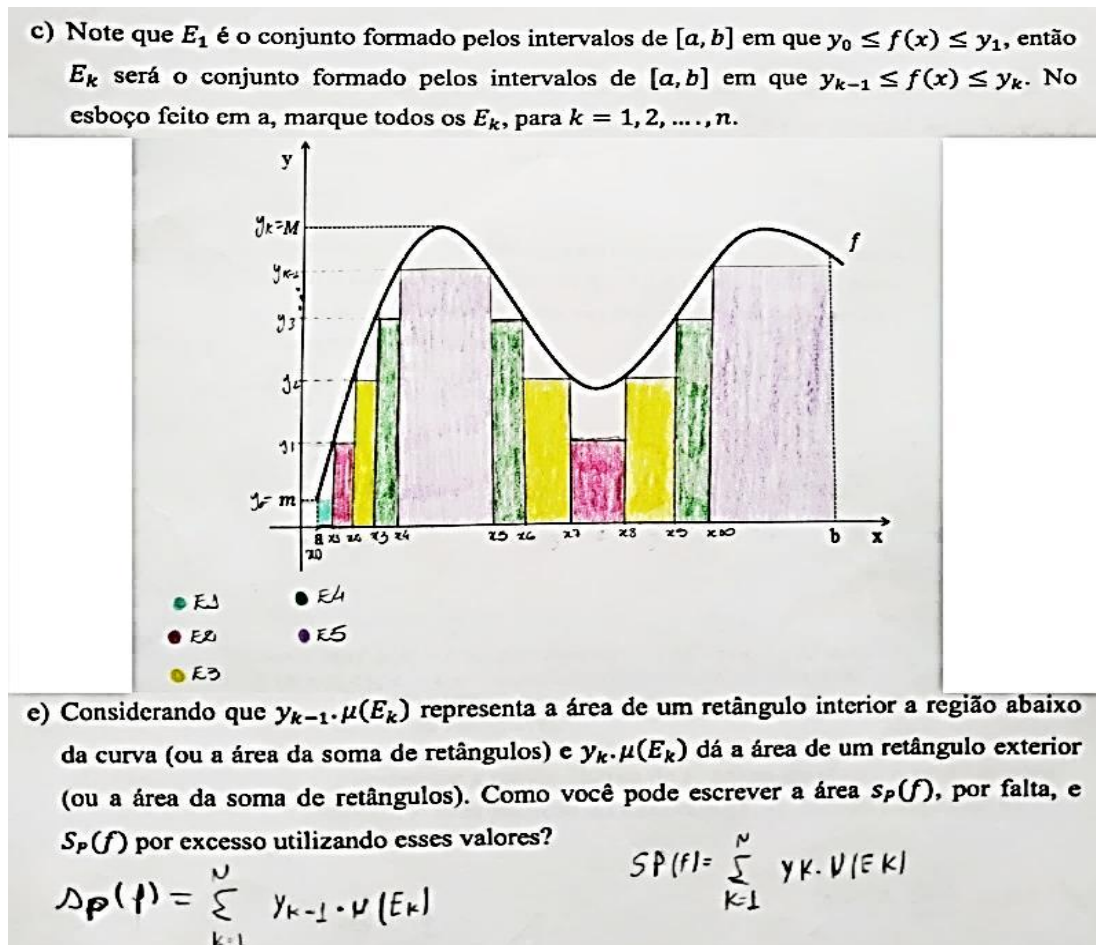


- Construa uma partição do intervalo $[m, M]$, onde $m = \inf f(x)$ e $M = \sup f(x)$, $\forall x \in [a, b]$, ou seja, $P = \{y_0 < y_1 < \dots < y_n\}$ com $n \in \mathbb{N}$ e $m = y_0 < y_1 < \dots < y_n = M$. Represente os intervalos correspondentes em $[a, b]$. Faça o esboço no gráfico.
- Se E_1 é o conjunto formado pelos intervalos de $[a, b]$ em que $y_0 \leq f(x) \leq y_1$, ou seja: $E_1 = \{x \in [a, b] / y_0 \leq f(x) \leq y_1\}$. Quantos E_1 aparecem no teu esboço?
- Note que E_1 é o conjunto formado pelos intervalos de $[a, b]$ em que $y_0 \leq f(x) \leq y_1$, então E_k será o conjunto formado pelos intervalos de $[a, b]$ em que $y_{k-1} \leq f(x) \leq y_k$. No esboço feito em a, marque todos os E_k , para $k = 1, 2, \dots, n$.
- Como você atribuiria uma medida $\mu(E_k)$, nesse caso de um função contínua, para E_k ?
- Considerando que $y_{k-1} \cdot \mu(E_k)$ representa a área de um retângulo interior a região abaixo da curva (ou a área da soma de retângulos) e $y_k \cdot \mu(E_k)$ dá a área de um retângulo exterior (ou a área da soma de retângulos). Como você pode escrever a área $s_p(f)$, por falta, e $S_p(f)$ por excesso utilizando esses valores?

Fonte: autoria própria.

