Noticing de futuros professores de Matemática do pensamento do aluno sobre a classificação de quadriláteros

Noticing of preservice mathematics teachers of student's thinking about the classification of quadrilaterals

Fernanda Caroline Cybulski[1]
Hélia Oliveira[2]
Márcia Cristina de Costa Trindade Cyrino[3]

Resumo: Este artigo busca compreender o *noticing* de futuros professores de matemática (FPMs) do pensamento do aluno ao analisarem uma resolução sobre classificação de quadriláteros. Considera-se como *noticing*: reconhecer, interpretar e decidir como responder ao pensamento do aluno. Conduziu-se uma investigação qualitativa com FPMs. Após discutirem aspectos teóricos da aprendizagem da geometria, analisaram uma resolução de um aluno sobre classificação de quadriláteros e discutiram-na. Eles reconheceram erros, incoerências e dificuldades do aluno com definições e classificações; interpretaram-nos com base no fenômeno prototípico e na classificação hierárquica; e sugeriram questionamentos, recursos além da tarefa e exemplos diversificados. Analisar resoluções, com suporte teórico sobre aprendizagem, e discuti-las coletivamente, podem subsidiar o *noticing* de FPMs do pensamento do aluno, contribuindo para seu processo formativo.

Palavras-chave: *Noticing.* Formação inicial de professores de matemática. Ensino de Geometria. Classificação hierárquica de quadriláteros.

Abstract: This article aims to understand the noticing of preservice mathematics teachers (PMTs) of student's thinking as they analyze a work concerning the classification of quadrilaterals. Noticing entails attending, interpreting, and deciding how to respond to students' thinking. A qualitative investigation with PMTs was conducted. After discussing theoretical aspects of geometry learning, the PMTs analyzed a student's work on the classification of quadrilaterals and discussed it. They attended student's errors, inconsistencies, and difficulties regarding definitions and classifications; interpreted based on prototypical phenomena and hierarchical classification; and suggested questions, resources beyond the task, and diverse examples. Analyzing student works, supported by theoretical framework of learning, and discussing them collectively can support PMTs' noticing of student's thinking and contribute to their formative process.

Keywords: Noticing. Preservice mathematics teacher education. Geometry teaching. Hierarchical classification of quadrilaterals.

1 Introdução

O termo *noticing,* por vezes traduzido como "perceber", pode ser utilizado cotidianamente para se referir às observações que são feitas sobre algo. Quando se trata do *noticing* do professor, no entanto, essas observações estão direcionadas a aspectos inerentes à profissão docente (Sherin, Jacobs & Philipp, 2011), como reconhecer, interpretar e decidir como

[1] Universidade Estadual de Londrina • Londrina, PR — Brasil • ✉ fernanda.cybulski@uel.br • ORCID https://orcid.org/0000-0001-9499-6782
[2] Instituto de Educação da Universidade de Lisboa • Lisboa — Portugal • ✉ hmoliveira@ie.ulisboa.pt • ORCID https://orcid.org/0000-0002-2560-1641
[3] Universidade Estadual de Londrina • Londrina, PR — Brasil • ✉ marciacyrino@uel.br • ORCID https://orcid.org/0000-0003-4276-8395

ISSN 2764-3158

responder ao pensamento matemático do aluno (Jacobs, Lamb & Philipp, 2010).

Adicionalmente, desenvolver o *noticing* com foco no pensamento matemático dos alunos pode ser desafiante para futuros professores porque, por exemplo, tendem a fazer análises mais descritivas do pensamento do aluno, em vez de inferenciais (Baldinger, 2019), e a ressaltar erros e aspectos faltantes nas resoluções, em detrimento dos pontos fortes do pensamento dos alunos (Scheiner, 2023). Nesse sentido, é preciso apoiar os futuros professores durante a sua formação inicial no desenvolvimento de seu *noticing* profissional (Fisher, Thomas, Schack, Jong & Tassell, 2018; Stockero, 2021). Uma possibilidade para esse suporte são as experiências de aproximação da prática, como análises de situações de sala de aula na forma de vídeos ou produções escritas de alunos, por exemplo (Dindyal, Schack, Choy & Sherin, 2021; Ivars, Fernández & Llinares, 2020).

Embora tenham sido desenvolvidos estudos com foco no *noticing* do professor ou futuro professor em temas matemáticos específicos, por exemplo, álgebra (Cabral, Oliveira & Mendes, 2021; Rodrigues, Cyrino & Oliveira, 2019), aritmética (Fisher *et al*., 2018), limite (Fernández, Moreno & Sánchez-Matamoros, 2024) e geometria (Haj-Yahya, 2022; Ulusoy & Çakıroğlu, 2021), especificidades do *noticing* em relação ao conteúdo ainda são pouco investigadas (Dindyal *et al*., 2021; König *et al*., 2022). Nesse sentido, são necessários estudos que busquem compreender possíveis particularidades do *noticing* do professor em relação à aprendizagem dos alunos em áreas específicas da matemática, o que pode contribuir também para uma compreensão mais abrangente do *noticing,* com foco em aspectos pedagógicos da matemática (König *et al*., 2022).

De modo particular na geometria, a classificação hierárquica de quadriláteros gera dificuldades tanto para alunos da Educação Básica (Haj Yahya, Mahameed & Arisha Haj Yahya, 2024), quanto para futuros professores (Avcu, 2023; Fujita, 2012). Em vista disso, investigar o *noticing* de futuros professores nesse domínio pode ser um campo frutífero para a Educação Matemática. Assim, nosso objetivo é compreender o *noticing* de futuros professores de matemática (FPMs) do pensamento do aluno durante a análise de uma resolução de um aluno sobre a classificação de quadriláteros. Para isso, propomos responder a: Que aspectos do pensamento do aluno sobre classificação de quadriláteros são reconhecidos por FPMs durante a análise de uma resolução? De que forma FPMs interpretam o pensamento do aluno no que diz respeito à classificação de quadriláteros? Que intervenções são sugeridas por FPMs ao analisarem o pensamento do aluno sobre a classificação de quadriláteros em uma resolução?

