

Reflexões acerca de entraves enfrentados por ingressantes em um curso de Engenharia ao se defrontarem com conceitos da Matemática em um contexto extramatemático

Reflections regarding the obstacles faced by engineering undergraduates when confronted with mathematical concepts in an extra-mathematical context

Barbara Lutaif Bianchini¹

Eloiza Gomes²

Gabriel Loureiro de Lima³

Resumo: Apresentamos nesse artigo os resultados de uma pesquisa qualitativa exploratória, objetivando identificar e analisar os possíveis entraves relacionados a conceitos matemáticos, particularmente à associação indevida entre crescimento/decrescimento de uma função e relação de proporcionalidade direta/inversa entre grandezas e ao raciocinar relativamente. Estes foram analisados a partir de diálogos entre um pesquisador e três estudantes ingressantes na Engenharia, estabelecidos durante a resolução de questões vinculadas à análise dos níveis de resistência elétrica de um diodo semicondutor. As análises foram realizadas a partir de pressupostos teóricos vinculados ao desenvolvimento do pensamento proporcional e, nestas, evidenciamos a dificuldade dos estudantes em transitar entre/articular os raciocínios aditivo e multiplicativo e, consequentemente, raciocinar de modo relativo, e a pouca consciência meta-analógica requerida no pensamento proporcional.

Palavras-chave: Pensamento proporcional. Raciocínio relativo. Engenharia. Eletrônica analógica.

Abstract: In this article, we present the results of an exploratory qualitative study aimed at identifying and analyzing possible obstacles related to mathematical concepts, particularly the improper association between the growth/decrease of a function and the direct/inverse proportionality relationship between quantities, and to reasoning relatively. These were analyzed based on dialogues between a researcher and three students entrant in the Engineering, established during the resolution of questions linked to the analysis of the electrical resistance levels of a semiconductor diode. The analyses were based on theoretical assumptions linked to the development of proportional thinking and, in these, we highlighted the students' difficulty in moving between/articulating additive and multiplicative reasoning and, consequently, reasoning relatively, and the low meta-analogical awareness required in proportional thinking.

Keywords: Proportional thinking. Relative reasoning. Engineering. Analog electronics.

1 Introdução

Os autores deste artigo, em parceria com outros investigadores que integram seus grupos de pesquisa, têm realizado uma série de intervenções com estudantes ingressantes de cursos de Engenharia, nas quais são propostas situações extramatemáticas, em contextos específicos da futura área de atuação profissional dos estudantes, em que é necessário mobilizar conhecimentos acerca de conceitos matemáticos estudados nas disciplinas básicas e transpô-los

¹ Pontifícia Universidade Católica de São Paulo • São Paulo, SP — Brasil • ✉ barbara@pucsp.br • ORCID <https://orcid.org/0000-0003-0388-1985>

² Instituto Mauá de Tecnologia • São Caetano do Sul, SP — Brasil • ✉ eloiza@maua.br • ORCID <https://orcid.org/0000-0002-1217-9904>

³ Pontifícia Universidade Católica de São Paulo • São Paulo, SP — Brasil • ✉ gllima@pucsp.br • ORCID <https://orcid.org/0000-0002-5723-0582>

para contextos de aplicação.

Temos, nestas intervenções, analisado suas potencialidades para evidenciar aos graduandos a importância da Matemática como subsídio para sua formação como engenheiros, os desafios de trabalhá-las já nos primeiros semestres dos cursos – momentos nos quais os conhecimentos específicos acerca da Engenharia ainda são incipientes nos estudantes – e, além disso, o quanto esse tipo de trabalho oportuniza aos docentes observar entraves relacionados aos conceitos matemáticos, importantes de os professores detectarem e auxiliarem os estudantes a minimizarem, e que, por meio de abordagens tradicionais, somente em contextos intramatemáticos, seriam muito difíceis de identificar.

Um dos contextos que temos explorado é o da Eletrônica Analógica, particularmente no que se refere ao estudo de características de um diodo semicondutor. Em uma primeira situação a este respeito, tivemos por foco a revisita às funções reais de uma variável real e diferentes aspectos que emergiram da análise do trabalho dos estudantes com esta situação foram apresentados, sob distintas lentes teóricas – com vieses tanto matemáticos quanto cognitivos – em publicações em revistas nacionais e internacionais, bem como em diferentes eventos científicos (Lima, Bianchini & Gomes, 2021; Gomes, Bianchini & Lima, 2021a; Gomes, Bianchini & Lima, 2021b; Bianchini, Gomes & Lima, 2022; Lima, Bianchini & Gomes, 2022; Gomes, Bianchini & Lima, 2022; Bianchini, Gomes & Lima, 2023).

No momento, temos nos dedicado a analisar uma segunda intervenção no mesmo contexto, mas relacionada à análise dos níveis de resistência de um diodo semicondutor, o que oportuniza a mobilização de conhecimentos matemáticos relativos especialmente a limite, diferentes tipos de taxas de variação (absoluta, relativa e instantânea) e derivada. Resultados a respeito já foram publicados em Gomes, Bianchini e Lima (2023), Lima, Philot, Gomes e Bianchini (2024) e Bianchini, Gomes, Lima e Philot (2024).

Neste artigo, damos continuidade às análises relacionadas à esta mesma situação relativa aos níveis de resistência de um diodo semicondutor pormenorizando alguns entraves enfrentados pelos estudantes. Particularmente, voltamos nossa atenção à associação indevida entre crescimento (decréscimo) de uma função e relação de proporcionalidade direta (proporcionalidade inversa) entre grandezas e à dificuldade em raciocinar relativamente ao invés de absolutamente. Tais análises são realizadas a partir de pressupostos teóricos vinculados ao desenvolvimento do pensamento proporcional e, especialmente, de algumas de suas componentes.

2 Metodologia

Do ponto de vista metodológico, assim como procedemos nos estudos anteriores mencionados na introdução deste artigo, realizamos uma pesquisa de natureza qualitativa (Chizzotti, 1995), caracterizada como de campo (Gonsalves, 2001), com caráter exploratório (Gil, 1999), objetivando, neste caso, identificar e analisar os possíveis entraves relacionados a conceitos matemáticos que podem ser enfrentados por estudantes ingressantes em cursos de Engenharia ao se depararem com situações requerendo a mobilização de conhecimentos relacionados a tais conceitos em contextos extramatemáticos aderentes às suas futuras áreas de atuação profissional. Como é característico em pesquisas exploratórias, a investigação acerca dos supracitados entraves (a variável em estudo neste trabalho) foi realizada no cenário em que estes podem efetivamente ocorrer: durante a resolução, por um grupo de estudantes, de uma série de questões extramatemáticas requerendo a mobilização de conhecimentos matemáticos.

