Praxeologias matemáticas em tarefas envolvendo o fractal Árvore Pitagórica

Mathematical praxeologies in tasks involving the Pythagorean Tree fractal

Luan Padilha[1]
Mariana Moran[2]

Resumo: Este estudo, um recorte de uma pesquisa concluída, visa a apresentar praxeologias matemáticas modeladas em uma análise *a priori* de tarefas que exploram a construção do fractal Árvore Pitagórica. Como aporte teórico-metodológico, este trabalho fundamenta-se nos princípios da Teoria Antropológica do Didático (TAD), que permitiu a elaboração de uma organização praxeológica, de forma a modelar o objeto matemático que foi foco da sequência didática. As análises *a priori* permitiram associar possíveis praxeologias matemáticas aos componentes curriculares presentes na Base Nacional Comum Curricular, como *linguagem algébrica: variável e incógnita e relações métricas no triângulo retângulo*, e *utilizar a simbologia algébrica para expressar regularidades encontradas em sequências numéricas*.

Palavras-chave: Educação Matemática. Didática da Matemática. Organizações Matemáticas. Geometria Fractal.

Abstract: This study, an excerpt from completed research, aims at presenting mathematical praxeologies modeled in an a priori analysis of tasks that explore the construction of the Pythagorean Tree fractal. As a theoretical-methodological contribution, this work is based on the principles of Anthropological Theory of Didactics (TAD), which allowed the elaboration of a praxeological organization to model the mathematical object focus of the didactic sequence. A priori analyzes made it possible to associate possible mathematical praxeologies with curricular components present in the *Base Nacional Comum Curricular*, such as *algebraic language: variable and unknown and metric relations in the right triangle*; and *using algebraic symbology to express regularities found in numerical sequences*.

Keywords: Mathematics Education. Mathematics Didactics. Mathematical Organizations. Fractal Geometry.

1 Introdução

A Matemática pode fornecer, ao professor e ao estudante, prazeres oriundos de várias formas de pensar, ver e agir, seja pela superação de dificuldades ao resolver problemas, seja pela exploração de objetos geométricos, ou ainda por meio de situações contextualizadas associadas ao cotidiano, entre outras maneiras. Observar o belo e apresentar senso estético se faz presente em temas da Matemática. Um desses temas que pode contribuir para o desenvolvimento do senso estético e apreciar do belo é o fractal, mais especificamente a Geometria dos Fractais.

O matemático polonês Benoit Mandelbrot foi um matemático responsável por nomear e organizar boa parte do estudo referente aos objetos geométricos chamados fractais. Não há, ainda hoje, uma definição matemática que abranja todas essas entidades geométricas, mas elas possuem propriedades particulares, entre as quais se destacam a autossimilaridade, a complexidade infinita e a dimensão fracionária (Barbosa, 2005). Mandelbrot denominou esses

[1] Universidade Estadual de Maringá • Maringá, PR — Brasil • ✉ padilha.luan16@gmail.com • ORCID https://orcid.org/0000-0003-4616-3182
[2] Universidade Estadual de Maringá • Maringá, PR — Brasil • ✉ mmbarroso@uem.br • ORCID https://orcid.org/0000-0001-8887-8560

ISSN 2764-3158

objetos de fractais baseando-se na palavra *fractus*, um adjetivo do latim derivado do verbo *frangere*, que corresponde a quebrar ou fragmentar.

A abordagem da Geometria Fractal em sala de aula e a construção de fractais utilizando um software como o GeoGebra proporcionam, aos professores, a exploração de diversos conteúdos matemáticos, e propiciam aos alunos perpassar diferentes representações semióticas durante a exploração de entes geométricos, por exemplo, do fractal Hexagonal Tipo Dürer (Moran & Rezende, 2020).

Compreendemos que, por meio da Geometria dos Fractais, é possível abordar diferentes conteúdos matemáticos, como progressão geométrica, função logarítmica, equivalência de frações, dentre outros. Nesse sentido, na presente discussão, apresentamos parte da pesquisa de Padilha dos Santos (2023), que investigou uma proposta para o ensino e a aprendizagem desses objetos geométricos nas aulas de matemática, de forma a estudar objetos matemáticos preconizados na Base Nacional Comum Curricular (BNCC).

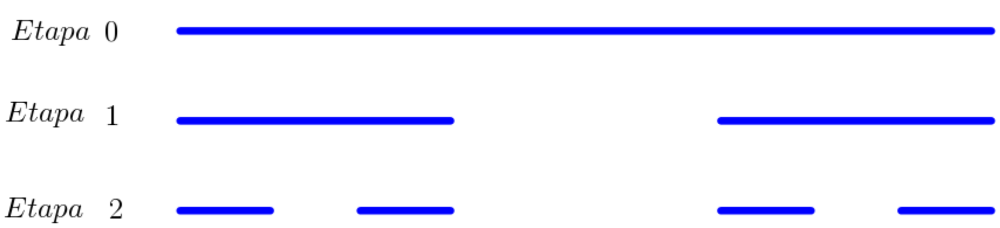
Para embasar teórica e metodologicamente a proposta de construção do fractal Árvore Pitagórica, este trabalho se fundamenta na Teoria Antropológica do Didático (TAD), desenvolvida por Yves Chevallard (1998). Ela permitiu realizar uma Organização Matemática e Didática de modo a identificar os objetos de conhecimento que podem ser estudados quando se explora esse fractal geométrica e algebricamente.

