Tarefas exploratórias e o desenvolvimento do Raciocínio Matemático em aulas de Cálculo Diferencial e Integral

Exploratory tasks and the development of Mathematical Reasoning in Differential and Integral Calculus classes

André Luis Trevisan[1]
Eliane Maria de Oliveira Araman[2]
Anna Flávia Magnoni Vieira[3]

Resumo: Este artigo objetiva compreender de que modo a realização de tarefas exploratórias pode contribuir para o desenvolvimento do raciocínio matemático dos estudantes que cursam a disciplina de CDI. Esta pesquisa insere-se em uma perspectiva qualitativo-interpretativa, e os participantes foram estudantes de cursos superiores, que cursaram a disciplina de CDI 1. Os dados recolhidos para análise foram compostos por (a) protocolos contendo registros escritos das discussões dos pequenos grupos de estudantes, (b) áudios das discussões nos pequenos grupos, e (c) vídeo da discussão coletiva mediada pelo professor a partir das resoluções dos estudantes. Como resultados, inferimos que a tarefa matemática estimulou a mobilização especialmente do processo de conjecturar. Além disso, os estudantes elaboram justificativas para algumas das conjecturas, sendo também capazes de realizar generalizações e expressá-las algebricamente. Sobre as ações do professor, reconhecemos um movimento contínuo e crescente durante a condução da plenária, estando estas relacionadas essencialmente com o aprofundamento das discussões a partir de elementos trazidos pelos próprios alunos e das oportunidades que se criam para a elaboração de conhecimento matemático nesse processo.

Palavras-chave: Ensino de Cálculo Diferencial e Integral. Tarefas exploratórias. Processos de raciocínio matemático. Ações do professor.

Abstract: The aim of this article is to understand how exploratory tasks can contribute to the development of mathematical reasoning in students taking ICD. This research is based on a qualitative-interpretative perspective, and the participants were undergraduate students taking ICD 1. The data collected for analysis consisted of (a) protocols containing written records of the discussions of the small groups of students, (b) audio recordings of the discussions in the small groups, and (c) video of the collective discussion mediated by the teacher based on the students' resolutions. As a result, we infer that the mathematical task stimulated the mobilization of the conjecturing process in particular. In addition, the students developed justifications for some of the conjectures and were also able to make generalizations and express them algebraically. Regarding the teacher's actions, we recognize a continuous and growing movement of teacher actions during the plenary, essentially related to deepening the discussions based on elements brought by the students themselves and the opportunities created for the elaboration of mathematical knowledge in this process.

Keywords: Teaching Differential and Integral Calculus. Exploratory tasks. Mathematical reasoning processes. Teacher actions.

[1] Universidade Tecnológica Federal do Paraná • Londrina, Paraná – Brasil • ✉ andreluistrevisan@gmail.com • ORCID https://orcid.org/0000-0001-8732-1912
[2] Universidade Tecnológica Federal do Paraná • Cornélio Procópio, Paraná – Brasil • ✉ eliane.araman@gmail.com • ORCID https://orcid.org/0000-0002-1808-2599
[3] Universidade Estadual do Paraná • Apucarana, Paraná – Brasil • ✉ anna_flavia_magnoni@hotmail.com • ORCID https://orcid.org/0000-0002-5556-3877

ISSN 2764-3158
Sociedade Brasileira de Educação Matemática

Introdução

Este trabalho procura sistematizar estudos desenvolvidos no âmbito do grupo de pesquisa na qual os autores se inserem, a partir de investigações que analisam os processos envolvidos na caracterização e na implementação de um ambiente de ensino e de aprendizagem para a disciplina de Cálculo Diferencial e Integral (CDI) considerando as condições reais de ensino de curso de Engenharia (Trevisan; Mendes, 2018; Trevisan; Alves; Negrini, 2021).

Como discutido em trabalho anterior apresentado no VIII SIPEM (Trevisan, 2021), havia resultados promissores dessas primeiras investigações. Porém, pouco ainda se sabia a respeito do desenvolvimento do raciocínio matemático dos estudantes, dos conceitos mobilizados e do papel das ações do professor durante esses episódios. Assim, nos últimos quatro anos, essas temáticas foram investigadas com maior profundidade. Estudos envolvendo o raciocínio matemático (RM), em diálogo com pesquisas acerca do ensino e da aprendizagem de CDI, apontaram novas questões a serem investigadas, em especial relacionadas à promoção desse RM em salas de aulas, a partir do trabalho com tarefas de natureza exploratória. Mais especificamente, tomamos como hipótese que os estudantes mobilizam diferentes processos de RM na resolução dessas tarefas e que as ações do professor que podem contribuir para essa mobilização.

Assim, por meio deste artigo, pretende-se sistematizar resultados de investigações acerca do desenvolvimento do RM de estudantes de CDI que cursam Engenharia, e a mobilização de seus diferentes processos, no trabalho com tarefas de natureza exploratória. O objetivo é *compreender de que modo a realização de tarefas exploratórias pode contribuir para o desenvolvimento do raciocínio matemático dos estudantes que cursam a disciplina de CDI*. A partir do objetivo e hipótese de pesquisa, elencam-se as seguintes questões de investigação:

- Quais processos do RM são mobilizados pelos estudantes de CDI ao resolver tarefas de natureza exploratória?
- Como as ações do professor contribuem para que diferentes processos do RM sejam mobilizados pelos estudantes de CDI?

Como hipótese, considera-se o trabalho com episódios de resolução de tarefas, sendo essas de natureza exploratória (ou, matematicamente ricas), atrelado ao papel e as ações do professor (seja na seleção das tarefas, ou na condução de discussões) como potencializador do desenvolvimento do RM dos estudantes.