Conforme a organização didática detalhadamente apresentada em Gomes *et al.* (2023), tendo por sujeitos nove estudantes voluntários, ingressantes em cursos de Engenharia de uma

instituição privada do estado de São Paulo, realizamos, nos meses de setembro e outubro de 2023, uma intervenção composta por uma atividade de preparação prévia, efetivada extraclasse, seguida por dois encontros de quatro horas de duração cada, nos quais os estudantes, em equipes colaborativas de três integrantes, constituídas por sujeitos com diferentes estilos de aprendizagem (Lima, Bianchini, Gomes & Philot, 2021), resolveram dois problemas interrelacionados integrando a Matemática com outra área do conhecimento – no caso, a Eletrônica Analógica, um deles relativo ao estudo da curva característica de um diodo semicondutor e o outro relacionado à análise dos níveis de resistência elétrica considerando a operação deste dispositivo eletrônico tanto em corrente contínua quanto em alternada.

O processo de resolução destes dois problemas foi por nós organizado a partir de um conjunto de 25 questões norteadoras que os estudantes deveriam responder para solucionar os problemas, sendo 10 relativas ao primeiro (curva característica de um diodo semicondutor) e 15 relacionadas ao segundo (níveis de resistência em um diodo semicondutor operando em corrente contínua e em corrente alternada). Tais questões foram formuladas e propostas com o objetivo de oportunizar que os estudantes refletissem acerca de pontos essenciais para a resolução dos problemas e que avançassem por conta própria em direção à solução visada, sem, no entanto, eliminar do processo os conflitos cognitivos fundamentais para a construção de novas aprendizagens.

Cada uma das equipes de trabalho colaborativo foi acompanhada, durante o processo de resolução dos problemas, por um pesquisador (os autores deste artigo e mais uma orientanda de doutorado de um deles), o qual, nos momentos oportunos realizava mediações, isto é, interações intencionais com cada um dos estudantes “com o propósito de aumentar o seu entendimento para além da experiência imediata e ajudá-lo a aplicar o que é aprendido em contextos mais amplos” (Feuerstein, Feuerstein & Falik, 2014, p. 21). As discussões das equipes foram audiogravadas e, posteriormente, os áudios das interações entre os estudantes e entre eles e o pesquisador foi transcrita e analisada.

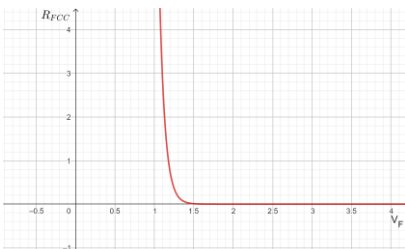
Neste artigo, damos continuidade às análises que temos realizado, a partir de diferentes perspectivas e referenciais teóricos, do trabalho desenvolvido por uma das equipes. Após investigar, tendo por base a Teoria da Modificabilidade Cognitiva Estrutural, as funções e disfunções cognitivas manifestadas pelos integrantes da equipe ao responder algumas das questões norteadoras propostas (Lima *et al.*, 2024), e a transposição de diferentes conceitos referentes ao objeto matemático função para o contexto da Eletrônica Analógica, análise esta tendo por referentes o desenvolvimento de competências matemáticas, o enfrentamento de dificuldades cognitivas e de obstáculos epistemológicos relativos à noção de função, a mobilização do raciocínio multivariacional e aspectos relacionados ao contrato didático (Bianchini *et al.*, 2024), neste trabalho, como mencionado na introdução, pautados por preceitos teóricos inerentes ao desenvolvimento do pensamento proporcional, explicitamos e analisamos alguns entraves enfrentados pelos estudantes que compuseram a supracitada equipe de trabalho, especificamente aqueles relacionados à associação indevida entre a relação de proporcionalidade direta (inversa) e a função crescente (decrescente) e ao raciocínio relativo.

Por entender que, no caso específico do que nos propusemos a analisar neste artigo, a leitura se torna mais fluida se a apresentação dos pressupostos teóricos for realizada juntamente ao aspecto analisado, não apresentamos uma seção de referencial teórico, mas seções evidenciando reflexões acerca de cada um dos aspectos enfocados, nas quais, após destacar o entrave a ser discutido, atemo-nos aos elementos centrais que, do ponto de vista teórico, subsidiavam sua análise.

3 A associação incorreta entre função crescente e função de proporcionalidade direta e entre função decrescente e função de proporcionalidade inversa

O primeiro entrave que analisamos neste artigo evidenciou-se quando os estudantes integrantes da equipe buscavam responder às questões norteadoras de números 3 e 4 relacionadas ao segundo problema proposto, questões estas que, juntamente com seus objetivos, são apresentadas no Quadro 1.

Quadro 1: Questões norteadoras 3 e 4 e seus objetivos

Questão norteadora 3
Esboce a curva que representa a resistência estática (isto é, em corrente contínua) em função da tensão do diodo considerado.
Objetivo
Apresentar uma representação gráfica descrevendo o comportamento da resistência estática de um diodo na medida em que se variam os valores de tensão direta, em corrente contínua, aplicados a este dispositivo. Para alcançar este objetivo, os estudantes deveriam retomar a expressão já conhecida das aulas de Física do Ensino Médio relacionando a resistência (que no caso será a resistência estática R_{FCC}), a tensão direta (V_F) e a corrente direta (I_F), a saber: $R_{FCC} = \frac{V_F}{I_F}$ e recordar, a partir do que haviam trabalhado no problema anteriormente solucionado, que a corrente direta é dada, em função da tensão direta, pela equação de Shockley, que no caso considerado é representada por $I_F = 25 \times 10^{-9} \left(e^{\frac{V_F}{0,066666971475}} - 1 \right)$. Os estudantes deveriam, portanto, obter a representação gráfica da função R_{FCC} dada algebricamente por: $R_{FCC} = \frac{V_F}{25 \times 10^{-9} \left(e^{\frac{V_F}{0,066666971475}} - 1 \right)}$. Tal representação é a seguinte:

Questão norteadora 4
Considerando especificamente a região de polarização direta e a operação do diodo em corrente contínua, descreva o comportamento dos níveis de resistência, justificando cuidadosamente sua resposta.
Objetivo
Análise, a partir da representação gráfica, do comportamento, na região de polarização direta, da resistência estática de um diodo. A partir desta análise, os estudantes deveriam perceber que quanto menores os valores da tensão direta, maiores os valores da resistência estática. Deveriam notar que à medida em que os valores da tensão direta aumentam, os valores da resistência estática diminuem, sendo esta diminuição mais lenta até a chamada tensão de joelho do diodo que, no caso considerado, é 0,86 V. Deveriam perceber, por fim, que após este ponto, pequenos aumentos na tensão direta geram níveis de resistência muito menores. Ou seja, que como esperado pela própria natureza do diodo, a partir da tensão de joelho, a corrente é conduzida com grande facilidade.

Fonte: elaborado pelos autores

Ao se defrontarem com a questão norteadora 3, primeiramente os estudantes desconsideraram que a corrente direta que passa pelo diodo é função da tensão direta a qual esse dispositivo é submetido e elaboraram a representação gráfica considerando corretamente a tensão direta como variável independente, mas incorretamente a corrente direta como constante igual a $30 \times 10^{-3} A$, valor dado no problema principal vinculado às questões

norteadoras, mas que não deveria ser considerado neste momento. Obtiveram então a representação gráfica de $R_{FCC} = \frac{V_F}{30 \times 10^{-3}}$ ao invés de $R_{FCC} = \frac{V_F}{25 \times 10^{-9} \left(e^{0,06666971475} - 1 \right)}$. Como

evidencia o diálogo apresentado a seguir, estranharam muito o fato de obterem uma reta como representação gráfica da resistência estática em função da tensão direta.