2 *Noticing* do futuro professor de matemática

Jacobs *et al*. (2010) conceitualizam o *noticing* profissional do professor, com ênfase no pensamento matemático do aluno, em um conjunto de três capacidades interrelacionadas: reconhecer as estratégias dos alunos; interpretar a compreensão matemática dos alunos; e decidir como responder ou agir com base na compreensão matemática que os alunos evidenciam. Reconhecer as estratégias se refere a: reconhecer aspectos matemáticos nas estratégias utilizadas pelos alunos (Jacobs *et al*., 2010) e discernir e incluir evidências ou detalhes matematicamente significativos para a situação (Ivars *et al*., 2020; Jacobs *et al*., 2022; Ulusoy & Çakıroğlu, 2021). Interpretar a compreensão matemática dos alunos se refere a como os professores reconhecem relações, propriedades e características do aprendizado do aluno (Ivars *et al*., 2020), com mais ou menos evidências das estratégias utilizadas (Jacobs *et al*., 2022), dão sentido às ideias do aluno, com as razões que as fundamentam (Ulusoy & Çakıroğlu, 2021), a partir das respostas e da pesquisa sobre o desenvolvimento do pensamento matemático (Jacobs *et al*., 2010). Decidir como responder ou agir com base na compreensão matemática que os alunos evidenciam diz respeito a uma resposta pretendida, não necessariamente a que

ISSN 2764-3158

seria executada em uma situação real de sala de aula, que se conecta às outras capacidades do *noticing* (Jacobs *et al*., 2010) para apoiar o aluno em sua aprendizagem (Ivars *et al*., 2020; Jacobs *et al*., 2022). Decidir como responder faz parte do *noticing* do professor, não é algo que ocorre após o *noticing*, visto que está relacionado conceitual e temporalmente com as outras duas capacidades. Assim, em uma situação real de sala de aula, reconhecer, interpretar e decidir como responder ocorrem quase que simultaneamente para informar e apoiar o professor em sua tomada de decisão (Jacobs *et al*., 2010).

A possível falta de experiência em sala de aula não limita o desenvolvimento de capacidades do *noticing* de FPMs, mas é preciso apoiá-los com abordagens projetadas especificamente para tal fim (Fisher *et al*., 2018), que poderão repercutir e informar sua futura prática docente (Stockero, 2021). As experiências de aproximação da prática, que buscam retratar o trabalho em sala de aula, são uma opção de como apoiar o *noticing*, particularmente, de futuros professores (Dindyal *et al*., 2021). Essas experiências podem ser desenvolvidas utilizando, por exemplo, produções escritas de alunos (Ivars *et al*., 2020). Por outro lado, analisar um trabalho escrito pode exigir uma abordagem mais analítica e engajada dos FPMs, pois é preciso reconstruir o raciocínio dos alunos. Scheiner (2023) ressalta que a análise de trabalho escrito, mesmo que complexa e desafiante para FPMs, pode permitir que reflitam sem a pressão de fornecer respostas imediatas, resultando em considerações menos superficiais sobre o pensamento dos alunos.

Outra forma de apoiar o *noticing* de FPMs é fornecendo suporte para interpretarem o pensamento matemático do aluno, como perguntas dirigidas à matemática da situação, o que também pode influenciar o que será reconhecido, na medida em que a atenção do FPM é direcionada para aspectos significativos (Superfine, Fisher, Bragelman & Amador, 2017). Discussões coletivas ou sobre aspectos teóricos também podem apoiar o *noticing* do FPM. Por exemplo, Ulusoy e Çakıroğlu (2021) observaram que discussões em grupo foram potenciais para o desenvolvimento do *noticing* de FPMs, que forneceram interpretações alternativas da compreensão dos alunos e decisões instrucionais mais detalhadas e específicas para apoiar a aprendizagem do conceito de trapézio, se comparado com suas análises individuais. Já Fernández *et al*. (2024) forneceram suporte teórico sobre a aprendizagem do conceito de limites e constataram que isso auxiliou os FPMs na compreensão do próprio conceito de limite e a construírem vocabulário específico sobre o assunto, o que foi essencial para apoiar o *noticing*.

3 Classificação de quadriláteros e o fenômeno prototípico

A classificação hierárquica considera relações de inclusão entre os conceitos, de modo que os mais particulares são vistos como subconjuntos dos mais gerais, permitindo simplificar a sistematização dos conceitos e processos dedutivos. Já a classificação partitiva considera os exemplos de diferentes conceitos em conjuntos disjuntos (Villiers, 1994). Assim, na classificação hierárquica os paralelogramos podem ser subconjuntos dos trapézios, porque podemos considerar uma definição inclusiva para o trapézio na qual ele tem *pelo menos* um par de lados paralelos. Na classificação partitiva, por outro lado, consideramos definições exclusivas, de modo que o trapézio tem *apenas* um par de lados paralelos e, portanto, o paralelogramo não pode ser um trapézio. A classificação hierárquica pode ser também mais desafiante por requerer dedução lógica e pela influência de exemplos considerados protótipos dos conceitos (Fujita, 2012).

Particularmente na geometria, alguns exemplos, os protótipos, são mais privilegiados do que outros. Eles geralmente formam o subconjunto com mais características, pois incluem tanto os atributos necessários para o conceito, quanto outros mais específicos, por vezes, com "fortes características visuais" (Hershkowitz, 1990). Segundo Hershkowitz (1989), se trata do fenômeno prototípico, no qual os exemplos protótipos são mais facilmente reconhecidos e, frequentemente, colocados como representantes dos conceitos, dificultando a identificação de outros exemplos que não cumpram as características do protótipo. Mesmo quando as definições são conhecidas os exemplos protótipos geram obstáculos na compreensão de relações de inclusão entre quadriláteros (Fujita, 2012).