Sintetizamos, na continuidade deste trabalho, alguns resultados de pesquisas que caracterizam o RM e seus processos, e discutem as ações do professor que o apoiam. Mais especificamente, articulamos resultados já apresentados por Trevisan, Negrini, Falchi e Araman (2023) e Trevisan, Araman, Silva, Araújo, Souza e Castilho (2024). Apresentamos o contexto em que os estudos foram realizados e procedimentos metodológicos assumidos nas investigações. Analisamos dados provenientes de duas tarefas exploratórias propostas a estudantes de CDI e, por fim, discutimos os dados analisados, a luz do referencial teórico proposto, apresentando implicações para o ensino e a pesquisa em CDI.

1 Referencial teórico

A disciplina de CDI é uma parte integrante essencial do núcleo básico de cursos de Ciências Exatas no Brasil, em especial das Engenharias, e deve contribuir para a desenvolvimento de processos de raciocínio necessárias à formulação e solução de problemas de diversas áreas, à análise e compreensão de fenômenos e sua validação por experimentação e à comunicação eficaz, oral, escrita e gráfica (Brasil, 2019). Constitui-se como uma importante

ISSN 2764-3158

ferramenta capaz de desenvolver critérios essenciais para a interpretação e resolução de problemas do cotidiano profissional (Guimarães, 2019).

Entretanto, além da defasagem no conhecimento matemático prévio dos estudantes (Ghedamsi & Lecorre, 2021), a estrutura didático-pedagógica dos cursos de Engenharia, na qual prevalece ainda uma metodologia de ensino tradicional que prioriza aulas expositivas e centradas no professor (Cabral, 2015), contribuem para a reprovação na disciplina de CDI e a evasão no curso (Thompson & Harel, 2021; Zarpelon, Resende & Reis, 2017). Além disso, apesar dos avanços em fundamentos teóricos a respeito do ensino e da aprendizagem da matemática terem contribuído no âmbito das pesquisas no Ensino Superior, pouco são os seus reflexos na sala de aula de CDI (Rasmussen, Marrongelle & Borba, 2014).

Pesquisas desenvolvidas no âmbito do ensino da Matemática (com resultados que podem contribuir para reverter o quadro mencionado acima) apontam que abordagens de ensino promissoras são aquelas em que os estudantes trabalham de forma colaborativa (Granberg & Olsson, 2015), envolvendo-se em discussões matemáticas (Ribeiro, Aguiar, Trevisan & Elias, 2021; Rodrigues, Menezes & Ponte, 2018), resolvendo tarefas de natureza exploratória (Ponte, 2005), contribuindo assim para o desenvolvimento do RM dos estudantes.

Assim, a constituição de ambientes de ensino e de aprendizagem com tais características, no âmbito da disciplina de CDI (Trevisan & Mendes, 2018), assume importância singular no contexto do ensino em Engenharia. O engajamento dos estudantes no trabalho com tarefas pode levá-los a mobilizar diferentes processos do raciocínio matemático, por meio da elaboração de conjecturas e sua posterior justificação, validação ou refutação (Lannin, Ellis & Elliot, 2011).

Entender o que é e como desenvolver, no Ensino de Matemática, o RM apresenta-se como temática de investigação emergente tanto em pesquisas científicas internacionais quanto nacionais (Araman, Serrazina & Ponte, 2019; Mata-Pereira & Ponte, 2018; Trevisan & Araman, 2021). Apesar da relevância do tema, orientações curriculares não apresentam uma definição ou direção para seu efetivo desenvolvimento junto aos estudantes (Gross, Souza & Trevisan, 2022).

De modo bastante simplificado, “raciocinar matematicamente consiste em fazer inferências justificadas [...] ou seja, utilizar informação matemática já conhecida para obter, justificadamente, novas conclusões” (Mata-Pereira & Ponte, 2018, p. 782). Essa temática vem ganhando espaço internacionalmente há algumas décadas, em razão de visões contemporâneas sobre a importância da Matemática para a formação crítica do cidadão, com implicações em relação ao que significa aprender Matemática com sucesso (Goos & Kaya, 2020).

Na perspectiva de entendimento do RM, há dois aspectos que podem ser considerados: o estrutural e o de processos (este, nosso foco de interesse). Lannin, Ellis e Elliot (2011) apresentam estes processos: conjecturar, generalizar, investigar o porquê e desenvolver e avaliar argumentos. De modo similar, Jeannotte e Kieran (2017) apontam que processos de raciocínio podem ser organizados e caracterizados da seguinte forma: (i) a procura de semelhanças e diferenças, como sejam os processos de generalizar, conjecturar, identificar um padrão, comparar e classificar; (ii) a validação, como sejam os processos de justificar e provar; e (iii) o suporte a outros processos de raciocínio, como seja o processo de exemplificar.

Segundo Jeannotte e Kieran (2017) conjecturar é um processo cíclico de: (i) enunciar a conjectura; (ii) verificar se cobre todos os casos e exemplos; (iii) tentar refutar; e (iv) encontrar um motivo que faça com que a conjectura seja verdadeira ou tentar modificá-la. Os estudantes podem criar conjecturas válidas ou inválidas, alicerçadas em raciocínios válidos ou por vezes inválidos, sendo que esses últimos, embora não desejados, podem servir como ponto de partida para o entendimento das ideias matemáticas.

Justificar, por sua vez, relaciona-se à explicação de uma conjectura inicialmente elaborada, apresentando motivos (argumentos) para alterar o valor epistêmico primeiramente de "provável para mais provável", e em seguida para verdadeiro ou falso. Assim, entendemos justificar como intimamente relacionado ao "investigar o porquê" e à elaboração de argumentos pelos estudantes "para se convencerem e aos outros porque é que uma afirmação particular é verdadeira" (Lannin, Ellis & Elliot, 2011, p. 35), recorrendo, para tal, a diferentes conceitos matemáticos. É fundamental que os estudantes sejam encorajados a explicarem e justificarem os seus raciocínios e soluções, desenvolvendo deste modo, com o apoio do professor, a sua compreensão.