- (1) Aluno 1: *Esse é o nosso gráfico. Olha que coisa linda! Parece uma linha reta.*
- (2) Aluno 2: *Coisa estranha, coisa feia.*
- (3) Aluno 3: *Eu achei feio também.*
- (4) Aluno 2: *Nossa, está ridículo.*

Após a mediação do pesquisador que acompanhava a equipe, que fez uma série de perguntas aos alunos para que eles mesmos pudessem identificar em que aspecto haviam se enganado, perceberam o equívoco e obtiveram a representação gráfica correta. A partir dela, passaram a responder à questão norteadora 4 e desenvolveram o seguinte diálogo que, a partir de um certo momento, passou a contar também com participação do pesquisador:

- (5) Aluno 2: *Na região de polarização direta, a resistência é inversamente proporcional à tensão.*
- (6) Aluno 1: *Não entendi.*
- (7) Aluno 2: *Conforme você aumenta a tensão, não está diminuindo a resistência, em polarização direta?*
- (8) Aluno 3: *Mas não deveria aumentar? Não é diretamente proporcional?*
- (9) Aluno 1: *A resistência é inversamente proporcional à corrente.*
- (10) Aluno 3: *É o que o tinha pensado.*
- (11) Pesquisador: *A expressão que vocês utilizaram para construir o gráfico relaciona que grandezas?*
- (12) Alunos todos juntos: *Resistência e tensão.*
- (13) Aluno 2: *Mas a resistência não deveria ser diretamente proporcional à tensão?*
- (14) Pesquisador: *Por que diretamente proporcional? Analisem a expressão algébrica que vocês obtiveram relacionando resistência e tensão.*
- (15) Aluno 2: *Quanto maior a tensão, menor a resistência. É inversamente.*
- (16) Aluno 1: *Mas não deveria ser o contrário?*
- (17) Aluno 3: *Eu também não entendi.*
- (18) Pesquisador: *Na sequência explicarei a questão do ponto de vista da Física, mas analisem do ponto de vista matemático... Se houvesse uma relação de proporcionalidade direta, teríamos uma reta como representação gráfica.*
- (19) Aluno 3: *Entendo o gráfico, entendo o conceito, mas... meio que aceitei...*

Os diálogos apresentados evidenciam uma concepção equivocada dos sujeitos da pesquisa acerca de relações de proporcionalidade direta e de proporcionalidade inversa. Para eles, parece que, ao considerar duas variáveis relacionadas, o simples fato de o aumento nos valores de uma delas ocasionar a diminuição nos valores da outra ou o aumento nos valores de uma ocasionar o aumento também nos valores da outra, é suficiente para indicar, respectivamente, relações de proporcionalidade inversa e direta. Esse aspecto torna-se evidente especialmente nas manifestações (5), (7), (8), (9) e (15). Explicita-se uma confusão entre os conceitos de relação de proporcionalidade direta e de função crescente, bem como de relação de proporcionalidade inversa e de função decrescente.

Essa confusão mencionada no final do parágrafo anterior é comumente observada entre estudantes do Ensino Médio, como já era indicado nas Orientações Curriculares para o Ensino Médio: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias, documento elaborado pelo Ministério da Educação brasileiro em 2006. Em tais orientações, destaca-se que:

as ideias de crescimento, modelo linear ($f(x) = a \cdot x$) e proporcionalidade direta devem ser colocadas em estreita relação, evidenciando-se que a proporcionalidade direta é um particular e importante modelo de crescimento. Nesse momento, também é interessante discutir o modelo de decrescimento com proporcionalidade inversa ($f(x) = \frac{a}{x}$). O professor deve estar atento ao fato de que *os alunos identificam sistematicamente, de forma equivocada, crescimento com proporcionalidade direta e decrescimento com proporcionalidade inversa*, e aqui é interessante trazer situações do cotidiano para ilustrar diferentes tipos de crescimento/decrescimento de grandezas em relação (Brasil, 2006, p. 72-73 – grifo nosso).

É relevante, portanto, observar que, ao menos os sujeitos da pesquisa que realizamos, apesar de serem estudantes do Ensino Superior que já haviam cursado um semestre e alguns meses da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral, continuavam associando, equivocadamente, crescimento com proporcionalidade direta e decrescimento com proporcionalidade inversa.

Além disso, os estudantes indicam não ter interiorizado o fato de que uma função associada a uma relação de proporcionalidade direta é, graficamente, representada por uma reta. Se consideram haver uma relação de proporcionalidade direta entre resistência e tensão, como evidenciam nas manifestações (8), (13) e (16), não deveriam ter estranhado ao obterem – ainda que incorretamente – uma reta como representação gráfica da resistência em função da tensão. Se associassem corretamente a representação de uma função de proporcionalidade direta a uma reta, ao invés do estranhamento explicitado em (2), (3) e (4), a obtenção da mencionada reta deveria ratificar o que haviam conjecturado. Além disso, essa não associação entre uma função de proporcionalidade direta e uma reta como sua representação gráfica é reforçada quando, diante do gráfico de uma função não representado por uma reta, um dos estudantes manifesta-se como em (8).

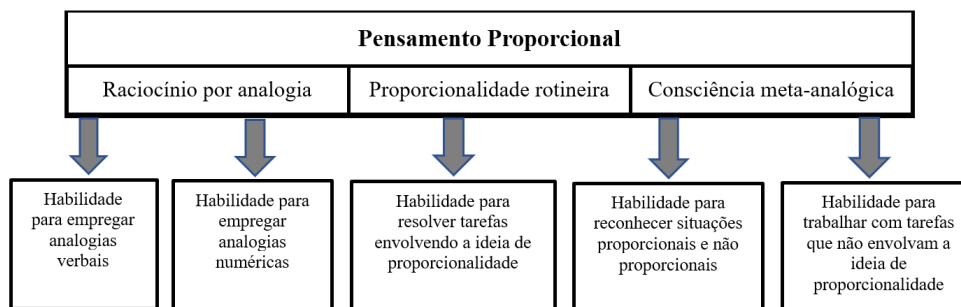
Convém ainda salientar que a manifestação (8) sinaliza uma fragilidade na própria interpretação da representação gráfica obtida. Mesmo diante de uma função decrescente, o estudante parece “enxergar” uma relação entre as grandezas nas quais o aumento de uma delas implica no aumento da outra. Ou seja, além de não ter clareza acerca do que significam grandezas diretamente proporcionais, como já apontamos, não há associação adequada entre a representação gráfica da função e seu crescimento ou decrescimento. Em síntese, podemos dizer, a partir dos diálogos apresentados, que não parece claro aos sujeitos participantes da intervenção que realizamos o que de fato caracteriza uma relação de proporcionalidade. Mas que considerações teóricas, de natureza cognitiva, poderiam explicar o que observamos? A nosso ver, o cerne da questão está no desenvolvimento não suficientemente profundo do pensamento proporcional.