A Figura 4 mostra a resposta da dupla D2 para alguns itens da questão do quadro anterior.

Figura 4 - Resposta da dupla D2 para as atividades 3.3c e 3.3

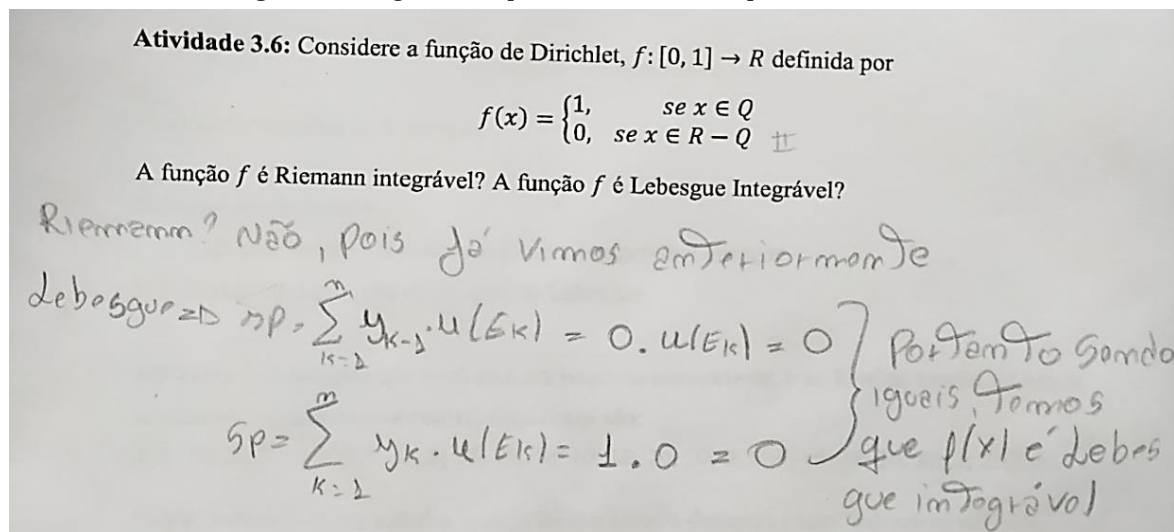


Fonte: autoria própria.

A resposta, para essa atividade, evidencia uma imagem do conceito instrumental, pois a dupla tem uma compreensão procedimental, ou seja, sabe como fazer a partição seguindo um procedimento específico, mas tem dificuldade no processo ser generalizado para k subintervalos, o que indica uma compreensão limitada e procedimental. Já no item “e” a imagem do conceito é relacional, pois nesse caso os objetos, somas por falta e por excesso, são obtidos por *reificação*. Os processos realizados sobre objetos mais elementares (nesse caso, a amplitude de intervalos, medida de conjuntos, área de retângulo e somatório) são coordenados e encapsulados em novos objetos – as somas por falta e por excesso. Com a *reificação* os estudantes conseguem abstrair e generalizar o conceito e escrevem as somas inferiores e superiores em termos gerais, sem referência constante aos cálculos detalhados. Teve predomínio de aspectos estruturais em detrimento dos aspectos operacionais ao rapidamente chegar às expressões genéricas para as somas. E, por fim, esses conceitos foram traduzidos simbolicamente.