Uma generalização implica, "inferir narrativas sobre um conjunto de objetos matemáticos ou uma relação entre objetos" (Jeannote & Kieran, 2017, p. 9). Sendo assim, no processo de generalizar, reconhece-se um padrão ou uma propriedade comum a um conjunto de objetos, e se é capaz de expandir o domínio de validade de uma propriedade a um conjunto maior de objetos (Ponte & Mata-Pereira, 2017).

No que tange à mobilização desses processos, Rodrigues, Menezes e Ponte (2018, p. 399) apontam o papel dos momentos de discussões matemáticas como favorecendo o "envolvimento [dos estudantes] na apresentação, justificação, argumentação e negociação de significados para os seus raciocínios". Tanto a escolha das tarefas – em especial em termos do grau de desafio (Potari & Jaworski, 2002) quanto as ações do professor, na exploração de desacordos entre os estudantes (Wood, 1999), assumem importância singular nesse contexto.

Araman, Serrazina e Ponte (2019), como sistematização dos trabalhos de Ponte, Mata-Pereira e Quaresma (2013) e Ellis, Özgür e Reiten (2019), organizaram um quadro de análise (Quadro 1) que descreve as ações docentes que apoiam o raciocínio matemático, e que tem servido como suporte para análises no contexto de aulas de CDI (Trevisan & Volpato, 2022; Trevisan, Negrini, Falchi & Araman, 2024).

Quadro 1: Quadro de análise das ações do professor.

CATEGORIAS	Convidar	- Solicita respostas para questões pontuais. - Solicita relatos de como fizeram.	AÇÕES
	Guiar/Apoiar	- Fornece pistas aos alunos. - Incentiva a explicação. - Conduz o pensamento do aluno. - Focaliza o pensamento do aluno para fatos importantes. - Encoraja os alunos e re-dizerem suas respostas. - Encoraja os alunos a re-elaborarem suas respostas.	
	Informar/Sugerir	- Valida respostas corretas fornecidas pelos alunos. - Corrige respostas incorretas fornecidas pelos alunos. - Re-elabora respostas fornecidas pelos alunos. - Fornece informações e explicações. - Incentiva e fornece múltiplas estratégias de resolução.	

ISSN 2764-3158

	Desafiar	- Solicita que os alunos apresentem razões (justificativas). - Propõe desafios. - Encoraja a avaliação. - Encoraja a reflexão. - Pressiona para a precisão. - Pressiona para a generalização.	

Fonte: Araman, Serrazina e Ponte (2019, p. 476)

2 Metodologia da pesquisa

Esta pesquisa insere-se em uma perspectiva qualitativo-interpretativa (Bogdan & Biklen, 1994; Crotty, 1998), que pressupõem o próprio investigador como principal instrumento de coleta, descrição e análise dos dados. Como detalhado por Carneiro, Araman e Trevisan (2022), esta pesquisa atende às cinco as características básicas que configuram um estudo qualitativo apontadas por Bogdan e Biklen (1994), listadas a seguir:

- Na investigação qualitativa a fonte direta de dados é o ambiente natural, constituindo o pesquisador e elemento principal. Os dados que fundamentam as análises de nossas pesquisas serão coletados em salas de aulas regulares, que incluem de CDI em cursos de Engenharia na UTFPR.
- A investigação qualitativa é descritiva. Os dados coletados, que se constituem de registros escritos dos alunos, gravações em áudio das suas resoluções e gravações em vídeo de discussões conduzidas pelo professor com a turma são descritos de forma minuciosa, buscando respeitar a forma com que foram registrados tanto quanto possível.
- Os investigadores qualitativos se interessam mais pelo processo do que simplesmente pelos resultados ou produtos. O interesse das pesquisas envolvendo o raciocínio matemático está nos processos do raciocínio matemático que os estudantes mobilizam ao resolverem uma tarefa, bem como nas ações do professor que contribuem para esse desenvolvimento. Portanto, interessa o processo de resolução da tarefa, não somente o resultado final.
- Os investigadores qualitativos tendem a analisar seus dados de forma indutiva. Não há uma hipótese predefinida a ser confirmada pelos dados. As conclusões da pesquisa são construídas na medida em que os dados são analisados.
- O significado é de vital importância na abordagem qualitativa. Como a análise centra-se nos processos do raciocínio matemático dos alunos e nas ações do professor, é de vital importância compreender os significados que eles atribuíam à tarefa e ao seu processo de resolução.

Os participantes foram estudantes de cursos superiores de Engenharia da UTFPR, câmpus Londrina, que cursaram a disciplina de CDI 1, sob responsabilidade do primeiro autor. Essa disciplina, com uma carga de 90 horas-aula, contempla o estudo de funções, limites, derivadas e integrais de funções reais, de uma variável real. Em geral, 25 horas do curso (cerca de 10 encontros de 3 horas-aula de 50 minutos) foram dedicadas ao trabalho com episódios de resolução de tarefas, com os 40 estudantes da turma organizados em grupos de dois ou três integrantes. Durante esses episódios, o professor acompanhou o trabalho e faz intervenções, quando necessário. Ao final de cada um deles houve uma discussão coletiva, mediada pelo professor a partir das resoluções dos estudantes, havendo a sistematização de conceitos.

A tarefa 1 (Figura 1), adaptada de Trevisan e Goes (2016) e discutida por Trevisan et al.

(2024), objetiva contribuir para interpretação da integral definida de uma função a medida da área delimitada pelo gráfico dessa função e o eixo das abscissas do plano cartesiano em um intervalo dado.

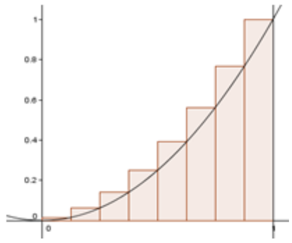
Figura 1 - Tarefa: Área de um segmento parabólico

1. Considere a região delimitada pela curva $f(x) = x^2$, pelo eixo e pelas retas $x = 0$ e $x = 1$.

a) Suponha que a região seja preenchida por retângulos, como na figura ao lado, todos com a mesma base. Construa uma sequência em que cada termo representa a medida da área de um desses retângulos. Trabalhe com números racionais na forma fracionária.

b) Represente em notação de somatório a soma desses termos e efetue seu cálculo.

c) Nesse contexto, construa uma figura que ilustre $\sum_{i=0}^{7} \frac{1}{8} f(x_i)$.