Embora este modo de pensar não se restrinja ao estudo das proporções, como pontuam Lima e Bianchini (2023) a partir das ideias de Falvo e Jucá (2022), seu desenvolvimento e sua mobilização por um indivíduo são condições necessárias para que ele possa compreender diferentes contextos e aplicações nos quais a noção de proporcionalidade se faz presente, como aqueles relacionados à mecânica, ao estudo das forças, da ótica geométrica, da acústica, dentre outros. Pode-se dizer, inclusive, que o pensamento proporcional é uma das pedras angulares da Matemática (Lesh, Post & Behr, 1988) e que, se essa forma de pensar não for adequadamente desenvolvida por um sujeito, sendo interiorizada apenas algoritmicamente e não conceitualmente, sua transferência para uso em contextos reais, como o presente na situação com a qual trabalhamos com os estudantes que participaram da pesquisa, tornar-se-á muito difícil (Dooley, 2006).

Como discorrem Lima e Bianchini (2023), o desenvolvimento do pensamento

proporcional pode ser caracterizado recorrendo-se a um modelo proposto por Modestou e Gagatsis (2010) que contempla três componentes: *raciocínio por analogia*, *proporcionalidade rotineira* e *consciência meta-analógica*, como ilustrado e detalhado na Figura 1. O desenvolvimento de habilidades relativas a estas três componentes é fulcral para que a análise de uma situação, especialmente se esta envolve ou não proporcionalidade, “ocorra de modo adequado, e não a partir de um método subsidiado por características superficiais dessa situação” (Lima & Bianchini, 2023, p. 195).

Figura 1: Modelo de pensamento proporcional proposto por Modestou e Gagatsis (2010)



Fonte: Lima e Bianchini (2023, p. 196)

Podemos, a partir dos diálogos anteriormente apresentados, afirmar que os sujeitos da pesquisa evidenciam fragilidades relativas à componente *consciência meta-analógica* do pensamento proporcional, a qual diz respeito, como pontuado em Lima e Bianchini (2023, p. 195), “ao conhecimento e à regulação dos processos cognitivos incluídos no pensamento proporcional”. Tais fragilidades os levam a não reconhecer que a situação considerada, na qual estabelece-se uma relação entre a resistência em corrente contínua e a tensão direta de um diodo, não é proporcional. Além disso, faz com que explicitem inabilidade e até mesmo um desconforto ao serem postos diante de uma tarefa que não envolve proporcionalidade, buscando a todo momento tentar identificar a existência de uma proporção direta ou inversa.

Como pontuam Lima e Bianchini (2023) com base nas considerações de Lamon (2012), o sujeito que desenvolveu adequadamente o pensamento proporcional é capaz de entender que nas situações em que há proporcionalidade “duas quantidades vinculam-se uma à outra de tal modo que, quando uma delas varia, a outra também o faz de maneira relacionada com a primeira, e existe uma terceira quantidade que permanece invariante, denominada *constante de proporcionalidade*” (Lima & Bianchini, 2023, p. 204). As manifestações emitidas pelos estudantes nos diálogos anteriormente apresentados, como, por exemplo, (7) e (15), evidenciam que os sujeitos compreenderam que resistência e tensão são grandezas vinculadas e que a alteração em uma delas ocasiona uma mudança também na outra (ou seja, há covariação entre elas). No entanto, em razão de não terem o modo de pensar proporcional suficientemente desenvolvido, não se atentaram à necessidade de, para poderem dizer que resistência e tensão são grandezas proporcionais, deveria haver entre elas uma constante de proporcionalidade.

Uma possível causa para que os sujeitos tenham se atentado somente à covariação e não à necessidade de haver, nesta covariação, uma quantidade invariante para que a relação entre resistência e tensão pudesse ser caracterizada como proporcional pode ser o uso excessivo, por parte de alguns de seus professores, desde a Educação Básica, de frases de apelo memorístico que podem ser interpretadas equivocadamente pelos estudantes, como: “para grandezas diretamente proporcionais, quando uma aumenta a outra também aumenta” ou “para grandezas inversamente proporcionais quando uma aumenta a outra diminui”. Embora tais frases estejam corretas do ponto de vista matemático, alguns estudantes as gravam como: “se uma grandeza aumenta e a outra também, então são diretamente proporcionais” ou “se uma grandeza aumenta

e a outra diminui, então são inversamente proporcionais”. Como discutem Reyes-Gasperini (2016) e Reyes-Gasperini, Montiel e Cantoral (2014), o principal problema na memorização dessas frases sem o devido cuidado é que, ao aplicá-las, o estudante deixa de lado algo fundamental: a análise de quanto o aumento em uma grandeza implica no aumento ou na diminuição da outra a ela relacionada. E, para haver proporcionalidade, esse *o quanto* é primordial. Ou seja, como salientam Reyes-Gasperini *et al.* (2014):

essas regras têm, sem dúvida, a intenção de “facilitar ou simplificar” o processo de aprendizado e, na maioria das vezes, conseguem fazê-lo. No entanto, são elas mesmas que, posteriormente, induzem erros matemáticos no desempenho dos alunos, porque, quando se trata de argumentar, têm um grau de validade tão grande entre os estudantes que começam a gerar contradições em si mesmas (Reyes-Gasperini *et al.*, 2014, p. 4).

E, como podemos observar por meio dos diálogos que apresentamos, esses erros ocasionados por tais regras transcendem a Educação Básica e interferem nas análises realizadas por estudantes do Ensino Superior, mesmo após meses de estudos de Cálculo Diferencial e Integral, ao se depararem com a necessidade de transpor conceitos da Matemática para um contexto extramatemático.

4 A dificuldade em raciocinar relativamente ao invés de absolutamente

O segundo entrave que analisamos neste artigo evidenciou-se ainda quando os estudantes respondiam à questão norteadora 4, cujo enunciado é: *considerando especificamente a região de polarização direta e a operação do diodo em corrente contínua, descreva o comportamento dos níveis de resistência, justificando cuidadosamente sua resposta*. Após compreenderem que não havia uma relação de proporcionalidade entre a resistência e a tensão direta, os estudantes questionaram ao pesquisador acerca do significado, na representação gráfica que haviam construído, da tensão de joelho do diodo. Desenvolveu-se então o seguinte diálogo:

(20) Aluno 3: *Aquele 0,86 vai ser aqui também?*

(21) Pesquisador: *vai ter uma influência. Vamos ver o que acontece a partir do 0,86 V. Para valores menores que 0,86 V, pequenas variações de tensão geram uma menor variação de resistência. A partir de 0,86 V pequenas variações de tensão geram uma maior variação de resistência.*

(22) Aluno 3: *Antes de 0,86, não é? Depois não é o que fica reto?*

(23) Pesquisador: *Até 0,86 V a resistência do diodo diminui mais devagar em relação ao aumento da tensão. A partir de 0,86 V a resistência diminui muito rápido.*