O estudo foi pautado na Engenharia Didática, metodologia de pesquisa dividida em quatro fases: a) Análises preliminares; b) *Design* e análise *a priori*; c) Experimentação e implementação da sequência didática; e d) Análise *a posteriori* e validação. Contudo, neste trabalho, discutimos apenas a análise *a priori* de duas tarefas da sequência didática, as quais exploram o cálculo da medida do comprimento do lado dos quadrados e o perímetro do fractal em suas etapas. Essas tarefas visam a mobilizar uma expressão que represente o cálculo a partir do modelo gerador com lado de comprimento unitário. Para isso, modelizamos nossa investigação por meio da TAD, que nos deu condições para explorar nosso objeto geométrico e suas características matemáticas.

2 Sobre a Geometria dos Fractais

Um fractal possui suas partes semelhantes ao conjunto como um todo, de forma exata ou aproximada, e isso é chamado de autossimilaridade (Barbosa, 2005). A autossimilaridade exata é possível através de instrumentos de desenho, como o lápis, o compasso, a régua e o esquadro, ou por meio de softwares de geometria dinâmica. Tomemos como exemplo a construção do fractal Conjunto de Cantor feita no GeoGebra, conforme mostra a figura a seguir.

Figura 1 – Conjunto de Cantor da etapa 0 até a etapa 2



Fonte: Elaborada pelos autores.

Em relação à noção de autossimilaridade aproximada, em que os padrões não se repetem com exatidão, podemos observar esses aspectos em elementos presentes na natureza, como nos brócolis e na samambaia, conforme ilustram as Figuras 2 e 3.

Figura 2 – Brócolis Romanesco

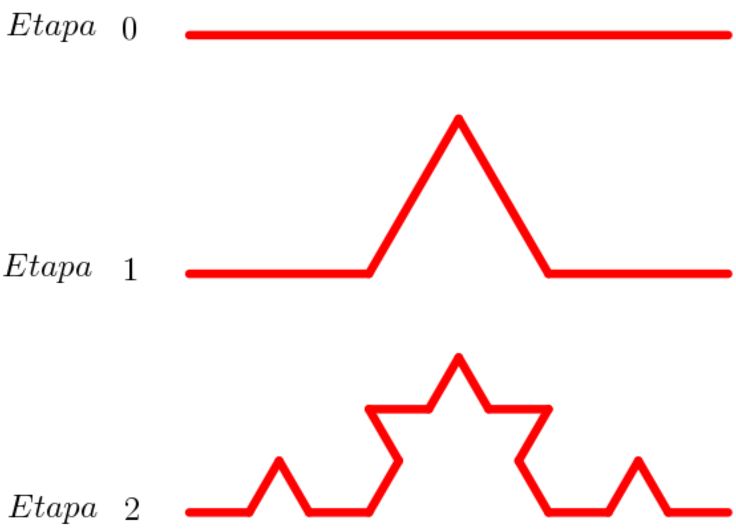
Fonte: Wikipedia (2023).

Figura 3 - Samambaia

Fonte: Fractal Matemático (2011).

O ramo da samambaia é semelhante à folha da samambaia, que por sua vez é semelhante à samambaia como um todo, consistindo em uma forma de autossimilaridade aproximada. Outra característica do fractal é a complexidade infinita, expressada através do processo gerador dos fractais, podendo ser recursivo ou iterativo (Barbosa, 2005). Em um fractal, podemos realizar um número infinito de iterações e nunca obteremos a imagem final desse fractal. A Figura 4 apresenta o fractal Curva de Koch com iterações até a sua segunda etapa.

Figura 4 – Curva de Koch da etapa 0 até a etapa 2

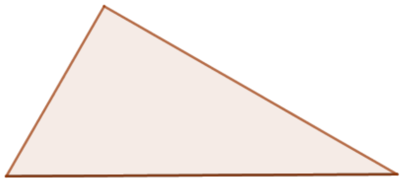


Fonte: Elaborada pelos autores.

O fractal será a figura limite do seu processo gerador, e vale ressaltar que esses objetos geométricos não perdem sua definição formal na medida em que são ampliados, mantendo a estrutura idêntica à original. É possível observar que, a cada segmento do fractal Curva de Koch, é realizada sua divisão em 3 partes de mesma medida, e na segunda parte constrói-se um triângulo equilátero. Tal iteração pode ser repetida infinitamente, dependendo da limitação do recurso utilizado para a representação do fractal. Já a dimensão de um fractal não é necessariamente um número inteiro. Ela representa o grau de ocupação do fractal no espaço e está ligada ao grau de irregularidade ou fragmentação (Barbosa, 2005).