Fonte: Adaptado de Trevisan e Goes (2016)

A tarefa 2, discutida em detalhes por Trevisan et al. (2023), foi adaptada de Santos e Bianchini (2002), e teve o seguinte enunciado: “Um tanque contém 5000 litros de água pura. Uma mistura contendo 750g de sal diluídos em 25 litros de água é bombeada para o tanque a cada minuto. Investigue como se comporta a concentração da água no tanque para valores de tempo ‘muito grandes’”.

Os dados recolhidos para análise foram compostos por (a) protocolos contendo registros escritos das discussões dos pequenos grupos de estudantes, (b) áudios das discussões nos pequenos grupos, e (c) vídeo da discussão coletiva mediada pelo professor a partir das resoluções dos estudantes. As gravações em áudio e vídeo foram transcritas na íntegra, em articulação com os protocolos produzidos, propiciando assim, a organização e a análise dos dados.

Na intenção de reconhecer uma maior variedade de processos de raciocínio que foram mobilizados, bem como evidenciar argumentos apresentados pelos estudantes, no caso do primeiro item da tarefa 1, foram considerados dados dos tipos (a) e (b), tomando por critério para escolha do grupo em análise um maior envolvimento dos estudantes na “apresentação, justificação, argumentação e negociação de significados” (Rodrigues, Menezes & Ponte, 2018, p. 399) – aqui indicados por E1 e E2. Por sua vez, com objetivo de compreender como as ações do professor (P) podem contribuir para o desenvolvimento do RM, destacamos dados em (c), considerando um trecho da plenária da tarefa 2 na qual entendemos ter havido uma participação expressiva dos estudantes (indicados por A1, A2, ...), e uma maior variedade dessas ações, de acordo com o Quadro 1 de Araman, Serrazina e Ponte (2019).

Os resultados estão organizados, sequencialmente e separadamente, para cada uma das tarefas propostas, buscando responder às duas questões de pesquisa anunciadas na introdução do artigo.

3 **Análises dos dados**

3.1 Tarefa 1

Nos trechos a seguir, enquanto o grupo resolve o item (a) da tarefa, evidenciamos alguns processos de RM envolvidos:

ISSN 2764-3158

> **E2:** Acho que [a altura] é zero dois, zero quatro né? É isso mesmo.
> **E1:** O zero vírgula seis ele tá na mesma altura aqui?
> **E2:** Então, foi o que eu falei, o zero quatro tá, o zero quatro tá certinho mas esse daqui eu acho que não tá não.

Em um primeiro momento, o grupo busca uma forma de calcular a medida da área dos retângulos. Ao olhar a representação gráfica dada na tarefa, eles inicialmente conjecturam que os valores representados no eixo y correspondem à medida da altura dos retângulos. Porém, logo começam a perceber que nem todos os retângulos estão tão próximos da marcação gráfica. Assim, a conjectura é descartada. Continuando a discussão, ainda buscando uma forma de encontrar a medida da altura dos retângulos, o grupo elabora uma nova conjectura, de que esta poderia ser calculada a partir da expressão algébrica da função:

> **E2:** Aqui ó, ele dá a fórmula [$f(x) = x^2$].
> **E1:** O x a gente pode colocar tipo um oitavo, dois oitavos, três oitavos, quatro oitavos…
> **E2:** Se você fizer a conta do [cinco] oitavo[s] aqui ó, a altura disso aqui vai dar zero vírgula trinta e quatro… [na verdade] trinta e nove, é bem aproximado, se você usar, isso daqui, aqui como cinco oitavos e esse daqui…

O estudante E2 justifica que a expressão $f(x) = x^2$, dada no enunciado da tarefa, poderia ser utilizada, e os estudantes passaram então a calcular as medidas das alturas pela substituição de x nos pontos dados. Como forma de validar os valores encontrados, a partir de uma justificação empírica, eles encontraram um número racional na forma fracionária ao substituir o x na expressão. Posteriormente, transformaram esse número racional na forma fracionaria em um número racional na forma decimal, reconhecendo a validade do valor encontrado e justificando estar próximo ao valor indicado no eixo das ordenadas na representação que estava junto ao enunciado da tarefa.

Tendo generalizado uma forma de obter as medidas das alturas dos retângulos, o foco da discussão passa a ser a determinação das medidas das bases, como mostra o trecho abaixo:

> **E1:** A base seria cinco oitavos e a altura zero quatro, você vai ter que construir a sequência do retângulo.
> **E2:** Essa daqui é a área do primeiro retângulo, que é altura é… não, tá errado, aqui é um oitavo, porque a base é um oitavo só.
> **E1:** A base do retângulo né? É porque no caso dos retângulos ele ia pegar, aqui ó a base dele aqui ó seria esse valor, esse aqui.
> **E2:** Aham, que é um oitavo.

O grupo inicialmente conjetura que a medida da base é igual ao valor da função em um ponto de abscissa x, mas logo ela é descartada, pois reconhecem que a medida da base é a distância entre dois pontos consecutivos da partição. A partir das informações constantes no enunciado da tarefa, generalizam que, em qualquer um dos retângulos, ela sempre será igual a um oitavo. A discussão prossegue:

> **E2:** A altura do primeiro é zero, aí esse daqui seria dois oitavos. É elevado ao quadrado. Dá um dezesseis avos.
> **E1:** Deixa eu anotar aqui.
> **E2:** Altura do primeiro é zero, segundo é um dezesseis avos, do terceiro é quanto?
> **E1:** Da nove [sobre] sessenta e quatro.