Com a atividade 3.6 foi possível mostrar a existência de funções que são integráveis a Lebesgue e que não são integráveis à Riemann. Na Figura 5 é possível visualizar a resposta do estudante E1.

Figura 5 - Imagem da resposta do estudante E1 para a atividade 3.6



Fonte: autoria própria.

Do ponto de vista das imagens conceituais caracterizamos como relacional, pois os conceitos de somas por falta e por excesso assumem o estatuto de objetos matemáticos e quando vistos como processos são coordenados e encapsulados no conceito de integral de Lebesgue. No pensamento *proceitual* é possível observar os componentes processual e conceitual em interação, por exemplo: ele observa que, independentemente do particionamento, as somas inferiores são sempre 0 (considerando que y_{k-1} é o menor valor da função em cada um dos intervalos da partição) e as somas superiores são sempre 01 (considerando que y_k é o maior valor da função em cada um dos intervalos da partição). A partir disso, o estudante conclui que, devido às propriedades da função de Dirichlet, os limites das somas inferior e superior convergem para o mesmo valor. Portanto, sendo integrável à Lebesgue. Percebemos também um predomínio de aspectos estruturais em detrimento dos aspectos operacionais. O estudante E1 deteve-se na parte conceitual, sem necessidade de operações elementares para concluir sobre essa função ser, ou não, integrável. Os conceitos são traduzidos simbolicamente. Além disso, é possível observar as componentes processual e conceitual em interação.

Ao analisarmos todas as imagens conceituais dos estudantes categorizadas nos níveis Incipiente, Instrumental ou Relacional, segundo Domingos (2003) referentes às atividades das unidades 1 e 3, constatamos que cerca de 75% das imagens estão no nível relacional. Esse fato reforça a conclusão de que o produto educacional possibilitou aos alunos compreenderem o conceito de integral de Riemann, suas limitações e o conceito de Integral de Lebesgue. Além disso, foi evidenciado nos escritos e falas dos grupos:

D1: [...] a função $\frac{1}{x^2}$, no intervalo $[-1,1]$ não é integrável à Riemann porque as somas das áreas por falta e por excesso não convergem para o mesmo valor...ah, claro, não teria como ter um valor pra área, essa função não é limitada nesse intervalo.

E1: [...] essa função [a de Dirichlet] não é integrável a Riemann por causa da partição do intervalo $[a, b]$, em cada parte sempre vai ter ínfimo 0 e supremo 1 [...] no caso de Lebesgue, particionar $[m, M]$, não tem a ver com ínfimo e supremo [...], mas com a medida dos conjuntos, aí não tem esse problema.

D2: [...] a escolha da partição no eixo y elimina o problema de infinitos pontos de descontinuidade, no caso dessa função [de Dirichlet].

D1: [...]mas em ambos os tipos de integrais, é preciso ter convergência das somas, por falta e por excesso.

As falas dos alunos da dupla D1, que ressalta a necessidade de convergência das somas, por falta e por excesso, para que a função seja integrável a Riemann e de forma semelhante, integrável a Lebesgue, além das falas de E1 e D2 em que é destacada a diferença na definição de ambos os conceitos de integração, caracterizam que, de fato, os estudantes compreenderam os conceitos e souberam diferenciar um do outro, bem como as limitações existentes no conceito de Integral de Riemann.