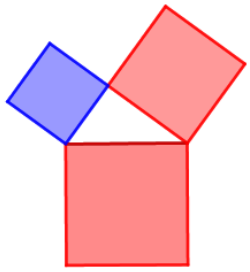
O fractal Árvore Pitagórica, objeto de estudo deste trabalho, consiste inicialmente em um triângulo retângulo, cujos catetos e hipotenusa são dados pelo terno pitagórico fundamental (3, 4, 5) (Figura 5). A partir da hipotenusa e dos catetos, os quadrados que formam o fractal são construídos. O quadrado, que tem como medida a hipotenusa, é o tronco inicial da árvore, e os quadrados que têm os catetos como medida constituem o iniciador-gerador (Figura 6).

Figura 5 – Triângulo retângulo



Fonte: Padilha dos Santos (2023).

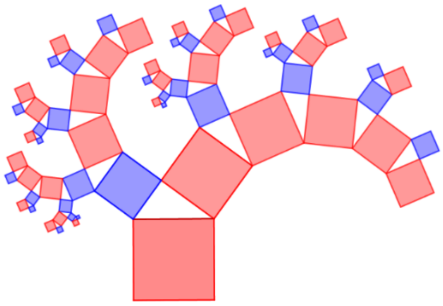
Figura 6 – Tronco inicial e iniciador-gerador



Fonte: Padilha dos Santos (2023).

Para cada nova etapa são construídos, sobre o lado de cada quadrado oposto ao respectivo cateto, novos triângulos retângulos semelhantes ao inicial, tendo a medida da hipotenusa como aquela do lado do quadrado em que o triângulo está justaposto. A cada nova iteração, cada cateto se transforma em um lado de um novo quadrado, que se transforma em hipotenusa. Conforme explica Barbosa (2005, p. 62), "[...] para se obter a autossimilaridade, os novos triângulos retângulos precisam ser semelhantes ao inicial, isto é, seus lados devem ser proporcionais aos números 3, 4 e 5" (Figura 7).

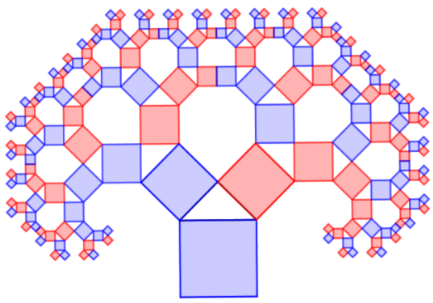
Figura 7 – Árvore Pitagórica fundamental em sua etapa 5



Fonte: Padilha dos Santos (2023).

Fractais de árvores pitagóricas podem variar o triângulo inicial em outros ternos pitagóricos, um exemplo é com o triângulo isósceles retangular, conforme ilustra a imagem a seguir.

Figura 8 – Árvore Pitagórica Isósceles Retangular em sua etapa 7



Fonte: Padilha dos Santos (2023).

A Árvore Pitagórica pode ser construída utilizando recursos instrumentais de desenho geométrico, material manipulável, ou pelo uso de softwares de geometria. Para esta proposta de exploração da Árvore Pitagórica, construímos uma representação desse fractal, conforme

ISSN 2764-3158

apresentado anteriormente na Figura 8, por meio do software GeoGebra.

3 Pressupostos teóricos e metodológicos

Entre os constructos teóricos desenvolvidos no campo da Didática da Matemática, a TAD situa a atividade de matemática e o estudo de Matemática no conjunto das atividades humanas e das instituições sociais, conforme observa Chevallard (1998). Diante disso, o postulado básico da TAD corresponde à possibilidade de analisar toda atividade humana por meio de um modelo único, denominado praxeologia.

O trabalho direcionado para o ensino da Matemática pode ser moldado em termos de praxeologia, composta por uma Organização Matemática (OM) e uma Organização Didática (OD), que contribui para uma construção do conhecimento, de modo a possibilitar avanço na compreensão dos assuntos propostos (Chevallard, 2018). Para isso, é possível estabelecer uma estrutura praxeológica em prol do ensino e da investigação desse conhecimento.

A estrutura praxeológica consiste em um quarteto composto por um tipo de tarefa (T), que é realizada a partir da mobilização de uma técnica (τ), que precisa ser justificada por uma tecnologia (θ), que tenha uma teoria (Θ) que rege a tecnologia em si (Chevallard, 2018). Uma determinada praxeologia matemática é denotada por $[T \;/\; \tau \;/\; \theta \;/\; \Theta]$, que comporta a parte prático-técnica ou práxis (também chamada de bloco do saber-fazer), denotada por $\prod = [T \;/\; \tau]$; e a parte tecnológico-teórica ou logos (também identificada como bloco do saber) é denotada por $\Lambda = [\theta \;/\; \Theta]$ (Chevallard, 2018).

Segundo Chevallard (1998), as noções de tarefa (t) e os tipos de tarefa (T) podem ser expressos por meio de um verbo que designa ação e está associada a um objeto, como por exemplo, varrer a sala, dividir um inteiro por outro, cumprimentar um vizinho, ler um manual, subir as escadas, ou integrar a função $f(x) = x\, ln\, x$. Ademais, o pesquisador (Chevallard, 1998, p. 2) esclarece que a noção de tipo de tarefa supõe um objeto relativamente preciso, e que "calcular o valor de uma função em um ponto é um tipo de tarefa, mas calcular, muito simplesmente, é o que chamaremos de gênero de tarefas, que exige um determinado substantivo".