> **E2:** Talvez tenha um retangulozinho aqui, mas é que a gente não tá vendo.
> **E1:** Pode ser.
> **E3:** Eu também acho que tem um retangulozinho aqui.
> **E2:** Aqui tem um retângulo pequeno? Ou é zero mesmo?
> **E1:** Tem, aqui não é zero.
> **E2:** Aqui é um oitavo, não, calma. É um sobre oito ao quadrado. Aqui é um [sobre] sessenta e quatro.
> **E1:** Isso aí, agora tá certo. Agora quatro oitavos que é esse daqui. Tem que dar maior que zero [vírgula] dois.
> **E2:** Quatro vezes quatro é dezesseis. Fica então dezesseis sessenta e quatro que dá para simplificar, dá para simplificar por quatro dezesseis eu acho. Não, dá quatro dezesseis, é só simplificar, [fica] um quarto.

Inicialmente, o estudante E2 formula uma conjectura que a medida da altura do primeiro retângulo era zero e, assim, a medida de sua área era zero. O estudante parece apresentar uma justificação empírica, a partir da observação da representação gráfica, que mostra um primeiro retângulo com altura medida muito próxima de zero. Na continuidade da discussão, porém, esse mesmo estudante percebe que sua conjectura estava errada e a reformula, sendo que a medida da altura do primeiro retângulo é, na verdade, $\left(\frac{1}{8}\right)^2 = \frac{1}{64}$. Novamente, representam alguns resultados em notação decimal como justificativa empírica de sua validade, pelo fato do valor obtido estar próximo ao valor indicado no eixo y na representação que estava junto ao enunciado da tarefa.

Além disso, o grupo opta, quando possível, por encontrar frações equivalentes ás datas na forma irredutível, possivelmente por ser uma prática comum em suas aulas de Matemática. Tal decisão, porém, torna mais difícil a percepção de um padrão existente na sequência de medidas de alturas, como discutiremos mais adiante.

Após efetuarem o cálculo das medidas das áreas de todos os retângulos, o estudante E2 percebe a existência de um padrão na sequência obtida, o que o leva a um processo de generalização, como mostra o trecho a seguir:

> **E2:** Então eu acho que é esse daqui. Esse daqui é a altura de cada termo, e a largura é sempre um oitavo, então eu acho que a somatória vai ser… vai ser… n oitavo ao quadrado vezes um oitavo, vai ser cada termo.

Nesse trecho, temos que o estudante E2 generaliza que $\left(\frac{n}{8}\right)^2 \frac{1}{8}$ seria uma forma algébrica para representar as medidas das áreas, sendo $\left(\frac{n}{8}\right)^2$ a medida da altura, e $\frac{1}{8}$ a medida da base.

Sintetizando esta análise destacamos que foram fundamentais as discussões entre os estudantes que possibilitaram a mobilização de diferentes processos de RM organizados no Quadro 2.

Quadro 2: Processos de raciocínio envolvidos na discussão do grupo.

FORMULAR CONJECTURAS	• Os valores representados no eixo y correspondem à medida da altura dos triângulos; • A medida da altura dos retângulos pode ser calculada a partir da expressão algébrica da função; • A medida da base do retângulo é igual ao valor da função em um ponto de abscissa x; • A medida da base é a distância entre dois pontos consecutivos da partição • A medida da altura do primeiro retângulo é zero;

	• A medida da área do primeiro retângulo é nula. • A medida da altura do primeiro retângulo é $\left(\frac{1}{8}\right)^2 = \frac{1}{64}$.
JUSTIFICAR	• A expressão $f(x) = x^2$ pode ser usada para cálculo da medida da altura dos retângulos • Os valores em notação decimal podem ser comparados com valores indicados no eixo das ordenadas na representação que estava junto ao enunciado da tarefa. • A representação gráfica, mostra um primeiro retângulo com medida de altura muito próxima de zero.
GENERALIZAR	• Em qualquer um dos retângulos, a medida da base sempre será igual a um oitavo; • A expressão $\left(\frac{n}{8}\right)^2 \frac{1}{8}$ representa as medidas das áreas.

Fonte: autores

3.1 Tarefa 2

O trecho a seguir ilustra o início da discussão coletiva, na qual o professor convida os alunos a participarem, e uma discussão sobre a resolução de um dos grupos se sucede. Ao final de cada uma de suas falas, como parte da análise realizada, destacamos a ação envolvida.

> **[1.1] P**: Então vamos lá, vamos explorar um pouco essa situação… alguma equipe queira sintetizar o que pensou? **(Convidar)**.
> **[1.2] A1:** A gente quer. Primeiro a gente avaliou como variava a quantidade de sal e a quantidade de litro de água. Aí a gente fez uma tabelinha e depois uma fórmula que sintetizasse a tabelinha.
> **[1.3] P**: E essa tabela vocês fizeram que tipo de cálculo? **(Guiar/apoiar).**
> **[1.4] A1:** De concentração.
> **[1.5] P**: O que a gente está entendendo como concentração, à propósito? **(Guiar/apoiar)**.
> **[1.6] A1**: Quantidade de sal em água.
> **[1.7] P**: Então tá[4], a gente está pensando com concentração aqui como uma relação que é dada por uma divisão **(Informar/sugerir)**. Qual? **(Guiar/apoiar)**.
> **[1.8] A1**: A fórmula que a gente fez é a concentração igual a 750 vezes o t [referindo-se ao tempo], porque no $t = 1$ vai ter 750g de sal. No $t = 2$, vai ter 1500. Dividido pelo volume, que vai ser os 5000 fixo mais 25 vezes o t.
> **[1.9] P**: Então deixa eu colocar essa fórmula [anota na lousa $C = \frac{750t}{5000+25t}$]**(Informar/sugerir)**.
> **[1.10] A1**: Daí a gente pensou, quando o tempo for muito, muito, muito grande, os 5000 vai se tornar nada praticamente, então significa que a concentração máxima que vai chegar vai ser 750 dividido por 25, que vai ser o limite, que vai dar 30.
> **[1.11] P**: então vocês concluem que… **(Guiar/apoiar)**.
> **[1.12] A1:** que a concentração, concentração não vai passar de 30.
> **[1.13] P:** a concentração não vai passar de 30. Quando a gente pensa que a concentração não vai passar de 30, de algum modo ela está se aproximando desse 30. **(Informar/sugerir).**

[4] Embora informal, essa expressão será mantida, pois é recorrente na fala do professor, em geral, para validar as respostas dos alunos.