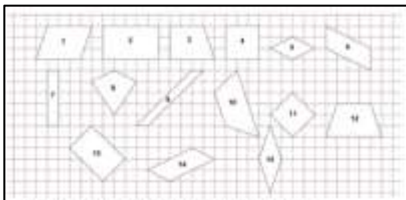
4 Procedimentos metodológicos

Este estudo decorreu em uma disciplina de Didática da Matemática, ofertada no segundo ano do Mestrado em Ensino de Matemática, de uma universidade em Portugal. A habilitação para lecionar no Ensino Básico e Secundário, em Portugal, ocorre mediante a formação em um curso de Mestrado em Ensino, de modo que o mestrado é considerado formação inicial. Nessa disciplina os FPMs tiveram contato com aspectos teóricos referentes à aprendizagem de diferentes conteúdos da matemática. Participaram do estudo quatro FPMs do terceiro ciclo do Ensino Básico e Secundário (em Portugal, estarão habilitados para lecionar a alunos de 12 a 17 anos de idade), que foram identificados como FPM1, FPM2, FPM3 e FPM4.

Para iniciar o estudo de temas relacionados à geometria, duas aulas foram destinadas ao estudo da classificação hierárquica de quadriláteros e envolveram: a construção de quadriláteros no *software* GeoGebra pelos FPMs; a identificação das características mínimas de cada um dos quadriláteros construídos; e a classificação hierárquica desses quadriláteros, com a elaboração coletiva de um esquema para organizar as relações hierárquicas.

Na aula seguinte, inicialmente, a investigadora (primeira autora) propôs uma discussão teórica com os FPMs a respeito de aspectos da aprendizagem em geometria, como o fenômeno prototípico e questões relacionadas à construção e compreensão de conceitos geométricos. Após isso, os FPMs resolveram uma tarefa de formação composta por duas partes. A primeira parte (Figura 1) consistia numa tarefa matemática de classificação e definição dos quadriláteros paralelogramo, losango, retângulo e quadrado, com foco em algumas de suas características. Após a resolverem individualmente, discutiram-na para partilhar suas respostas e possíveis dúvidas da tarefa (os FPMs foram instruídos a não resolver a questão 4 porque ela seria discutida em uma outra oportunidade). Essas ações de resolver e discutir as resoluções tiveram como objetivo familiarizar os FPMs com a tarefa matemática e os conceitos envolvidos.

Figura 1: Tarefa de classificação e definição de quadriláteros



1) Quais dos quadriláteros acima (1-15) são:
a) Membros da família do paralelogramo?
b) Membros da família do losango?
c) Membros da família do retângulo?
d) Membros da família do quadrado?
você pode escolher as mesmas formas mais de uma vez!

2. O que é um paralelogramo? Descreva-o em palavras.

3. Leia as sentenças seguintes e circule as que você considera corretas:
(a) Há um tipo de paralelogramo que tem ângulos retos.
(b) Os comprimentos dos lados opostos dos paralelogramos são iguais (congruentes).
(c) Os ângulos diagonalmente opostos dos paralelogramos são iguais (congruentes).
(d) Há um tipo de paralelogramo que tem 4 lados de mesmo comprimento.
(e) Alguns paralelogramos têm mais de duas linhas de simetria.

4. É possível construir um paralelogramo cujos quatro vértices pertençam à circunferência de um círculo? Se for possível, represente esta situação com um desenho, se não for possível, justifique o porquê.

5. Leia atentamente as frases a seguir e circule as que você considera corretas. Descreva também um retângulo em palavras.
(a) Os comprimentos dos lados opostos dos retângulos são iguais (congruentes).
(b) Os ângulos opostos dos retângulos são iguais (congruentes).
(c) Existe um tipo de retângulo que tem 4 lados de mesmo comprimento.
(d) Alguns retângulos têm mais de duas linhas de simetria.
Um retângulo é:

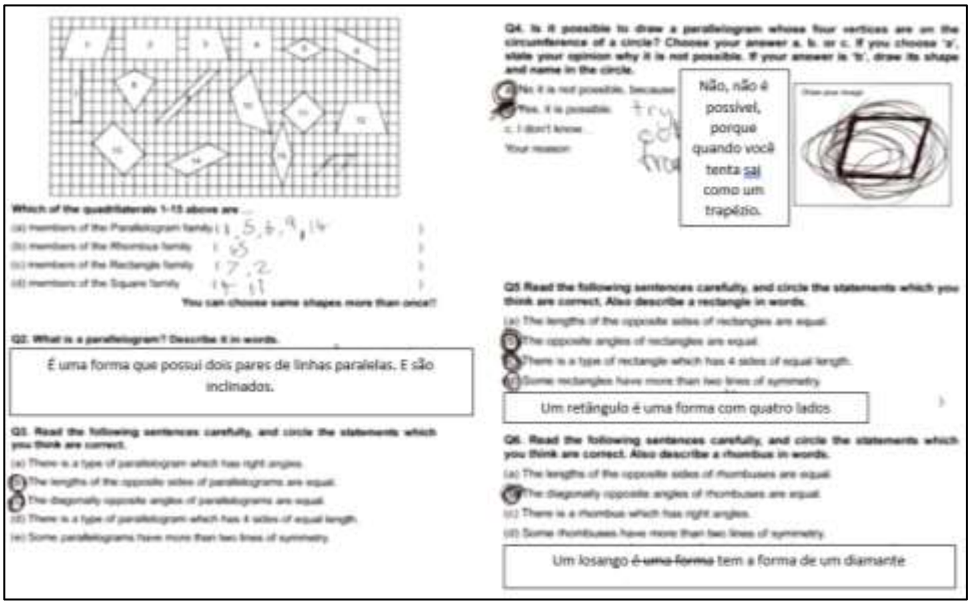
6. Leia atentamente as frases a seguir e circule as que você considera corretas. Descreva também um losango em palavras.
(a) Os comprimentos dos lados opostos dos losangos são iguais (congruentes).
(b) Os ângulos diagonalmente opostos dos losangos são iguais (congruentes).
(c) Há um losango que tem ângulos retos.
(d) Alguns losangos têm mais de duas linhas de simetria.
Um losango é:

Fonte: Adaptado de Fujita (2012, tradução nossa)

ISSN 2764-3158

Na sequência, receberam a parte 2 da tarefa (Figura 2) para analisarem individualmente, que consistia na resolução de um aluno para a mesma tarefa matemática da parte 1. Foram propostas também as seguintes questões orientadoras para suscitar o *noticing* dos FPMs sobre o pensamento do aluno: 1) Analise e comente as respostas deste aluno; 2) O que pode ter levado o aluno a pensar dessa forma, no que diz respeito ao conceito de paralelogramo? O que pode "estar por trás" das respostas do aluno? 3) Indique possíveis intervenções/*feedback* que você faria, enquanto professor, por exemplo: comentários e/ou questionamentos que levem o aluno a refletir e/ou que lhe permitam compreender características do raciocínio desse aluno; abordagens que poderiam ser usadas para sanar dúvidas e/ou auxiliar esse aluno a superar dificuldades etc.

Figura 2: Resolução de um aluno analisada pelos FPMs



Fonte: Adaptado de Fujita (2012, tradução nossa)

Após a resolução da tarefa de formação pelos FPMs, a investigadora conduziu uma discussão coletiva, a partir das questões orientadoras, a fim de que os FPMs partilhassem suas ideias e as discutissem. Esses dois momentos, de análise individual da resolução do aluno com resposta escrita e discussão sobre a resolução, são o foco da presente investigação.

Esse estudo segue uma abordagem qualitativa (Creswell & Poth, 2018), com obtenção de informações a partir da observação direta, com vídeo gravações das discussões, e das produções escritas dos FPMs (respostas para as questões orientadoras). A análise incidiu de forma interpretativa sobre essas informações. Para isso, a gravação da aula foi transcrita e, no processo de análise, constituímos vários excertos compostos por uma ou mais falas. De modo semelhante, as respostas escritas produzidas por cada FPM também constituíram excertos. De posse dessas informações, fizemos leituras desses excertos para identificar características do *noticing* dos FPMs, a partir das capacidades (Jacobs *et al.*, 2010), a saber: aspectos do pensamento do aluno *reconhecidos* pelos FPMs na resolução; suas *interpretações* do pensamento do aluno; e suas possíveis *intervenções* enquanto professor para promoção da aprendizagem dos alunos (decidir como responder ou agir).

Na seção seguinte, os resultados estão organizados com excertos oriundos das discussões orais (D) e de registros escritos dos FPMs (RE1 – resposta da questão orientadora 1; RE2 – resposta da questão 2; e RE3 – resposta da questão 3).

5 Resultados

Nesta seção apresentamos características das capacidades do *noticing* do pensamento do aluno mobilizadas por FPMs considerando aspectos que eles reconheceram, suas interpretações e suas propostas de intervenção.

5.1 Aspectos reconhecidos pelos FPMs

Nesta subseção apresentamos aspectos do pensamento do aluno considerados relevantes pelos FPMs na resolução analisada. Os FPMs reconheceram aspectos associados às propriedades e definições dos quadriláteros e ao estabelecimento de relações de inclusão, com ênfase nos erros, dificuldades e incoerências das respostas do aluno.

Nos excertos a seguir, por exemplo, o FPM1 e o FPM2 reconhecem que o aluno não conhece as definições dos quadriláteros ou as características mínimas necessárias para defini-los, repercutindo nas relações que ele estabelece: "Pela análise das respostas dadas, talvez se possa pensar que o aluno não conhece bem as características mínimas das figuras, e o modo como elas se relacionam entre si. Ex: 'Um retângulo é uma forma' (FPM2, RE1). De modo específico para o FPM1, isso acaba levando a erros na classificação dos quadriláteros:

> O aluno evidencia não conhecer as definições (de cada uma das figuras geométricas). Como tal, erra na sua classificação (Q1). Em particular, o aluno parece ter dificuldade em compreender a inclusão de categorias, ou seja, compreender que um quadrado é também um retângulo, um retângulo é também um paralelogramo etc. Para o aluno, a pertença a uma categoria exclui a figura de pertencer a outra categoria (é o que parece). (FPM1, RE1)

As incoerências reconhecidas nas respostas geraram uma certa dificuldade nas análises dos FPMs, uma vez que havia dúvidas em relação ao que o aluno estava se referindo:

FPM1 Na definição dele que reúne [os quadriláteros] em caixinhas que não se podem sobrepor, ele está a dizer que o retângulo tem quatro lados, o que inclui o quadrado. Mas ele tira a frase [não assinala a alternativa "a" da questão 5] "o comprimento dos lados opostos são iguais". Ele diz que no retângulo isso não pode acontecer, [e com isso] retira os quadrados de lá [da classe dos retângulos], a definição dele não é consistente...

FPM4 Não, mas ele considera que há um tipo de retângulo com os quatro lados de mesmo comprimento, na "c" [da questão 5].

Devido à atenção dos FPMs estar centrada em dificuldades, incoerências e erros, durante a discussão a investigadora os questiona sobre o que o aluno poderia saber a respeito daqueles conceitos. Nesse momento, o FPM3 e o FPM4 chamam a atenção para características do paralelogramo e do quadrado atribuídas pelo aluno.

FPM4 [O aluno conhece] os protótipos das figuras, é... dos quadrados. Na verdade, dos quadrados não, porque nos quadrados ele marca os dois [questão 1, letra d]. Mesmo o [quadrado] que "está de lado", mas os paralelogramos... Eu acho que ele até sabe o que são as figuras, mas não as consegue encaixar [classificar] [...].