Assim, um determinado tipo de tarefa (T) exige um modo de fazer ou modo de realizar as tarefas (t): a ele damos o nome de técnica. De acordo com Chevallard (1998, p. 3, tradução nossa), "uma técnica (τ) não é necessariamente de natureza algorítmica". Nesse sentido, por exemplo, pintar uma paisagem e fundar uma família são tarefas que não exigem uma técnica algorítmica.

Com relação à tecnologia (θ), discurso que tem o objetivo de justificar racionalmente a técnica (τ), ela possui uma racionalidade que varia de acordo com o espaço institucional em que a técnica é desenvolvida (Dias & Santos Júnior, 2018).

Desse modo, Chevallard (1998) enfatiza que, em uma determinada instituição (I), qualquer que seja o tipo de tarefas (T), a técnica (τ) relativa à T é sempre acompanhada por um resquício de tecnologia (θ). Além disso, elementos tecnológicos podem estar integrados às técnicas, conforme podemos observar no exemplo de Dias e Santos Júnior (2018):

> [...] dada uma função afim, ao calcular o valor numérico dessa função para determinado valor de x, o mesmo discurso tem a dupla função, técnica e tecnológica, pois quando dizemos 'substituir o valor de x na fórmula, efetuar as operações indicadas e determinar o valor de y', este discurso permite, ao mesmo tempo, que se encontre o resultado pedido (função técnica) e que se justifique que é o resultado

esperado (função tecnológica) (p. 537).

Por sua vez, Chevallard (2018) elucida que o discurso tecnológico contém afirmações mais ou menos explícitas, para as quais podemos pedir razões. Passamos, então, para um nível superior de justificação-explicação-produção, o da teoria (Θ), que assume, em relação à tecnologia, o papel que ela desempenha em relação à técnica, ou seja, a tecnologia da tecnologia. De acordo com o autor, a regressão de justificativa pode ser infinita, mas três níveis são suficientes (técnica/ tecnologia/ teoria) para explicar uma atividade analisada.

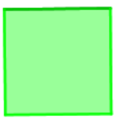
Neste trabalho, apresentamos uma Organização Praxeológica da construção do fractal Árvore Pitagórica. Para isso, foi utilizado o software GeoGebra[3], pois ele é um programa que reúne ferramentas tradicionais de geometria com as mais avançadas da álgebra e do cálculo. Assim, existe a vantagem didática de apresentar, ao mesmo tempo, duas representações diferentes de um mesmo objeto que interagem entre si: sua representação geométrica e sua representação algébrica. As tarefas apresentadas a seguir estão relacionadas ao cálculo da medida do lado dos quadrados e à medida do perímetro do fractal em suas etapas, investigando uma expressão que represente o cálculo a partir do modelo gerador com lado de comprimento unitário.

4 Praxeologias matemáticas na análise *a priori*

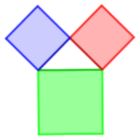
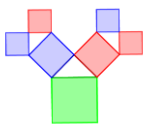
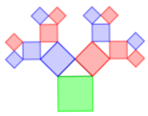
Elaboramos quadros relacionando os quartetos praxeológicos esperados como repostas (análise *a priori*). Para a organização da análise praxeológica, identificamos as tarefas e as enumeramos com t_1 e t_2. Além disso, cada tarefa é composta por cinco subtarefas (tarefas menores que auxiliam na resolução da tarefa maior). Indicamos a técnica, a tecnologia e a teoria correspondente a cada subtarefa.

A seguir, apresentamos o Quadro 1, com o tipo de tarefa, técnica, tecnologia e teoria previstas para o desenvolvimento da sequência didática, de modo a explorar a generalização para o cálculo da medida do lado de cada quadrado construído em cada etapa da construção do fractal Árvore Pitagórica.

Quadro 1 – Análise praxeológica do Tipo de Tarefa T_1

Tipo de Tarefa T_1	Generalizar o cálculo da medida do lado de cada quadrado construído em cada etapa da construção do fractal Árvore Pitagórica.			
Tarefa t_1	Construir uma fórmula para o cálculo da medida do lado de cada quadrado construído em cada etapa do fractal Árvore Pitagórica, considerando 1 cm como a medida do lado do quadrado inicial.			
Etapa	**Subtarefa**	**Técnica τ**	**Tecnologia θ**	**Teoria Θ**
 **0**	$t_{1.1}$: Encontrar a medida do lado de cada quadrado construído na Etapa 0 do fractal.	$\tau_{1.1}$: Considerar a medida apresentada no enunciado da tarefa.	$\theta_{1.1}$: Interpretação do enunciado matemático.	$\Theta_{1.1}$: Aritmética.