6 Considerações Finais

Vale ressaltar que os princípios de design iniciais, (1) e (2), descritos no item 4, foram fundamentais para a caracterização do produto educacional. A partir deles, foi possível planejar atividades que possibilitaram resultados promissores no ensino e aprendizagem dos conceitos envolvidos, e favoreceram a validação do produto educacional em relação a validade, praticidade e efetividade.

Em relação à efetividade, acreditamos ter validado pelo fato dos expressivos resultados em termos de imagens conceituais relacionais nas atividades de síntese de cada unidade. Foram poucas imagens do conceito nos níveis incipiente e instrumental, apesar de percebermos as dificuldades em conhecimentos prévios e na realização dos processos por parte de alguns estudantes da turma.

As características das atividades e a estrutura do produto educacional (Unidade 1: Integral de Riemann; Unidade 2: Primitivas e Unidade 3: Integral de Lebesgue), foram fundamentais para que os estudantes diferenciasssem o conceito de Integral de Riemann e Primitivas e percebessem que a matemática está em evolução, ao estudarem um outro conceito de integração. Além disso, estudar Integral de Lebesgue favoreceu o entendimento de conceitos anteriores, desde conceitos elementares como a partição de uma função em subintervalos até conceitos de matemática avançada, como ínfimo e supremo e algumas ideias relacionadas com teoria da medida.

O papel do grupo de colaboração, participando ativamente em todas as etapas da pesquisa foi um dos grandes diferenciais da PBD, favorecendo o desenvolvimento de um artefato robusto e que atendeu as necessidades do público-alvo. Os profissionais do grupo participaram ativamente do processo: desde os estudos iniciais, a proposição e análise das atividades que constituíram o protótipo e o acompanhamento da aplicação. Nesse processo, acreditamos que as aprendizagens são múltiplas para os profissionais envolvidos, percorrendo processos desde o olhar para os problemas do seu contexto de trabalho, revisão bibliográfica de obras sobre o tema de estudo, elaboração de atividades e avaliação de intervenções. Durante a aplicação o grupo colaborou na crítica e na revisão das atividades. Nesse sentido, a pesquisa colaborou para o estabelecimento de cooperação entre os docentes do curso em um verdadeiro processo de formação continuada.

Finalizando, entendemos que os licenciandos compreenderam o conceito de Integral de Riemann, suas limitações e a necessidade de um novo conceito, como o da Integral de Lebesgue e que as atividades possibilitaram boas imagens conceituais, manifestando aspectos de Pensamento Matemático Avançado.

Agradecimentos

A Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) pelo

apoio financeiro.