(24) Aluno 3: *Desse gráfico? Não entendi! A resistência não é o y? A diferença aqui entre dois valores de resistências para tensões antes de 0,86 V será maior do que a diferença entre dois valores de resistências para tensões após 0,86 V.*

(25) Aluno 3: *Aqui não está variando de zero alguma coisinha para zero alguma coisinha?*

(26) Pesquisador: *Mas a questão é comparação em relação ao ponto anterior. Faça, por exemplo, a resistência em 0,1 V e denomine essa resistência de a e em 0,2 V e denomine essa resistência de b. Faça então $\frac{a-b}{a}$. Veja, então que, em 0,2 V, a resistência será 37% daquela observada em 0,1 V. Agora vamos calcular a resistência em 0,8 V e em 0,9 V. A resistência em 0,9 V será 25,29% da resistência em 0,8 V.*

(27) Aluno 3: *Mas a minha dúvida era um pouco mais para a direita. O 0,8 V ainda está antes de 0,86 V.*

(28) Pesquisador: *Então calcule as resistências em 1,5 V e 1,6 V. Em 1,6 V, a resistência é 24% da resistência em 1,5 V. Então, após o 0,86 V, uma diferença muito pequena de voltagem irá produzir uma grande diferença de resistência. No gráfico é difícil de perceber em razão de os valores das ordenadas serem muito pequenos. Algebricamente podemos perceber isso mais facilmente.*

(29) Aluno 3: *Aqui o negócio é desse tamanho e eu estou vendo isso daqui. Como esse pode ser maior?*

(30) Pesquisador: *Não... marque aí dois pontos no gráfico: 0,8 V e 0,9 V. Olhe a diferença entre os valores da resistência no eixo vertical... observe as ordenadas correspondentes a estes pontos. Agora vamos fazer a mesma coisa em 1,5 V e 1,6 V. Aqui, após a 0,86 V, a queda da resistência é mais rápida. A queda é mais rápida, mas é difícil enxergar nesse gráfico.*

(31) Aluno 3: *Mas estamos olhando para o y. Por que se eu fizer o que estou pensando não dá certo?*

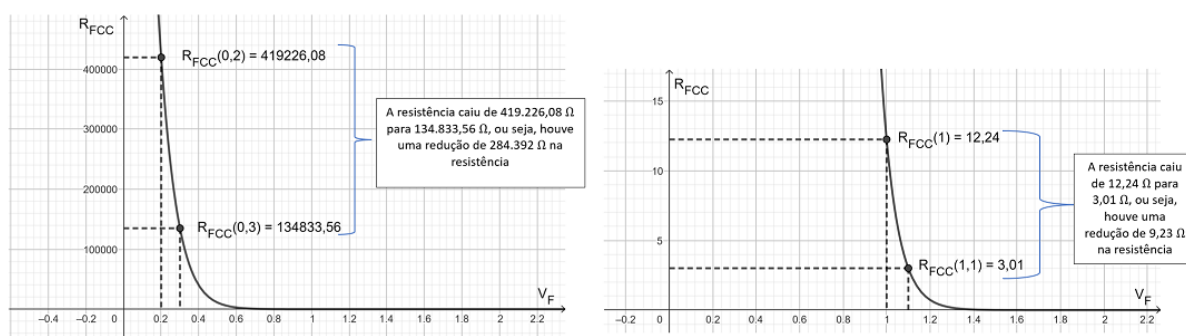
(32) Aluno 1: *Mas temos que pensar em proporção... e não em valores absolutos.*

(33) Pesquisador: *A questão é a diferença em termos proporcionais. Não estamos falando no valor da resistência, mas na velocidade de queda da resistência.*

Neste longo diálogo estabelecido entre um dos sujeitos (o Aluno 3) e o pesquisador, evidencia-se, a partir das manifestações (22), (24), (25), (29) e (31), a dificuldade deste estudante em compreender a argumentação feita pelo pesquisador para responder à sua inquietação acerca do papel da tensão de joelho na análise que estava sendo realizada. Para compreender o que estava sendo argumentado, o Aluno 3 precisaria deixar de lado um raciocínio focado na análise, em termos absolutos, da diferença entre os valores $R_{FCC}(a)$ e $R_{FCC}(b)$ das resistências considerando dois valores distintos a e b para a tensão direta, com $a < b$, engajar-se em um raciocínio que lhe permitiria raciocinar relativamente acerca do quanto, em termos percentuais, o valor $R_{FCC}(b)$ é menor do que o valor $R_{FCC}(a)$ e, por fim, analisar se a velocidade de decrescimento da resistência R_{FCC} é menor para valores de tensão direta a e b inferiores ao valor da tensão de joelho do diodo considerado (0,86 V) ou para valores de tensão direta a e b superiores ao valor da mencionada tensão de joelho.

A manifestação (24) explicita que o estudante, ao ouvir a explicação (21) dada pelo pesquisador, não a associou à velocidade de decrescimento da resistência entre dois valores dados para a tensão direta, mas à diferença absoluta entre os valores das resistências em cada um desses pontos. Ou seja, o Aluno 3 estava realizando a comparação que apresentamos na Figura 2, enquanto o pesquisador argumentava com ele a partir da comparação apresentada na Figura 3.

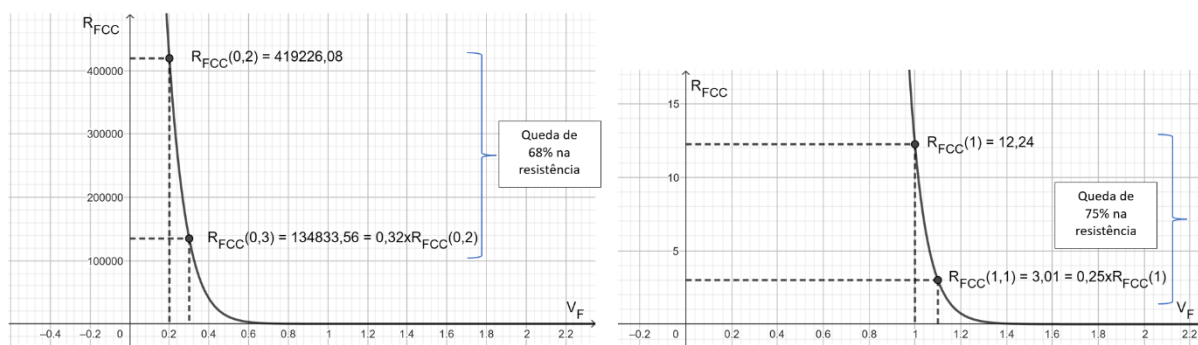
Figura 2: Comparação, em termos absolutos, entre dois valores de resistência antes de 0,86 V e após 0,86 V



Fonte: elaborado pelos autores

Analisando a Figura 2 simultaneamente às manifestações (22), (24), (25), (29) e (31) do Aluno 3 podemos compreender mais claramente algumas de suas inquietações. Esta análise é apresentada na Figura 4.