[3] Por conta da limitação de páginas para a escrita deste artigo, não apresentamos detalhes do passo a passo da construção do fractal no GeoGebra. Entretanto, o tutorial de construção está disponível em https://doi.org/10.6084/m9.figshare.24477226.v1

 **1**	$t_{1.2}$: Encontrar a medida do lado de cada quadrado construído na Etapa 1 do fractal.	$\tau_{1.2}$: Reconhecer o *triângulo retângulo isósceles* formado pelo modelo gerador, considerar a medida do lado do quadrado da Etapa 0 como a hipotenusa do triângulo formado, aplicar o Teorema de Pitágoras, operar algebricamente e operar números irracionais.	$\theta_{1.2}$: Conhecimento do elemento figural *triângulo retângulo isósceles*, da aplicação do Teorema de Pitágoras, de soma algébrica, e de multiplicação de números irracionais.	$\Theta_{1.2}$: Álgebra, Aritmética e Geometria.
 **2**	$t_{1.3}$: Encontrar a medida do lado de cada quadrado construído na Etapa 2 do fractal.	$\tau_{1.3}$: Reconhecer o *triângulo retângulo isósceles* formado pelo modelo gerador, considerar a medida do lado dos quadrados construídos na Etapa 1 como a hipotenusa dos triângulos formados, aplicar o Teorema de Pitágoras e operar algebricamente.	$\theta_{1.3}$: Conhecimento do elemento figural *triângulo retângulo isósceles*, da aplicação do Teorema de Pitágoras, de soma algébrica, e de multiplicação de números irracionais.	$\Theta_{1.3}$: Álgebra, Aritmética e Geometria.
 **3**	$t_{1.4}$: Encontrar a medida do lado de cada quadrado construído na Etapa 3 do fractal.	$\tau_{1.4}$: Reconhecer o *triângulo retângulo isósceles* formado pelo modelo gerador, considerar a medida do lado dos quadrados construídos na Etapa 2 como a hipotenusa dos triângulos formados, aplicar o Teorema de Pitágoras e operar algebricamente.	$\theta_{1.4}$: Conhecimento do elemento figural *triângulo retângulo isósceles*, da aplicação do Teorema de Pitágoras, de soma algébrica, e de multiplicação de números irracionais.	$\Theta_{1.4}$: Álgebra, Aritmética e Geometria.
N	$t_{1.5}$: Construir uma fórmula para o cálculo da medida do lado de cada quadrado construído na Etapa *N* do fractal Árvore Pitagórica.	$\tau_{1.5}$: Identificar um fator comum entre as subtarefas anteriores, uma relação numérica entre a medida do lado de cada quadrado construído e os níveis, e escrever algebricamente a expressão para o cálculo da medida do lado de cada quadrado construído em uma etapa qualquer.	$\theta_{1.5}$: Noção de padrão recorrente; de potenciação de números inteiros, racionais e irracionais; e de progressão geométrica.	$\Theta_{1.5}$: Álgebra, Aritmética e Geometria.

Fonte: Adaptado de Padilha dos Santos (2023, p. 75-76).

Em vista do que foi apresentado no Quadro 1, descrevemos possíveis respostas para cada uma das subtarefas. Em relação à subtarefa $t_{1.1}$, uma estratégia de resolução seria

ISSN 2764-3158

considerar a medida apresentada no enunciado da tarefa; logo, a medida do lado do quadrado é 1 cm.

Para as subtarefas $t_{1.2}, t_{1.3}$ e $t_{1.4}$, a estratégia de resolução utilizada consiste em reconhecer o triângulo retângulo isósceles formado entre os quadrados construídos a partir do modelo gerador e aplicar o Teorema de Pitágoras. Considerando que a medida do lado do quadrado da Etapa 0 é 1 cm e que um dos lados desse quadrado corresponde à hipotenusa do triângulo retângulo isósceles formado, aplicamos o Teoremas de Pitágoras:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Onde $a = 1$ e sabendo que o triângulo é isósceles, temos que $b = c$, onde b e c são os catetos do triângulo, então temos:

$$1^2 = b^2 + b^2$$

$$1^2 = 2b^2$$

Resolvendo a equação, teremos:

$$b = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Logo, a medida do lado do quadrado construído na Etapa 1 é $\frac{\sqrt{2}}{2}$ cm.

Repetimos o mesmo processo para as subtarefas $t_{1.3}$ e $t_{1.4}$. Considerando que a medida do lado do quadrado da Etapa 1 é $\frac{\sqrt{2}}{2}$ cm e que um dos lados desse quadrado corresponde à hipotenusa do triângulo retângulo isósceles formado, aplicamos o Teoremas de Pitágoras:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = b^2 + b^2$$

$$b = \frac{1}{2}$$

Assim, a medida do lado do quadrado construído na Etapa 2 é $\frac{1}{2}$ cm.

Em relação à subtarefa $t_{1.4}$, considerando que a medida do lado do quadrado da Etapa 2 é $\frac{1}{2}$ cm e que um dos lados desse quadrado corresponde à hipotenusa do triângulo retângulo isósceles formado, aplicamos o Teoremas de Pitágoras:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 = b^2 + b^2$$

$$b = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

Portanto, a medida do lado do quadrado construído na Etapa 3 é $\frac{\sqrt{2}}{4}$ cm.