ISSN 2764-3158

Neste trecho, observa-se que as ações do professor podem se enquadrar em três categorias: "Convidar, Guiar/apoiar e Informar/sugerir". Como podemos observar, a categoria "Convidar" ocorre quando o professor, em [1.1], chama alguma equipe para relatar aos colegas como pensou em resolver a tarefa e solicita que os integrantes expliquem o que fizeram, compartilhando seu raciocínio com os demais alunos da classe. Em alguns momentos, o professor faz perguntas com a finalidade de obter respostas para determinadas questões, como em [1.3] e [1.5]. Tais ações visam chamar a atenção para alguns aspectos da resolução da tarefa, conduzindo o pensamento do aluno de modo a esclarecer o seu raciocínio, enquadrando-se na categoria "Guiar/apoiar". Tal ação também é reconhecida em [1.7], quando o professor pede ao aluno que explicite a relação que utilizou para expressar a concentração e em [1.11], quando o professor guia o aluno de modo a elaborar alguma conclusão a partir do seu relato, e ele afirma que "a concentração não vai passar de 30".

Algumas ações do professor nesse trecho podem ser classificadas como "Informar/sugerir". Por exemplo, em [1.7], o professor fornece uma pista aos alunos, enfatizando que a fórmula da concentração envolve uma divisão e, em seguida, orienta o aluno para que possa expressar a fórmula de concentração por ele encontrada. Também, em [1.9], quando o professor anota, na lousa, a fórmula relatada, confirmando/validando a resolução do aluno e compartilhando com a turma toda. Por fim, em [1.13], o professor repete a resposta do aluno, validando a afirmação de que a concentração está se aproximando de 30.

Na continuidade, o professor focaliza a discussão acerca do gráfico da função conforme o trecho transcrito a seguir.

Trecho 2

[2.1] P: E como é que essa concentração está mudando ao longo do tempo, de uma maneira linear? Ou seja, o gráfico seria uma reta? Quem pensou nesse gráfico conclui o que desse gráfico? O que vocês pensaram? [apontando para outro grupo] **(Guiar/apoiar)**.
[2.2] A2: A gente fez essa mesma fórmula, e a gente calculou esse limite, que seria 30 gramas por litro. No começo, a concentração era muito baixa, e conforme vimos que o gráfico é crescente mas chega uma hora que vai aproximando desse limite [faz uma representação do gráfico com as mãos, indicando concavidade para baixo].
[2.3] P: Mas o que leva vocês a concluírem que o gráfico tem esse formato aqui [indica com as mãos um gráfico representado por uma curva com concavidade voltada para baixo], e não esse formato aqui? [indica com as mãos um gráfico gráfico representado por uma curva com concavidade voltada para cima]. **(Guiar/apoiar)**.
[2.4] A3: Porque ele começa crescendo depois estabiliza. Se tivesse esse formato [indica com as mãos um gráfico um gráfico representado por uma curva com concavidade voltada para cima]... como chama aquele negócio lá? Um bico! Ele teria que dar indícios que teria um bico.
[2.5] P: E por que não poderia acontecer aquilo que vocês me disseram lá no problema do boato[5]? [O professor vai construindo na lousa um gráfico côncavo para cima ilustrando a situação relatada]: vai espalhando, espalhando, espalhando o boato, e quando não tem mais gente estabiliza. **(Desafiar)**.
[2.6] A4: Porque ainda vai continuar caindo mais água.
[2.7] A5: Eu acho que vai ficar uma curva assim [indica com as mãos um gráfico côncavo para baixo]. Côncavo para baixo. Porque, à medida que a

[5] Refere-se a uma situação já discutida anteriormente na turma, envolvendo a variação do número de pessoas que sabem do boato como uma função do tempo.

ISSN 2764-3158

concentração vai aumentando, menos diferença, à medida que o tempo passa, ela vai fazendo.

Nesse trecho, o professor questiona um novo grupo de estudantes, na tentativa de explicitarem como estão pensando a respeito do gráfico que representa a concentração como uma função do tempo e qual compreensão têm a respeito da sua concavidade. Pode-se observar que as ações do professor, com a discussão já mais avançada, alternam-se entre as categorias de "Guiar/apoiar e Desafiar". Em um primeiro momento, de forma mais direta, guia o aluno a explicar seu raciocínio sobre a concavidade da curva que é a representação do gráfico em [2.3], fazendo o aluno questionar por quais razões a curva que é a representação do gráfico tem a concavidade para baixo, e não para cima.

Na continuidade, em [2.5], a partir da ideia de "bico", trazida por A3, o professor desafia a turma a explicar porque a curva que representa o gráfico é formada por um trecho de uma curva que é côncava para cima unido a um segmento de reta horizontal não poderia representar a situação em análise. Dois outros estudantes participaram, então, da discussão, e um deles utiliza a expressão "menos diferença" em [2.7], a qual o professor focaliza para prosseguir a discussão, conforme detalhado por Trevisan et al. (2023).

4 Discussão dos dados e considerações finais

Neste trabalho, como forma de responder à primeira questão de pesquisa, identificamos os processos de RM mobilizados por estudantes de CDI, evidenciando que a tarefa exploratória em questão (Ponte, 2005) mostrou-se desafiadora (Potari & Jaworski, 2002) e com potencial para a introdução ao conceito de Integral de Riemann, tendo em vista sua forma mais intuitiva de trabalhar e se familiarizar com elementos envolvidos nesse conceito.