FPM3 [O aluno sabe] algumas [características], não as mínimas [...]. Ele sabe que o paralelogramo tem os lados opostos paralelos, mas depois ele exclui todos aqueles que não têm as "linhas" inclinadas, certo? Portanto, se ele se fixar na característica específica que é "os lados opostos são paralelos", ele...

FPM4 Não iria excluir essas... [as figuras que não possuem "lados inclinados"]. Ele sabe que

ISSN 2764-3158

tem que ter os dois [pares de lados] paralelos.
FPM3 Sim, mas depois também tem que ter "linhas inclinadas".

Nesse exemplo, o FPM4 reconhece que o aluno identifica quadrados em diferentes posições, mas tem dificuldades em identificar e definir paralelogramos que não possuam as características de um protótipo. O FPM3 complementa na medida em que sugere que o aluno sabe que o paralelogramo tem os lados paralelos, embora inclua a condição "linhas inclinadas".

5.2 Interpretações dos FPMs

Nesta subseção apresentamos como os FPMs interpretam o pensamento do aluno, isto é, as possíveis razões para as respostas fornecidas pelo aluno, segundo os FPMs.

De um modo geral, os quatro FPMs mencionam a influência do fenômeno prototípico nas respostas do aluno. Embora o FPM1 e o FPM2 interpretem que a razão para as respostas possa ser a influência do fenômeno prototípico, as justificativas do FPM2 são mais gerais: "Talvez tenha um protótipo de paralelogramo que não corresponde à imagem e suas características" (FPM2, RE2). Já o FPM1 exemplifica em que sentido o fenômeno prototípico interfere na resposta e indica possíveis implicações para a definição do aluno:

> O aluno tinha um "protótipo" de paralelogramo, uma figura mental, em que os lados "superior" e inferior são horizontais e paralelos, e os lados esquerdo e direito são inclinados. Dessa forma, exclui da definição de paralelogramo, ou melhor, a sua definição de paralelogramo exclui figuras como o quadrado, o losango e o retângulo. (FPM1, RE2)

O FPM3 e o FPM4 vão além de interpretar o fenômeno prototípico como fator determinante para as respostas do aluno, indicando o que pode ter causado o próprio fenômeno, como o percurso escolar do aluno, as abordagens dos livros didáticos e o encaminhamento do professor. Por exemplo: "O aluno pode ter sido exposto ao longo do seu percurso escolar maioritariamente a paralelogramos da forma como ele descreve, com lados opostos paralelos e 'linhas inclinadas', criando um protótipo e não associando a figura geométrica às suas características mínimas" (FPM3, RE2).

> Mais uma vez a figura que o aluno está a "imaginar" como paralelogramo é uma figura protótipo de paralelogramo, sem que consiga estabelecer relação com as figuras que também são paralelogramos, mas que têm mais características e, por isso, têm outros nomes. Estas respostas devem-se, provavelmente, às figuras constantes dos manuais serem apresentadas sempre como um protótipo, e o professor nunca ter explorado o fato de que os quadriláteros estão organizados de forma hierárquica. (FPM4, RE2)

Mesmo que em suas produções escritas os FPMs tenham atribuído ao fenômeno prototípico a causa dos erros, das dificuldades e das incoerências que reconheceram do pensamento do aluno, durante a discussão o FPM1 e o FPM4 assumem uma atitude mais investigativa na tentativa de interpretar as possíveis causas das respostas do aluno com foco também nas relações de inclusão da classificação hierárquica de quadriláteros.

FPM4 Eu acho que não é apenas a parte do protótipo, quer dizer, a hierarquia também está junto, porque [o aluno] não sabia que do paralelogramo todas as figuras que estão para baixo [em uma representação visual da hierarquia] corresponderiam àquelas características do paralelogramo.
FPM1 Sim, é porque ele classifica com base em um protótipo, para ele o paralelogramo é

ISSN 2764-3158

	este, o quadrado é aquele, o losango é aquele e, portanto, ele classifica as famílias [de quadriláteros] com base em um protótipo, naquela imagem mental.
FPM4	Ele classifica com base em um protótipo, mas para poder perceber...
FPM1	A definição?
FPM4	Não, é isto que eu estou a dizer, eu acho que a definição não é suficiente, ou seja, saber só que o paralelogramo tem os lados paralelos dois a dois não é suficiente pelo fato de teres que saber que os losangos, os retângulos e os quadrados também têm os lados paralelos dois a dois, eu acho que isso também é importante.
FPM1	Sim, é importante que perceba que as definições não excluem, não são exclusivas.
FPM4	Exatamente.

Durante esse diálogo, os demais FPMs parecem concordar com as constatações feitas. Nesse sentido, pode-se dizer que os FPMs interpretaram o pensamento do aluno com dois principais focos: fenômeno prototípico e relações de inclusão da classificação hierárquica de quadriláteros.

5.3 Intervenções propostas pelos FPMs

Nesta subseção apresentamos as propostas de intervenção dos FPMs a partir do que reconheceram e como interpretaram o pensamento do aluno. Tal qual a questão orientadora 3 sugeriu, observamos que os FPMs propuseram três tipos de intervenção: Questionar; Propor recursos para além das tarefas; e Apresentar exemplos diversificados. Na sequência, apresentamos caraterísticas consideradas pelos FPMs em cada um desses tipos de intervenção.