Para a subtarefa $t_{1.5}$, a estratégia de resolução pode consistir em identificar um fator comum entre as subtarefas anteriores, uma relação numérica entre a medida do lado de cada quadrado construído e os níveis, e escrever algebricamente a expressão para o cálculo da medida do lado de cada quadrado construído em uma etapa qualquer. O fator comum entre as subtarefas anteriores e relação numérica entre a quantidade de quadrados construídos e os níveis ocorre da seguinte maneira: da Etapa 0 para a Etapa 1, a medida do lado quadrado construído passa de 1 cm para $\frac{\sqrt{2}}{2}$ cm; da Etapa 1 para a Etapa 2, a medida do lado quadrado construído passa de $\frac{\sqrt{2}}{2}$ cm para $\frac{1}{2}$ cm; e da Etapa 2 para a Etapa 3, a medida do lado quadrado construído passa de $\frac{1}{2}$ cm para $\frac{\sqrt{2}}{4}$ cm. Nesse sentido, é possível escrever algebricamente a expressão para o cálculo da medida do lado do quadrado construído em uma etapa qualquer na forma $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$, em que n corresponde ao nível do fractal.

Em torno do que foi apresentado no Quadro 1, buscamos estabelecer uma relação entre as praxeologias e habilidades, objetos de conhecimento e unidades temáticas prescritas na BNCC.

Iniciamos com a técnica $\tau_{1.1}$, a qual nos direcionou para a seguinte habilidade:

> (EF06MA03) Resolver e elaborar problemas que envolvam cálculos (mentais ou escritos, exatos ou aproximados) com números naturais, por meio de estratégias variadas, com compreensão dos processos neles envolvidos, com e sem uso de calculadora (Brasil, 2018, p. 301).

Em seguida, as técnicas $\tau_{1.2}$, $\tau_{1.3}$ e $\tau_{1.4}$ nos direcionaram para as habilidades a seguir:

> (EF01MA14) Identificar e nomear figuras planas (círculo, quadrado, retângulo e triângulo) em desenhos apresentados em diferentes disposições ou em contornos de faces de sólidos geométricos (Brasil, 2018, p. 279).
> [...] (EF07MA12) Resolver e elaborar problemas que envolvam as operações com números racionais (Brasil, 2018, p. 307).
> [...] (EF09MA03) Efetuar cálculos com números reais, inclusive potências com expoentes fracionários (Brasil, 2018, p. 317).
> [...] (EF09MA14) Resolver e elaborar problemas de aplicação do teorema de Pitágoras ou das relações de proporcionalidade envolvendo retas paralelas cortadas por secantes (Brasil, 2018, p. 319).

E a técnica $\tau_{1.5}$ está relacionada com as seguintes habilidades:

> (EF07MA12) Resolver e elaborar problemas que envolvam as operações com números racionais (Brasil, 2018, p. 307).
> [...] (EF07MA15) Utilizar a simbologia algébrica para expressar regularidades

> encontradas em sequências numéricas (Brasil, 2018, p. 307).
> [...] (EF08MA06) Resolver e elaborar problemas que envolvam cálculo do valor numérico de expressões algébricas utilizando as propriedades das operações (Brasil, 2018, p. 313).
> [...] (EF09MA03) Efetuar cálculos com números reais, inclusive potências com expoentes fracionários (Brasil, 2018, p. 317).
> [...] (EF09MA08) Resolver e elaborar problemas que envolvam relações de proporcionalidade direta e inversa entre duas ou mais grandezas, inclusive escalas, divisão em partes proporcionais e taxa de variação, em contextos socioculturais, ambientais e de outras áreas (Brasil, 2018, p. 317).

No que se refere às tecnologias elencadas no quarteto do Quadro 1, observamos que elas remetem a objetos de conhecimento sugeridos pela BNCC. Em outras palavras, a tecnologia $\theta_{1.1}$ está relacionada com o objeto de conhecimento "Operações (adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação) com números naturais" (Brasil, 2018, p. 300). Já as tecnologias $\theta_{1.2}$, $\theta_{1.3}$ e $\theta_{1.4}$ estão relacionadas com os seguintes objetos de conhecimentos:

> Números racionais na representação fracionária e na decimal: usos, ordenação e associação com pontos da reta numérica e operações (Brasil, 2018, p. 306).
> [...] Valor numérico de expressões algébricas (Brasil, 2018, p. 312).
> [...] Potências com expoentes negativos e fracionários (Brasil, 2018, p. 316).
> [...] Relações métricas no triângulo retângulo (Brasil, 2018, p. 318).

A tecnologia $\theta_{1.5}$ está relacionada com:

> Números racionais na representação fracionária e na decimal: usos, ordenação e associação com pontos da reta numérica e operações (Brasil, 2018, p. 306).
> [...] Linguagem algébrica: variável e incógnita (Brasil, 2018, p. 306).
> [...] Valor numérico de expressões algébricas (Brasil, 2018, p. 312).
> [...] Potências com expoentes negativos e fracionários (Brasil, 2018, p. 316).
> [...] Grandezas diretamente proporcionais e grandezas inversamente proporcionais (Brasil, 2018, p. 316).