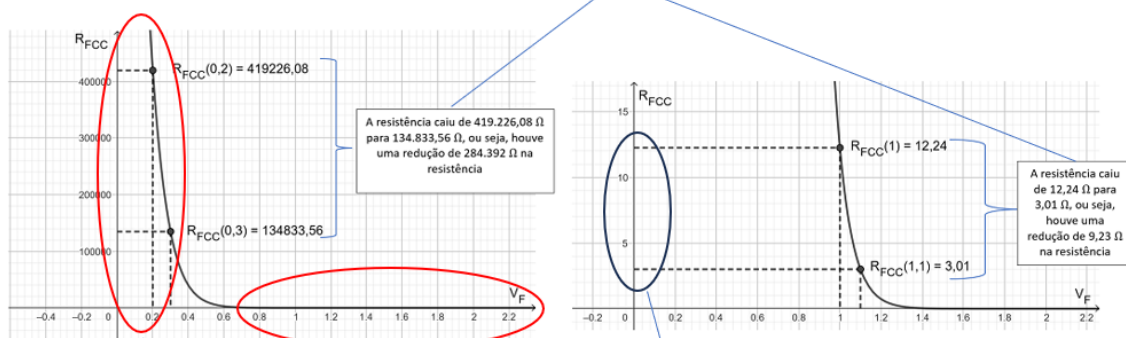
Figura 3: Comparação, em termos relativos, entre dois valores de resistência antes de 0,86 V e após 0,86 V



Fonte: elaborado pelos autores

Figura 4: Análise conjunta da Figura 2 e das manifestações do Aluno 3

(24) Aluno 3: Desse gráfico? Não entendi! A resistência não é o y? A diferença aqui entre dois valores de resistências para tensões antes de 0,86V será maior do que a diferença entre dois valores de resistências para tensões após 0,86V.
 (29) Aluno 3: Aqui o negócio é desse tamanho e eu estou vendo isso daqui. Como esse pode ser maior?
 (31) Aluno 3: Mas estamos olhando para o y. Por que se eu fizer o que estou pensando não dá certo?



(22) Aluno 3: Antes de 0,86, não é? Depois não é o que fica reto?

(25) Aluno 3: Aqui não está variando de zero alguma coisinha para zero alguma coisinha?
 Nota dos autores: o estudante, ao fazer tal manifestação estava analisando a representação gráfica que havia construído sem ajustar a escala e, por isso, “enxergou” os valores da resistência como menores do que efetivamente o são.

Fonte: elaborado pelos autores

Tendo identificado, no diálogo apresentado, alguns elementos que ocasionaram dificuldades nos estudantes ao refletirem acerca do papel da tensão de joelho do diodo considerado na análise que estava sendo realizada, passamos, na sequência, a explicitar preceitos teóricos que nos auxiliam a compreender tais dificuldades. Assim como evidenciamos na seção anterior, entendemos que tais preceitos estão relacionados ao desenvolvimento frágil de componentes do pensamento proporcional, mas neste caso, essas componentes são diferentes daquelas já abordadas.

Ao propor um modelo caracterizador para o pensamento proporcional distinto daquele apresentado por Modestou e Gagatsis (2010) e ilustrado na Figura 1, Lamon (2012) considera que este modo de pensar pode ser descrito como uma rede interligada por sete nós, sendo um

deles o *raciocínio relativo*, isto é, a habilidade de analisar mudanças em termos relativos o que, conforme argumentam Lima e Bianchini (2023) a partir das ideias de diferentes autores, requer um nível maior de abstração do que raciocinar de forma absoluta.

Segundo Lamon (2012), para que um indivíduo desenvolva efetivamente o pensamento proporcional, a compreensão de mudanças nas perspectivas absoluta e relativa é essencial, uma vez que, como sintetizado por Burgos, López-Martín, Aguayo-Arriagada e Albanese (2022) a partir dos estudos de Lamon, o pensamento proporcional é um modo de pensar que “envolve o senso de covariação e múltiplas comparações em termos relativos” (Burgos *et al.*, 2022, p. 5), ideia ratificada por Llinares (2003), que salienta como uma das habilidades fundamentais para o desenvolvimento e para a mobilização do pensamento proporcional, as capacidades de um indivíduo em realizar análises em termos tanto relativos quanto absolutos e de executar comparações aditivas ou multiplicativas, uma vez que, “na proporcionalidade, os números não são tomados pelo valor nominal; eles são relativos aos outros números, e ambos co-transformam o “valor” um do outro no problema” (Proulx, 2024, p. 371).

Na visão de Copur-Gencturk, Baek e Doleck (2022), no processo de desenvolvimento do pensamento proporcional, o raciocínio relativo pode ser considerado como intermediário entre os raciocínios aditivo e multiplicativo, uma vez que, de acordo com Proulx (2024), o trabalho com situações envolvendo proporcionalidade requer uma transição do raciocinar de modo aditivo para o multiplicativo, a qual, como pontua o autor a partir das considerações de Steinhorsdottir e Sriraman (2009), não é óbvia e requer investigações acerca de como são estabelecidas vinculações e articulações entre essas formas de raciocínio no enfrentamento de situações de proporcionalidade e como tal transição é vivenciada pelos estudantes. Como destaca Proulx (2024) a partir da investigação de Copur-Gencturk, Baek e Doleck (2022), a transição do raciocínio aditivo para o multiplicativo requer um olhar atento para as relações entre as grandezas envolvidas em uma dada situação proporcional, uma vez que:

o raciocínio aditivo envolve a comparação de duas grandezas mensuráveis em relação a quanto mais ou menos de uma quantidade existe da outra e, em seguida, manter a natureza invariante da relação entre as quantidades, mantendo a diferença entre as quantidades constante. (...) A transição do raciocínio aditivo para o proporcional começa quando se percebe que a diferença entre duas quantidades variáveis não permanece constante à medida que o tamanho das quantidades covariáveis muda (Copur-Gencturk *et al.*, 2022 apud Proulx, 2024, p. 359).

Ao raciocinar de modo relativo, é necessário que o indivíduo perceba que uma diferença aditiva de certa quantidade não deve ser analisada em termos absolutos, mas de modo relacionado a outras quantidades que também variam, o que ocasiona uma mudança qualitativa na diferença em questão a partir de um determinado referente, possibilitando que essa mesma diferença possa ser vista, dependendo da situação, como mais ou menos significativa (Proulx, 2024). Em outras palavras, é preciso que se perceba uma relação dinâmica existente entre as grandezas com as quais se está trabalhando, como elas covariam e de que modo, neste caso, diferentemente do que ocorre na covariação usual de quantidades, questões qualitativas também devem entrar em jogo. Ou seja, a análise deve ir além dos números, considerando não somente a diferença absoluta entre duas quantidades, mas quantas vezes uma delas é maior ou menor do que a outra. É preciso então analisar uma quantidade simultaneamente a partir de uma perspectiva absoluta (considerando a diferença, no sentido aditivo, entre duas quantidades) e de uma perspectiva relativa, na qual “números, quantidades, diferenças etc., não são considerados em termos absolutos, mas são constantemente colocados em relação a outros que modulam seu valor no problema” (Proulx, 2024, p. 369). Como complementa o autor, por meio de vínculos relativos e multiplicativos, “os números ganham uma certa qualidade, um ‘ajuste’ no problema” (p. 369).