Os quatro FPMs propuseram questionamentos como propostas de intervenção para promover a aprendizagem do aluno de modo que pudessem compreender detalhes do seu pensamento ou para que o aluno percebesse seus erros e o papel da definição. Por exemplo, o FPM1 busca enfatizar o papel da definição questionando algumas respostas da resolução apresentada pelo aluno, com o objetivo de que ele possa pensar sobre seus erros:

> A classificação parte sempre da definição, pelo que começaria pela pergunta 2, e depois levaria o aluno a pensar se as figuras que excluiu na pergunta 1 a) não deveriam ser incluídas. Perguntaria "por que é que a figura 4 não é um paralelogramo?", remetendo para a definição. O mesmo procedimento seria usado para os casos do losango e do retângulo. (FPM1, RE3)

O papel que o FPM1 atribui à definição dos quadriláteros, como base e alternativa instrucional para apoiar a classificação, é reafirmado durante a discussão:

> Eu acho que o que me parece mais apropriado, de fato, é o professor começar por recordar as definições. Fazer os alunos chegarem às definições, pensar qual é a definição apropriada a cada uma das figuras, e aí nós podemos perguntar sobre cada figura o que existe ou não. Eu acho que essa é a maneira correta de trabalhar isto. (FPM1, D)

De modo semelhante, o FPM4 propõe questionamentos para: enfatizar a definição do conceito, grifando na questão 2 a palavra "inclinados" na resposta do aluno, por exemplo, "Será que todos os paralelogramos têm de ter os lados 'inclinados'?"; o aluno reconhecer seus erros, grifando na resposta da questão 5 a expressão "forma com quatro lados", como: "Será suficiente para caracterizar o retângulo?"; compreender detalhes do pensamento do aluno, perguntando na questão 6: "qual é a forma de um diamante? Podes desenhar? Qual o comprimento dos lados?" (FPM4, RE3).

O FPM2 e o FPM3, embora também proponham uma abordagem de questionamentos, são mais gerais e não fazem referência às respostas e estratégias do aluno: "Questionar sobre as características mínimas das figuras e sobre as características que se repetem entre elas e sobre as características que as diferenciam." (FPM2, RE3); e "Questionar os alunos sobre as características mínimas para definir cada uma das figuras geométricas." (FPM3, RE3).

Outro tipo de intervenção foi o que chamamos de: "propor recursos para além da tarefa", no qual os quatro FPMs propuseram a construção de um esquema para ilustrar as relações de inclusão. Nem todos exemplificaram como fariam ou justificaram o porquê, talvez por julgarem ser do conhecimento dos colegas e da investigadora o que seria o esquema, uma vez que havia sido discutido na aula anterior. O FPM4 menciona uma finalidade para a construção do esquema: "Inicialmente deve ser construído com o aluno um fluxograma (esquema) para que ele perceba a hierarquia dos quadriláteros." (FPM4, RE3). Durante a discussão, o FPM2 descreve como conduziria a construção do esquema:

> Eu primeiro os conduziria para a construção do diagrama [esquema], com a identificação das características das figuras e os conduziria a perceberem as diferenças e semelhanças entre as diferentes figuras para que conseguissem, assim, perceber a relação entre elas no fluxograma [esquema], ou ao contrário, que percebessem a semelhança e depois construíssem o fluxograma [esquema]. *Conforme aquilo que nos foi proposto eu acho que está bem*, de trabalharmos primeiro as características, de discutirmos sobre elas e depois arrumar as figuras em um fluxograma [esquema]. (FPM2, D, grifos nossos)

É possível observar que o FPM2 não menciona estratégias ou particularidades da resolução do aluno e se atém ao que foi proposto na aula anterior como tarefa de formação para refletirem sobre a classificação hierárquica de quadriláteros, isto é, elencar as características mínimas de alguns quadriláteros e construir um esquema para organizar as relações de inclusão.

Por fim, o FPM3 também propôs "apresentar exemplos diversificados" (não apenas prototípicos), mesmo que sem justificar ou explicar como o faria: "Expor os alunos às representações diversificadas de quadriláteros." (FPM3, RE3).

6 Discussão de características do *noticing* dos FPMs

Identificamos que o *noticing* dos FPMs sobre o pensamento do aluno assumiu algumas características (Quadro 1) após analisarem uma resolução para uma tarefa de classificação de quadriláteros.

Quadro 1: Características do *noticing* dos FPMs

***Noticing* dos FPMs**	**Características**
Aspectos do pensamento do aluno reconhecidos	Erros, incoerências e dificuldades do aluno, com relação às propriedades e definições dos quadriláteros e ao estabelecimento de relações de inclusão.
Interpretações para o pensamento do aluno	Compreensão da influência do fenômeno prototípico e de particularidades da classificação hierárquica.
Intervenções propostas pelos FPMs	Questionar; propor recursos para além das tarefas; e apresentar exemplos diversificados.

Fonte: Dados da Pesquisa

Essas características revelaram um *noticing* do pensamento do aluno centrado em aspectos matemáticos pertinentes e específicos da classificação hierárquica de quadriláteros.

Na sequência, discutimos pontos que podem ter contribuído para que o *noticing* dos FPMs tenha assumido tais características e que podem ser potenciais para a formação inicial de professores.

Mesmo que os FPMs tenham reconhecido majoritariamente erros e dificuldades do aluno, o que na realidade é uma tendência (Scheiner, 2023), os reconheceram associados a aspectos matemáticos relevantes, nomeadamente características das definições dos quadriláteros e das relações de inclusão. Esse foco em aspectos pertinentes do pensamento do aluno pode ter sido influenciado pela análise de uma resolução escrita, visto que analisar o trabalho escrito dos alunos pode colaborar para o reconhecimento de aspectos matematicamente significativos (Magiera & Zambak, 2021), mais específicos e não superficiais (Scheiner, 2023). Além disso, em alguns momentos, as dificuldades dos próprios FPMs com alguns aspectos matemáticos da tarefa (que, mesmo que não tenham sido objeto de análise nesse estudo, foram observadas no decorrer das aulas) podem ter os levado à procura de tais aspectos na resolução do aluno. De modo análogo ao relatado por Baldinger (2019), resolver a tarefa antes de analisar a resolução de um aluno para a mesma tarefa pode desencadear raciocínios de auto comparação.