Como resultados, inferimos que a tarefa matemática estimulou a mobilização especialmente do processo de conjecturar, em especial na busca de compreender como expressar as medidas da base, da altura e da área dos retângulos. Tais conjecturas, foram alicerçadas em raciocínios ora válidos, ora inválidos (Jeannotte & Kieran, 2017), ambos servindo como como ponto de partida para o entendimento das ideias matemáticas associadas ao conceito de Integral de Riemann.

Também, reconhecemos que os estudantes elaboram justificativas para algumas das conjecturas, seja de forma mais sistemática, a partir de conceitos envolvidos na tarefa, ou de forma empírica, usando a representação que estava junto ao enunciado da tarefa. Os estudantes procuravam, durante a discussão da tarefa, convencerem a si próprios ou um ao outro de porque uma conjectura seria verdadeira (Lannin, Ellis & Elliot, 2011), aspecto fundamental para sua compreensão da tarefa e dos conceitos subjacentes

Por fim, os estudantes foram capazes de generalizar a medida das alturas e das áreas dos retângulos e, no caso desta última, expressá-la algebricamente. Tal processo envolveu o reconhecimento de uma propriedade comum (a mesma medida de base para todos os retângulos) e a expansão do domínio de validade daquele "modo" de calcular a área para todos os retângulos (Ponte & Mata-Pereira, 2017).

No que tange à segunda questão de pesquisa, relacionada às ações do professor, nota-se que o início da discussão tem origem na ação de "Convidar", na qual os alunos foram solicitados a relatar aos demais como resolveram a tarefa, possibilitando que os alunos pudessem expor as suas ideias iniciais e resoluções (Ponte, Mata-Pereira & Quaresma, 2013). Normalmente, são as primeiras ações desempenhadas pelo professor, com o intuito de inserir ou iniciar os alunos na discussão. Depois disso, elas são substituídas por ações das demais categorias (Araman, Serrazina & Ponte, 2019).

Posteriormente, podemos observar as ações de "Guiar/Apoiar" em momentos nos quais o professor buscou destacar alguns aspectos da fala dos estudantes. Em um primeiro momento clarificou a construção da fórmula e, em seguida, destacou alguns aspectos do gráfico. Ações dessa categoria tiveram um papel dominante em todos os trechos, desde os questionamentos de questões pontuais até em questões que possam conduzir o pensamento dos alunos à construção coletiva de generalizações, contribuindo para o progresso do RM dos alunos (Ellis, Özgür & Reiten, 2019).

Na categoria "Informar/sugerir", as ações consistiram em trazer informações envolvendo definições, nomenclaturas e conceitos que eram novos para a turma, no intuito de sistematizá-los. Envolveu, também, momentos para validar as respostas corretas, corrigir as incorretas ou, ainda, reelaborar uma resposta e compartilhá-la com os demais alunos, possibilitando a participação de todos os alunos, além de garantir o acesso de todos àquela informação (Araman, Serrazina & Ponte, 2019). Por exemplo, ao repetir uma resposta correta dada por um aluno, além de validá-la, o professor possibilita que aquela informação seja compartilhada com os demais alunos. As ações dessa categoria e da categoria anterior subsidiam a discussão da turma, tornando-a cada vez mais produtiva e com possibilidades de desenvolvimento de processos de RM mais elaborados (justificar e generalizar) que, normalmente, culminam com as ações da próxima categoria.

Finalmente ações da categoria "Desafiar" são reconhecidas nos momentos em que o professor procurou aprofundar justificativas de fatos trazidos. Desse modo, ações dessa categoria podem auxiliar os alunos a esclarecer seus significados e fornecerem razões para justificar e fundamentar seu pensamento (Wood, 1999). Em síntese, reconhecemos um movimento contínuo e crescente das ações do professor durante a condução da plenária, relacionadas essencialmente com o aprofundamento das discussões a partir de elementos trazidos pelos próprios alunos e das oportunidades que se criam para a elaboração de conhecimento matemático nesse processo.

Um fator determinante diz respeito às atitudes e às concepções dos atores envolvidos no contexto das discussões matemáticas (Ponte, 2005) que ocorreram em torno das duas tarefas (no caso da primeira, no pequeno grupo; e da segunda, com toda a turma). Destacam-se, aqui, os processos comunicativos que se estabeleceram na sala de aula, centrados tanto em ideias matemáticas importantes quanto no desenvolvimento de significados matemáticos (Ellis, Özgür & Reiten, 2019). O envolvimento da dupla de estudantes com a tarefa 1, e os tipos de questionamentos utilizados pelo professor na discussão da tarefa 2 subsidiaram a mobilização de diferentes processos de RM, possibilitando a negociação de significados entre os envolvidos (Mata-Pereira & Ponte, 2018).

Por fim, destaca-se, também, o papel da tarefa proposta e suas potencialidades com relação a esses processos do RM. Seu caráter exploratório (Ponte, 2005) com a possibilidade de utilização, em sua resolução, de diferentes registros (verbal, gráfica, tabular e algébrica) ampliou a exploração de representações relevantes ao conceito de funções racionais, o estabelecimento de conexões entre a Matemática e outras áreas (no caso, um contexto da semirrealidade da Engenharia).

Agradecimentos

Os autores agradecem à Fundação Araucária, ao CNPq, à Unespar e à UTFPR, campus Londrina, Cornélio Procópio e Ponta Grossa pelo apoio à realização e divulgação da pesquisa.

Referências

Araman, E. M. O., Serrazina, M. L., & Ponte, J. P. (2019). "Eu perguntei se o cinco não tem metade": ações de uma professora dos primeiros anos que apoiam o raciocínio matemático. **Educação Matemática Pesquisa**, 2 (2), 466-490.

Bogdan, R. & Biklen, S. (1994). **Investigação Qualitativa em Educação**: uma introdução à teoria e aos métodos. Porto Alegre: Porto Editora.

Brazil. (2019). Ministério da Educação. Resolução no 2, de 24 de abril de 2019. Institui as Diretrizes Curriculares Nacionais do Curso de Graduação em Engenharia. **Diário Oficial da União**, Brasília, Edição 89. Seção 1, p. 43.