Referências

- Barab, S. & Squire, K. (2004). Design-based research: Putting a stake in the ground. *Journal of the Learning Sciences*, 13(1), 1-14.
- Brasil. Instituto Nacional De Estudos E Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira - INEP. (2005). *Exame Nacional de Cursos: Relatório-Síntese 2005 - Matemática*. Brasília, DF.
- Brasil. Instituto Nacional De Estudos E Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira - INEP. (2009). *Exame Nacional de Cursos: Relatório-Síntese 2008 - Matemática*. Brasília, DF.
- Brasil. Instituto Nacional De Estudos E Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira - INEP. (2011). *Exame Nacional de Cursos: Relatório-Síntese 2011 - Matemática*. Brasília, DF.
- Brasil. Instituto Nacional De Estudos E Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira - INEP. (2016). *Exame Nacional de Cursos: Relatório-Síntese 2014 - Matemática*. Brasília, DF.
- Brasil. Instituto Nacional De Estudos E Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira - INEP. (2018). *Exame Nacional de Cursos: Relatório-Síntese 2017 – Matemática Bacharelado/Licenciatura*. Brasília, DF.
- Brasil. Instituto Nacional De Estudos E Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira - INEP. (2022). *Exame Nacional de Cursos: Relatório-Síntese 2021 – Matemática Licenciatura*. Brasília, DF.
- Cobb, P.; Confrey, J.; Disessa, A.; Lehrer, R. & Schaube, L. (2003). Design experiments in educational research. *Educational Researcher*, 32(1), p. 9-13.
- Cobb, P.; Jackson, K. & Dunlap, C. (2015). Design research: An analysis and critique. In: L. D. English & D. Kirshner (Org.). *Handbook of international research in Mathematics Education*. (3. ed., pp. 481-503). New York, NY: Routledge.
- Davis, P. J., Hersh, R., & Marchisotto, E. A. (2012). *The mathematical experience: Study edition*. Boston: Birkhäuser.
- Domingos, A. M. D. (2003). *Compreensão de conceitos matemáticos avançados – A matemática no início do superior*. 407f. Tese (Doutorado em Ciências da Educação). Universidade Nova de Lisboa, Faculdade de Ciências e Tecnologia. Lisboa.
- Gravemeijer, K. & Cobb, P. (2013). Design research from the learning design perspective. In: T. Plomp & N. Nieveen (Org.). *Educational design research, Part A: An introduction*. (1. ed., pp.72-113). Enschede: SLO.
- Lakatos, I. (1976). *Proofs and refutations: The logic of mathematical discovery*. Cambridge: Cambridge University Press.
- Nasser, L. (2007). Ajudando a superar obstáculos na aprendizagem de Cálculo. In: *Anais do IX Encontro Nacional de Educação Matemática* (pp. 1-14). Belo Horizonte, MG.
- Pagani, E. M. L., & Allevato, N. S. G. (2014). Ensino e aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral: um mapeamento de algumas teses e dissertações produzidas no Brasil. *VIDYA*, 34(2), 61-74.
- Pinto, M. M. F. (1998). *Student's understanding of real analysis*. 354f. Tese (Doctor of Philosophy). University of Warwick, Institute of Education. England.



- Plomp, T. (2007). Educational design research: An introduction. In: T. Plomp & N. Nieveen (Org.). *An introduction to educational design research*. (1. ed., pp. 9-35). Enschede: SLO.
- Plomp, T. (2018). Pesquisa-Aplicação em Educação: Uma introdução. In: T. Plomp; N. Nieveen; E. Nonato & A. Matta (Org.). *Pesquisa-Aplicação em Educação*. (1. ed., pp. 26-67). São Paulo: Artesanato Educacional.
- Rasmussen, C., Marrongelle, K., & Borba, M. (2014). Research on calculus: What do we know and where do we need to go? *ZDM: The International Journal on Mathematics Education*, 46(4), 507–515.
- Reis, F. S. (2009). Rigor e intuição no ensino de Cálculo e Análise. In: M. C. R. FROTA & L. NASSER (Org.). *Educação Matemática no Ensino Superior: pesquisa e debates*. (1. ed., pp. 81-98). Recife: SBEM.
- Sousa, G. C. (2015). Impacto de programas auxiliares na disciplina de cálculo diferencial e integral I. In: *Anais do 6º Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática*, Pirenópolis: GO.
- Tall, D. (1995). Cognitive growth in elementary and advanced mathematical thinking. In: *Proceedings of 19th International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 161-175). Recife, PE.
- Tall, D. (2002). The psychology of advanced mathematical thinking. In D. Tall (Org.). *Advanced mathematical thinking*. (1. ed., pp. 3-21). Dordrecht: Kluwer.
- Van Den Akker, J. (1999). Princípios e métodos de pesquisa de desenvolvimento. In: J. Van Den Akker; R. M. Branch; K. Gustafson; N. Nieveen & T. Plomp (Org.). *Design abordagens e ferramentas na educação e treinamento*. (1 ed., pp. 1-14). Boston: Kluwer.
- Vinner, S. (1983). Concept definition, concept image and the notion of function. *International Journal of Education in Science and Technology*, 14(3), 293-305.
- Vinner, S. (1991). The role of definitions in the teaching and learning of mathematics. In: D. Tall (Org.). *Advanced mathematical thinking*. (1. Ed., pp. 65-81). Dordrecht: Kluwer.