Embora a capacidade de interpretar, particularmente resoluções escritas, possa ser mais desafiante por ter menos indícios do raciocínio do aluno e exigir mais engajamento dos FPMs (Magiera & Zambak, 2021), em nosso estudo a interpretação do pensamento do aluno assumiu especial relevância em detrimento do reconhecimento de aspectos de forma descritiva. Realmente, os FPMs participantes do estudo estão habituados a discutir aspectos matemáticos e da aprendizagem de diferentes conteúdos, seguidos da análise de situações de aproximação da prática, como gravações de aulas ou resoluções escritas de alunos, o que pode ter colaborado para seu engajamento. Além disso, as discussões teóricas sobre a aprendizagem da geometria, como o fenômeno prototípico, e as experiências de formação realizadas (*e.g.* construção de uma classificação hierárquica e de um esquema), podem ter contribuído para a utilização de vocabulário específico pelos FPMs (*e.g.* "fenômeno prototípico", "classificação hierárquica" e "características mínimas") e atuado como suporte ao seu *noticing*, especialmente para a capacidade de interpretar o pensamento do aluno. Na literatura se sabe que conhecer sobre o pensamento matemático do aluno (Sánchez-Matamoros, Fernández & Llinares, 2019) e sobre como os alunos aprendem determinado conteúdo (Fernández *et al*., 2024; Haj-Yahya, 2022; Ivars *et al*., 2020), ainda na formação inicial de professores (Fisher *et al*., 2018; Stockero, 2021), é importante e colabora para o *noticing* do (futuro) professor.

No entanto, por vezes os FPMs tiveram dúvidas sobre a que o aluno se referia, principalmente pelas incoerências nas respostas dele, o que os levou, por exemplo, a proporem questionamentos para compreender mais detalhes do pensamento do aluno. De fato, não conhecer o aluno, seu percurso escolar e até mesmo *quais* e *como* os conteúdos foram abordados recentemente, pode dificultar o *noticing* dos professores (Jarry-Shore & Borko, 2023). De um modo geral, as propostas instrucionais na forma de questionamentos pautaram-se em particularidades que os FPMs reconheceram e em suas interpretações. Mesmo as propostas de recursos para além da tarefa, que nem sempre os FPMs relacionaram explicitamente com as respostas do aluno, podem ter sido influenciadas pelo que foi desenvolvido com eles em aulas anteriores (particularmente a construção do esquema para ilustrar relações de inclusão). Assim, as experiências formativas que foram realizadas também podem ter contribuído para superar as dificuldades que FPMs habitualmente enfrentam com a terceira dimensão do *noticing*, o (decidir) como responder (Fernández *et al*., 2024).

Por fim, elencamos que as discussões coletivas promovidas também podem ter auxiliado os FPMs no *noticing* do pensamento do aluno e a chegar em conclusões, como reconhecer conhecimentos que o aluno poderia ter, em vez de apenas indicar seus erros, e interpretar o pensamento do aluno com foco também em particularidades da classificação hierárquica, para

ISSN 2764-3158

além do fenômeno prototípico. As discussões, de um modo geral, permitiram que os FPMs esclarecessem dúvidas, explicassem seus pontos de vista e debatessem diferentes ideias, o que pode contribuir para o seu *noticing* (Ulusoy & Çakıroğlu, 2021).

Na próxima seção apresentaremos nossas conclusões, algumas limitações e perspectivas futuras, com implicações para o campo da formação inicial de professores de matemática.

7 Considerações finais

O *noticing* dos FPMs do pensamento do aluno, com relação à classificação de quadriláteros, assumiu características específicas e pertinentes do conteúdo da tarefa e das respostas do aluno que foram analisadas, com especial relevância da capacidade interpretativa. Os FPMs: *reconheceram* erros, incoerências e dificuldades do aluno, com relação às propriedades e definições dos quadriláteros e ao estabelecimento de relações de inclusão; *interpretaram* o pensamento do aluno tendo em conta o fenômeno prototípico e particularidades da classificação hierárquica; e *sugeriram intervenções* na forma de questionamentos, de recursos para além da tarefa analisada e de exemplos diversificados. Essas características são particulares do contexto investigado, mas podem reverberar na (futura) prática desses FPMs com relação, particularmente, ao ensino de geometria.

Destacamos a pertinência de experiências de aproximação da prática profissional na formação de professores, especialmente na inicial, para subsidiar o desenvolvimento do *noticing* dos (futuros) professores do pensamento do aluno para o ensino de geometria, tais como análises de situações de sala de aula, como resoluções de alunos. Além disso, é importante discutir aportes teóricos acerca da aprendizagem de conteúdos de geometria e do desenvolvimento do pensamento dos alunos, como discussões sobre a construção de conceitos geométricos e as influências do fenômeno prototípico na aprendizagem da geometria. Promover discussões coletivas que permitam que os FPMs dialoguem sobre o que reconhecem, como interpretam e o que propõem enquanto professores, isto é, discutam seu *noticing* uns com os outros, também pode ser uma mais valia para o processo formativo.

Nesse estudo, os FPMs participantes, bem como suas diferentes experiências prévias, podem ter influenciado seu *noticing* do pensamento do aluno de modos distintos e, consequentemente, nossos resultados. Estudos futuros podem considerar investigar outras questões do *noticing* do (futuro) professor, como possíveis particularidades de outros temas da matemática ou em que medida fatores como a análise de resoluções de alunos; experiências prévias de formação sobre o mesmo conteúdo da resolução analisada; aporte teórico de questões da aprendizagem; e discussões coletivas, podem influenciar o *noticing* de (futuros) professores em diferentes contextos de formação e com experiências profissionais docentes variadas. As questões e experiências aqui discutidas, bem como as perspectivas de investigações futuras, podem colaborar para a pesquisa em Educação Matemática com relação ao *noticing* profissional do (futuro) professor de matemática, com ênfase para o ensino de geometria.