Cabral, T. C. B. (2015). Metodologias Alternativas e suas Vicissitudes: ensino de matemática para engenharias. **Perspectivas da Educação Matemática**, 8 (17), 208-245.

Carneiro, L. F. G., Araman, E. M. O., & Trevisan, A. L. (2022). Procedimientos metodológicos en la investigación del razonamiento matemático de estudiantes cuando resuelven tareas exploratorias. **Paradigma**, 43 [s.n.], 132-157.

Crotty, M. (1998). **The foundations of social research: meaning and perspective in the research process**. London: Sage.

Ellis, A., Özgür, Z., & Reiten, L. (2018). Teacher moves for supporting student reasoning. **Mathematics Education Research Journal**, 30(2), 1-26.

Ghedamsi, I., & Lecorre, T. (2021). Transition from high school to university calculus: a study of connection. **ZDM**, 53 [s.n.], 563–575.

Goos, M., & Kaya, S. (2020). Understanding and promoting students' mathematical thinking: a review of research published in ESM. **Educational Studies in Mathematics**, 103 [s.n.], 7-25.

Granberg, C., & Olsson, J. (2015). ICT-supported problem solving and collaborative creative reasoning: Exploring linear functions using dynamic mathematics software. **Journal of Mathematical Behavior**, 37, 48–62

Gross, G. F. C., Souza, A. V. P., & TREVISAN, A. L. (2023). Raciocínio matemático em documentos e orientações curriculares: o que a literatura destaca? **Revista de Ensino de Ciências e Matemática**, 14, 1-23.

Guimarães, G. (2019). Novas tendências de aprendizagem em engenharia: O aluno como protagonista na produção do conteúdo curricular na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral. **Revista de ensino de Engenharia,** 38 (1), 81-91.

ISSN 2764-3158

Jeannotte, D., & Kieran, C. (2017). A conceptual model of mathematical reasoning for school mathematics. **Educational Studies in Mathematics**, 96(1), 1-16.

Lannin, J., Ellis, A. B., & Elliot, R. (2017). **Developing essential understanding of mathematics reasoning for teaching mathematics in prekindergarten-grade 8**. Reston: National Council of Teachers of Mathematics.

Mata-Pereira, J., & Ponte, J. (2018). Promover o raciocínio matemático dos alunos: uma investigação baseada em design. **Bolema**, 32 (62), 781-801.

Ponte, J. P. Gestão curricular em Matemática. (2005). In: GTI (Ed.). **O professor e o desenvolvimento curricular** (pp. 11-34). Lisboa: APM.

Ponte, J. P., Mata-Pereira, J., & Quaresma, M. (2013). Ações do professor na condução de discussões matemáticas. **Quadrante**, 22(2), 55-81.

Potari, D., & Jaworski, B. (2020). Tackling complexity in mathematics teaching development: Using the teaching tool for reflection and analysis. **Journal of Mathematics Teacher Education**, 5, 351-380.

Rasmussen, C, Marrongele, K, & Borba, M. C. (2014). Research on calculus: what do we know and where do we need to go? **ZDM**, 46, 507-515.

Ribeiro, A. J., Aguiar, M., Trevisan, A. L., & Elias, H. R. (2021). How teachers deal with students mathematical reasoning when promoting whole-class discussion during the teaching of algebra (pp. 239-264). In: Spinillo, A.G., Lautert, S. L., & Borba, R.E.S.R. (Org.). **Mathematical Reasoning of Children and Adults**. 1ed.: Springer International Publishing.

Rodrigues, C., Menezes, L., & Ponte, J. P. (2018). Práticas de Discussão em Sala de Aula de Matemática: os casos de dois professores. **Bolema**, 12(61), 398-418.

Santos, A. R., & Bianchini, W. (2002). **Aprendendo cálculo com Maple**: cálculo de uma variável. 1. ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos.

Thompson, P. W., & Harel, G. (2021). Ideas foundational to calculus learning and their links to students’ difficulties. **ZDM**, 53, 507–519.

Trevisan, A. L. (2022). Promoção do raciocínio matemático em aulas de Cálculo. In **Anais do VIII Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática** (pp. 1-12). Sbem, Brasil.

Trevisan, A. L., Negrini, M. V., Falchi, B., & Araman, E. M. O. (2023). Ações do professor para a promoção do raciocínio matemático em aulas de cálculo diferencial e integral. **Educação e Pesquisa**, 49, 1-21.

Trevisan, A. L., & Araman, E. M. O. (2021). Processos de raciocínio matemático mobilizados por estudantes de Cálculo em tarefas envolvendo representações gráficas. **Bolema**, 35, 158-178

Trevisan, A. L., Araman, E. M. O., Silva, A. J., Araújo, T. T., Souza, A. V. P., & Castilho, A. S. (2024). Processos de raciocínio mobilizados por estudantes de CDI para compreensão da Integral de Riemann. **Alexandria**, no prelo.

Trevisan, A. L., & Goes, H. H. D. (2016). O Método da Exaustão e o Cálculo de Áreas: Proposta e uma Tarefa com Auxílio do Geogebra. **Educação Matemática em Revista**, 79-85.

Trevisan; A. L., & Mendes, M. T. (2018). Ambientes de ensino e aprendizagem de Cálculo Diferencial e Integral organizados a partir de episódios de resolução de tarefas: uma proposta. **Revista Brasileira de Ensino e Tecnologia**, 11 (1), 209-227.

Trevisan, A. L., & Volpato, M. A. (2022). Discussões Matemáticas em Aulas de Cálculo Diferencial e Integral e as Ações do Professor. **Perspectivas da Educação Matemática**, 15, 1-21.

Wood, T. (1999). Creating a context for argument in mathematics class. **Journal for Research in Mathematics Education**, 30 (2), 171-191.

Zarpelon, E., Resende, L. M., & Reis, E. (2017). Análise do desempenho de alunos ingressantes de Engenharia na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I. **Interfaces da Educação**, 8 (22), 303-335.