No caso que estamos considerando, os diálogos evidenciam que o Aluno 3 não realizou análises em termos relativos entre dois valores da resistência ao refletir acerca destes antes e a após a tensão de joelho ($0,86 V$). Comparou-os somente a partir de uma perspectiva aditiva, notando então que a resistência caiu de $419.226,08 \Omega$ em $0,2 V$ para $134.833,56 \Omega$ em $0,3 V$, ou seja, que houve uma redução de 284.392Ω na resistência, a qual é muito maior do que a redução de $9,23 \Omega$ observada ao considerar as tensões de $1 V$ e $1,1 V$. Não percebeu que, a partir de uma perspectiva multiplicativa, a redução de $9,23 \Omega$ correspondia a uma redução de 75% em relação à resistência observada para o valor anterior de tensão direta considerado, enquanto a redução de 284.392Ω correspondia a uma redução de 68% em relação à anterior. Ou seja, que $R_{FCC}(0,3) = 0,32 \cdot R_{FCC}(0,2)$ e que $R_{FCC}(1,1) = 0,25 \cdot R_{FCC}(1)$. O Aluno 3, ao dialogar com o pesquisador, não conseguiu vislumbrar que, na situação em que estava trabalhando e devido aos referentes que deveriam ser considerados para estabelecer as comparações requeridas, contra intuitivamente, a diferença de 284.392 era menos significativa do que a de 9,23. Não houve a percepção das mudanças qualitativas às quais os valores obtidos estavam sujeitos, aos ‘ajustes’ segundo os quais deveriam ser considerados na análise da situação.

É importante salientar que o estudante não alcançou a devida compreensão nem mesmo após a mediação do pesquisador e que não recorreu, em momento algum, ao contexto físico envolvido no problema que o permitiria, de modo mais evidente, atingir os entendimentos visados. Os dados explicitam, portanto, que, para o Aluno 3, o trânsito entre os raciocínios aditivo e multiplicativo e, conseqüentemente, o raciocinar de modo relativo, não estão devidamente consolidados em suas estruturas cognitivas e que, então, consolida-se um entrave ao ser demandado a transpor esses elementos da Matemática para o contexto da Eletrônica Analógica.

E que influências os aspectos visuais ou geométricos presentes em uma dada situação podem exercer na efetivação do raciocínio relativo? Como discute Proulx (2024, p. 364), não existe um consenso na literatura a este respeito, uma vez que “enquanto há alguns que defendem como as pistas visuais podem ajudar os alunos a pensarem proporcionalmente, outros mostraram empiricamente como essas mesmas pistas visuais podem ser prejudiciais à resolução”. Há, segundo o mesmo autor, uma alta dependência do contexto com o qual se está trabalhando e no qual esses aspectos estão inseridos, não devendo tal questão ser compreendida como uma relação de causa e efeito.

Na situação com a qual estávamos trabalhando, notamos que os aspectos visuais provenientes da representação gráfica obtida para a relação entre resistência e tensão direta provocaram obstáculos. Uma vez que os valores expressos no eixo das ordenadas (relativos às resistências) da representação gráfica considerada crescem muito mais rapidamente do que os valores expressos no eixo das abscissas (relativos às tensões diretas), se os estudantes não se preocupassem em trabalhar com o recurso de *zoom* ou com ajustes nas escalas dos eixos, a representação gráfica poderia induzir ao erro. Foi exatamente o que aconteceu, como evidenciam as manifestações (22), (24), (25) e, com ainda intensidade a (29), do Aluno 3.

5 Considerações finais

Os leitores deste texto, destinado especialmente a pesquisadores interessados em questões relativas ao ensino e à aprendizagem de Matemática no Ensino Superior, poderão ver com certo estranhamento discutirmos, tendo por sujeitos estudantes universitários, aspectos relacionados ao desenvolvimento do pensamento proporcional, especificamente aqueles referentes à consciência meta-analógica requerida a este modo de pensar e à importância de raciocinar relativamente e, por consequência, de transitar entre/articular os raciocínios aditivo e multiplicativo. Essa desconfiança provavelmente decorre da concepção destes leitores de que

esses elementos, profundamente vinculados aos conceitos matemáticos trabalhados na Educação Básica, já deveriam ser de pleno domínio dos ingressantes no Ensino Superior.

Nós mesmos não tínhamos qualquer consciência de que os sujeitos com os quais trabalhávamos pudessem experienciar dificuldades relativas ao desenvolvimento insuficiente do pensamento proporcional, uma vez que estes já haviam cursado quase oito meses da disciplina de Cálculo, além de outras do primeiro ano de um curso de Engenharia, e apresentavam bom desempenho durante as aulas.

Conscientizamo-nos destas dificuldades somente após realizarmos um acompanhamento muito próximo dos estudantes ao resolverem um problema em contexto extramatemático, o que nos leva a argumentar em prol da inserção, desde o início do percurso universitário dos futuros engenheiros, de momentos de trabalho com situações de maior demanda cognitiva e que requeiram a transposição de conceitos matemáticos para outros contextos de aplicação. Entendemos ainda, que estes momentos devem ser organizados pelos professores de modo a proporcionar aos estudantes um ambiente de total acolhimento de suas ideias e de suas dúvidas para que estas possam ser debatidas e aprofundadas com confiança e respeito em direção à efetiva compreensão de aspectos matemáticos ainda não introjetados, mesmo que estes estejam vinculados a conceitos que, idealmente, já deveriam ser de domínio dos graduandos.

Consideramos que na experiência que realizamos, o sucesso no estabelecimento deste clima de acolhimento, confiança e respeito evidenciou-se, sobretudo, no diálogo realizado entre o Aluno 3 e o pesquisador. Este estudante sentiu-se plenamente confortável para expor suas dúvidas e dar continuidade aos seus questionamentos a partir das explicações fornecidas pelo pesquisador, que pôde, por meio disto, perceber que todos os integrantes daquela equipe enfrentavam dificuldades em raciocinar de modo relativo, embora somente o Aluno 3 tenha se engajado, de maneira efetiva, em um processo visando minimizá-las.

Mas, qual a importância de identificar, a partir de um grupo tão reduzido de sujeitos, dificuldades tão pontuais de graduandos em Engenharia relacionadas a conceitos matemáticos muitas vezes assumidos como já disponíveis em seus repertórios cognitivos? Entendemos que pesquisas de caráter exploratório como estas que temos realizado podem nos evidenciar aspectos de grande relevância – que de outro modo nos passariam despercebidos – e que, ao serem posteriormente considerados em nossas práticas docentes, poderão contribuir para o efetivo desenvolvimento, por parte dos estudantes, de modos de pensar essenciais para o acompanhamento dos cursos de Engenharia e posterior atuação profissional.