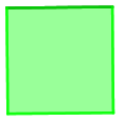
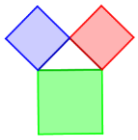
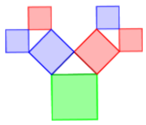
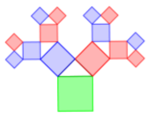
Por último, no que concerne às teorias apresentadas no quarteto da tarefa t_1, elas se relacionam às unidades temáticas Números, Geometria e Álgebra (Brasil, 2018). Dessa forma, a modelização dessa tarefa em termos praxeológicos nos possibilitou identificar habilidades, objetos de conhecimento e unidades temáticas constantes na BNCC (Brasil, 2018), e podem ser exploradas durante a sua execução.

A seguir, apresentamos o Quadro 2, com a análise praxeológica para o tipo de tarefa T_2, referente à tarefa t_2, de modo a explorar a generalização para o cálculo da medida do perímetro de cada quadrado construído em cada etapa da construção do fractal Árvore Pitagórica.

Quadro 2 – Análise praxeológica do Tipo de Tarefa T_2

Tipo de Tarefa T_2	Generalizar o cálculo da medida do perímetro de cada quadrado construído em cada etapa da construção do fractal Árvore Pitagórica.			
Tarefa t_2	Construir uma fórmula para o cálculo da medida do perímetro de cada quadrado construído em cada etapa do fractal Árvore Pitagórica.			
Etapa	**Subtarefa**	**Técnica τ**	**Tecnologia θ**	**Teoria Θ**

ISSN 2764-3158

 **0**	$t_{2.1}$: Encontrar a medida do perímetro de cada quadrado construído na Etapa 0 do fractal.	$\tau_{2.1}$: Multiplicar a medida do lado do quadrado por 4.	$\theta_{2.1}$: Noção de multiplicação aritmética e noção geométrica de perímetro.	$\Theta_{2.1}$: Aritmética.
 **1**	$t_{2.2}$: Encontrar a medida do perímetro de cada quadrado construído na Etapa 1 do fractal.	$\tau_{2.2}$: Multiplicar a medida do lado do quadrado por 4.	$\theta_{2.2}$: Noção de multiplicação aritmética e noção geométrica de perímetro.	$\Theta_{2.2}$: Aritmética.
 **2**	$t_{2.3}$: Encontrar a medida do perímetro de cada quadrado construído na Etapa 2 do fractal.	$\tau_{2.3}$: Multiplicar a medida do lado do quadrado por 4.	$\theta_{2.3}$: Noção de multiplicação aritmética e noção geométrica de perímetro.	$\Theta_{2.3}$: Aritmética.
 **3**	$t_{2.4}$: Encontrar a medida do perímetro de cada quadrado construído na Etapa 3 do fractal.	$\tau_{2.4}$: Multiplicar a medida do lado do quadrado por 4.	$\theta_{2.4}$: Noção de multiplicação aritmética e noção geométrica de perímetro.	$\Theta_{2.4}$: Aritmética.
N	$t_{2.5}$: Construir uma fórmula para o cálculo da medida do perímetro de cada quadrado construído na Etapa *N* do fractal Árvore Pitagórica.	$\tau_{2.5}$: Identificar um fator comum entre as subtarefas anteriores, uma relação numérica entre a medida do perímetro de cada quadrado construído e os níveis, e escrever algebricamente a expressão para o cálculo da medida do perímetro de cada quadrado construído em uma etapa qualquer.	$\theta_{2.5}$: Noção de padrão recorrente; noção de potenciação de números inteiros, racionais e irracionais; e noção de progressão geométrica.	$\Theta_{2.5}$: Álgebra, Aritmética e Geometria.

Fonte: Adaptado de Padilha dos Santos (2023, p. 80-81).

Diante do que foi apresentado no Quadro 2, descrevemos possíveis respostas para cada uma das subtarefas. Em relação às subtarefas $t_{2.1}$, $t_{2.2}$, $t_{2.3}$ e $t_{2.4}$, optamos por utilizar a mesma estratégia de resolução que corresponde a multiplicar por quatro a medida do lado do quadrado construído. Isso porque foi considerado que a medida do perímetro é dada pela soma da medida de todos os lados e que o quadrado possui quatro lados. Dessa forma, para a subtarefa $t_{2.1}$, teremos 4×1, resultando em um perímetro de medida 4 cm; para a subtarefa $t_{2.2}$, teremos $4 \times$

ISSN 2764-3158

$\frac{\sqrt{2}}{2}$, obtendo $2\sqrt{2}$ cm como a medida do perímetro; para a subtarefa $t_{2.3}$, teremos $4 \times \frac{1}{2}$, resultando em um perímetro de medida 2 cm; e para a subtarefa $t_{2.4}$, teremos $4 \times \frac{\sqrt{2}}{4}$, obtendo $\sqrt{2}$ cm como medida do perímetro.