Agradecimentos

Agradecemos à Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (Capes) pela bolsa de Doutorado Sanduíche no Exterior da primeira autora e ao CNPq pela bolsa de produtividade em pesquisa da terceira autora.

Referências

Avcu, R. (2023). Pre-service middle school mathematics teachers' personal concept definitions of special quadrilaterals. *Mathematics Education Research Journal*, *35*(4), 743-788.

ISSN 2764-3158

Baldinger, E. E. (2019). Reasoning about student written work through self-comparison: how pre-service secondary teachers use their own solutions to analyze student work. *Mathematical Thinking and Learning*, *22*(1), 1–23.

Cabral, J., Oliveira, H., & Mendes, F. (2021). O conhecimento matemático de futuras educadoras e professoras sobre sequências repetitivas e a capacidade de perceber o pensamento algébrico de crianças do jardim de infância. *Acta Scientiae*, *23*(6), 30–59.

Creswell, J. W., & Poth, C. N. (2018). *Qualitative inquiry and research design: Choosing among five approaches* (4th ed.). Sage publications.

Dindyal, J., Schack, E. O., Choy, B. H., & Sherin, M. G. (2021). Exploring the terrains of mathematics teacher noticing. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik (ZDM), 53*, 1–16.

Fernández, C., Moreno, M., & Sánchez-Matamoros, G. (2024). Prospective secondary teachers' noticing of students' thinking about the limit concept: pathways of development. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik* (ZDM).

Fisher, M. H., Thomas, J., Schack, E. O., Jong, C., & Tassell, J. (2018). Noticing numeracy now! Examining changes in preservice teachers' noticing, knowledge, and attitudes. *Mathematics Education Research Journal*, *30*(2), 209–232.

Fujita, T. (2012). Learners' level of understanding of the inclusion relations of quadrilaterals and prototype phenomenon. *The Journal of Mathematical Behavior*, *31*(1), 60–72.

Haj-Yahya, A. (2022). Using theoretical and empirical background information to affect noticing of geometrical thinking. *Educational Studies in Mathematics*, *111*(3), 493–513.

Haj Yahya, A., Mahameed, A., & Arisha Haj Yahya, H. (2024). Does the Use of Concept Maps Affect the Defining and the Understanding of Inclusion Relationships? *Mathematical Thinking and Learning*, 1–30.

Hershkowitz, R. (1989). Visualization in geometry: Two sides of the coin. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, *11*(1), 61–76.

Hershkowitz, R. (1990). Psychological aspects of learning geometry. In P. Nesher, & J. Kilpatrick (Eds.). *Mathematics and cognition: A research synthesis by the International group for the psychology of mathematics education* (pp. 70–95). Cambridge: Cambridge University Press.

Ivars, P., Fernández, C., & Llinares, S. (2020). A Learning Trajectory as a Scaffold for Pre-service Teachers' Noticing of Students' Mathematical Understanding. *International Journal of Science and Mathematics Education*, *18*(3), 529–548.

Jacobs, V. R., Lamb, L. L., & Philipp, R. A. (2010). Professional noticing of children's mathematical thinking. *Journal for Research in Mathematics Education*, *41*(2), 169–202.

Jacobs, V. R., Empson, S. B., Jessup, N. A., Dunning, A., Pynes, D. A., Krause, G., & Franke, T. M. (2022). Profiles of teachers' expertise in professional noticing of children's mathematical thinking. *Journal of Mathematics Teacher Education*.

Jarry-Shore, M., & Borko, H. (2023). The role of contextual knowledge in noticing students' strategies in-the-moment. *Mathematical Thinking and Learning*.

König, J., Santagata, R., Scheiner, T., Adleff, A. K., Yang, X., & Kaiser, G. (2022). Teacher noticing: A systematic literature review of conceptualizations, research designs, and findings on learning to notice. *Educational Research Review*, *36*, 100453.

Magiera, M. T., & Zambak, V. S. (2021). Prospective K-8 teachers' noticing of student justifications and generalizations in the context of analyzing written artifacts and video-records. *International Journal of STEM Education*, *8*(1).

Rodrigues, R. V., Cyrino, M. C., & Oliveira, H. (2019). Percepção profissional de futuros professores sobre o pensamento algébrico dos alunos na exploração de um caso multimídia. *Quadrante*, *28*(1), 100–123.

Sánchez-Matamoros, G., Fernández, C., & Llinares, S. (2019). Relationships among prospective secondary mathematics teachers' skills of attending, interpreting and responding to students' understanding. *Educational Studies in Mathematics*, *100*(1), 83–99.

Scheiner, T. (2023). Shifting the ways prospective teachers frame and notice student mathematical thinking: from deficits to strengths. *Educational Studies in Mathematics*, *114*(1), 35–61.

Sherin, M. G., Jacobs, V. R., & Philipp, R. A. (2011). Situating the study of teacher noticing. In M. G. Sherin, V. R. Jacobs, & R. A. Philipp (Eds.). *Mathematics teacher noticing: Seeing through teachers' eyes* (pp. 3–13). Routledge.

Stockero, S. L. (2021). Transferability of teacher noticing. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik (ZDM), 53*(1), 73–84.

Superfine, A. C., Fisher, A., Bragelman, J., & Amador, J. M. (2017). Shifting perspectives on preservice teachers' noticing of children's mathematical thinking. In E. O. Schack, M. H. Fisher, & J. A. Wilhelm (Eds). *Teacher noticing: Bridging and broadening perspectives, contexts, and frameworks* (pp. 409–426). Berlin: Springer.

Ulusoy, F., & Çakıroğlu, E. (2021). Exploring prospective teachers' noticing of students' understanding through micro-case videos. *Journal of Mathematics Teacher Education*, *24*(3), 253–282.

Villiers, M. (1994). The role and function of a hierarchical classification of quadrilaterals. *For the Learning of Mathematics, 14*(1), 11–18.

ISSN 2764-3158