Referências

- Bianchini, B. L., Gomes, E. & Lima, G. L. (2022). Uma abordagem contextualizada da matemática na engenharia: as potencialidades das perguntas dos professores. *Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia*, edição especial, 1-28.
- Bianchini, B. L., Gomes, E. & Lima, G. L. (2023). Uma atividade contextualizada na Eletrônica Analógica e o enfrentamento de obstáculos epistemológicos relativos à noção de função: uma análise a partir de podcasts produzidos por futuros engenheiros. In: A. L. Manrique & C. L. O. Groenwald (Eds.). *Anais do IX CIBEM – Congresso Iberoamericano de Educação Matemática*. (pp. 2751-2763). Taubaté, SP: Editora Akademy.
- Bianchini, B. L., Gomes, E., Lima, G. L. & Philot, J. M. (2024). Função real de uma variável real: uma análise de sua transposição para o contexto da Eletrônica Analógica. In: *Anais do XXIV Encuentro Nacional y XVI Internacional de Educación Matemática en Carreras de*

- Ingeniería* (pp. 1-7), San Francisco, Argentina.
- Brasil. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. (2006). *Orientações Curriculares para o Ensino Médio: Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias*. Brasília, DF.
- Burgos, M., López-Martín, M. M., Aguayo-Arraigada, C. G. & Albanese, V. (2022). Análisis cognitivo de tareas de comparación de probabilidades por futuro profesorado de Educación Primaria. *Uniciencia*, 36(1), 588-611.
- Chizzotti, A. (1995). *Pesquisa em ciências humanas e sociais*. São Paulo, SP: Cortez.
- Copur-Gencturk, Y., Baek, C. & Doleck, T. (2022). A closer look at teachers' proportional reasoning. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 21(1), 113–129.
- Dooley, K. B. (2006) *An investigation of proportional thinking among high school students*. 2006. 170 f. Tese (Doutorado em Filosofia, Currículo e Instrução). Graduate School of Clemson University, Clemson.
- Feuerstein, R., Feuerstein, R. S., & Falik, L. H. (2014). *Além da inteligência: aprendizagem mediada e a capacidade de mudança do cérebro*. Petrópolis, RJ: Vozes.
- Gil, A. C. (1999). *Métodos e técnicas de pesquisa social* (5. Ed). São Paulo, SP: Atlas.
- Gomes, E., Bianchini, B. L. & Lima, G. L. (2021a). Desenvolvimento de Competências Matemáticas e Competências Gerais por meio de uma atividade contextualizada no estudo de um diodo semicondutor. In: *Anais do XLIX Congresso Brasileiro de Educação em Engenharia* (pp. 1-14). Belo Horizonte, MG (evento online).
- Gomes, E., Bianchini, B. L. & Lima, G. L. (2021b). As Potencialidades das Perguntas dos Professores em uma Abordagem Contextualizada da Matemática na Engenharia. In: *VIII Anais do Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática* (pp. 699-717). Uberlândia, MG (evento online).
- Gomes, E., Bianchini, B. L. & Lima, G. L. (2022). Dificuldades cognitivas relacionadas à noção de função: uma análise a partir da resolução de um problema no contexto da Engenharia. In: *Anais do L Congresso Brasileiro de Educação em Engenharia* (pp. 1-13). São Paulo, SP (evento online).
- Gomes, E., Bianchini, B. L. & Lima, G. L. (2023). O estudo dos níveis de resistência de um diodo semicondutor como contexto para a abordagem de função, limite e derivada. In: *Anais do LI Congresso Brasileiro de Educação em Engenharia* (pp. 1-13). Rio de Janeiro, RJ.
- Gonsalves, E. P. (2001). *Iniciação à pesquisa científica*. Campinas, SP: Alinea.
- Lamon, S. J. (2012). *Teaching fractions and ratios for understanding: essential content knowledge and instructional strategies for teacher*. New York: Routledge.
- Lesh, R., Post, T. & Behr, M. (1988). Proportional reasoning. In: J. Hiebert & M. Behr (Eds.). *Number concepts and operations in the middle grades*. (pp. 93-118) Reston, VA: Lawrence Erlbaum & National Council of Teachers of Mathematics.
- Lima, G. L. & Bianchini, B. L. (2023). Pensamento Proporcional. In: B. L. Bianchini & G. L. Lima (Orgs.). *O pensamento matemático e os diferentes modos de pensar que o constituem*. (1. ed., pp. 191-248). São Paulo, SP: Editora Livraria da Física.
- Lima, G. L., Bianchini, B. L. & Gomes, E. (2021). Estudando a Curva Característica de um Diodo Semicondutor na disciplina inicial de Cálculo Diferencial e Integral: oportunidade

- para o desenvolvimento de competências matemáticas e gerais na Engenharia. In: *Anais do XXII Encuentro Nacional y XIV Internacional de Educación Matemática en Carreras de Ingeniería* (pp. 178-189), Montevideu, Uruguai (evento online).
- Lima, G. L., Bianchini, B. L. & Gomes, E. (2022). Abordagem contextualizada da Matemática na Engenharia sob a perspectiva das disfunções cognitivas. *Acta Scientiae*, 24(7), 35-77.
- Lima, G. L., Bianchini, B. L., Gomes, E. & Philot, J. M. (2021). O Ensino da Matemática na Engenharia e as Atuais Diretrizes Curriculares Nacionais: o modelo didático da matemática em contexto como possível estratégia. *Currículo sem Fronteiras*, 21(2), 785-816.
- Lima, G. L., Philot, J. M., Gomes, E. & Bianchini, B. L. (2024). Funções e disfunções cognitivas: uma análise a partir de uma situação vinculando a Matemática e a Eletrônica Analógica. In: *Anais do XXIV Encuentro Nacional y XVI Internacional de Educación Matemática en Carreras de Ingeniería* (pp. 1-7), San Francisco, Argentina.
- Llinares, S. (2003). Fracciones, decimales y razón. Desde la relación parte-todo al razonamiento proporcional. In: C. Chamorro (Org.). *Didáctica de las Matemáticas*. (pp. 187-220). Madrid: Pearson-Prentice Hall.
- Modestou, M. & Gagatsis, A. (2010). Cognitive and metacognitive aspects of proportional reasoning. *Mathematical Thinking and Learning*, 12(1), 36-53.
- Proulx, J. (2024). Relative Proportional Reasoning: Transition from Additive to Multiplicative Thinking Through Qualitative and Quantitative Enmeshments. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 22, 353–374.
- Reyes-Gasperini, D. (2016). *Empoderamiento docente desde una visión socioepistemológica: una alternativa de intervención para la transformación y la mejora educativa*. 2016. 599f. Tese (Doutorado em Ciência – especialidade Matemática Educativa). Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del Instituto Politécnico Nacional. Ciudad de México, México.
- Reyes-Gasperini, D., Montiel, G. & Cantoral, R. (2014). 'Cuando una crece, la otra decrece'... ¿Proporcionalidad inversa o directa? *Revista Premisa*, 16(62), 3-15.