Para a subtarefa $t_{2.5}$, a estratégia de resolução escolhida foi identificar um fator comum entre as subtarefas anteriores, uma relação numérica entre a medida do perímetro de cada quadrado construído e os níveis, e escrever algebricamente a expressão para o cálculo da medida do perímetro do quadrado construído em uma etapa qualquer. O fator comum entre as subtarefas anteriores e relação numérica entre a medida do perímetro de cada quadrado construído e os níveis ocorre da seguinte maneira: da Etapa 0 para a Etapa 1, a medida do perímetro quadrado construído passa de 4 cm para $2\sqrt{2}$ cm; da Etapa 1 para a Etapa 2, a medida do perímetro do quadrado construído passa de $2\sqrt{2}$ cm para 2 cm; e da Etapa 2 para a Etapa 3, a medida do perímetro do quadrado construído passa de 2 cm para $\sqrt{2}$ cm. Nesse sentido, é possível escrever algebricamente a expressão para o cálculo da medida do perímetro do quadrado construído em uma etapa qualquer na forma $4 \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n$, em que n corresponde ao nível do fractal.

Em vista do que foi apresentado no Quadro 2, buscamos estabelecer uma relação entre as praxeologias e habilidades, objetos de conhecimento e unidades temáticas prescritas na BNCC. As técnicas $\tau_{2.1}$, $\tau_{2.2}$, $\tau_{2.3}$ e $\tau_{2.4}$ nos direcionaram para as seguintes habilidades:

> (EF01MA14) Identificar e nomear figuras planas (círculo, quadrado, retângulo e triângulo) em desenhos apresentados em diferentes disposições ou em contornos de faces de sólidos geométricos (Brasil, 2018, p. 279).
> [...] (EF07MA12) Resolver e elaborar problemas que envolvam as operações com números racionais (Brasil, 2018, p. 307).
> [...] (EF09MA03) Efetuar cálculos com números reais, inclusive potências com expoentes fracionários (Brasil, 2018, p. 317).

No que diz respeito à técnica $\tau_{2.5}$, ela se relaciona com as habilidades:

> (EF07MA12) Resolver e elaborar problemas que envolvam as operações com números racionais (Brasil, 2018, p. 307).
> [...] (EF07MA15) Utilizar a simbologia algébrica para expressar regularidades encontradas em sequências numéricas (Brasil, 2018, p. 307).
> [...] (EF08MA06) Resolver e elaborar problemas que envolvam cálculo do valor numérico de expressões algébricas utilizando as propriedades das operações (Brasil, 2018, p. 313).
> [...] (EF09MA03) Efetuar cálculos com números reais, inclusive potências com expoentes fracionários (Brasil, 2018, p. 317).
> [...] (EF09MA08) Resolver e elaborar problemas que envolvam relações de proporcionalidade direta e inversa entre duas ou mais grandezas, inclusive escalas, divisão em partes proporcionais e taxa de variação, em contextos socioculturais, ambientais e de outras áreas (Brasil, 2018, p. 317).

Em relação às tecnologias elencadas no quarteto do Quadro 2, observamos que elas remetem a objetos de conhecimento sugeridos pela BNCC. As tecnologias $\theta_{2.1}$, $\theta_{2.2}$, $\theta_{2.3}$ e $\theta_{2.4}$ estão relacionadas com os seguintes objetos de conhecimentos:

> Figuras geométricas planas: reconhecimento do formato das faces de figuras geométricas espaciais (Brasil, 2018, p. 278).

> [...] Números racionais na representação fracionária e na decimal: usos, ordenação e associação com pontos da reta numérica e operações (Brasil, 2018, p. 308).
> [...] Potências com expoentes negativos e fracionários (Brasil, 2018, p. 316).

Já a tecnologia $\theta_{2.5}$ relaciona-se com os seguintes objetos de conhecimentos:

> Números racionais na representação fracionária e na decimal: usos, ordenação e associação com pontos da reta numérica e operações (Brasil, 2018, p. 306).
> [...] Linguagem algébrica: variável e incógnita (Brasil, 2018, p. 306).
> [...] Valor numérico de expressões algébricas (Brasil, 2018, p. 312).
> [...] Potências com expoentes negativos e fracionários (Brasil, 2018, p. 316).
> [...] Grandezas diretamente proporcionais e grandezas inversamente proporcionais (Brasil, 2018, p. 316).

No que concerne às teorias apresentadas no quarteto da tarefa t_2, elas se relacionam às unidades temáticas Números, Geometria e Álgebra (Brasil, 2018). Dessa forma, a modelização dessa tarefa em termos praxeológicos nos possibilitou identificar habilidades, objetos de conhecimento e unidades temáticas constantes na BNCC e que podem ser exploradas durante a sua execução.

Considerações finais

No interesse de aprofundar os estudos a respeito do objeto fractal Árvore Pitagórica, encontramos na TAD um suporte metodológico-teórico na identificação das praxeologias matemáticas de forma que estabelecemos uma relação entre os quartetos praxeológicos e os elementos da BNCC. Identificamos que as técnicas empregadas na OM nos direcionam às habilidades, analogamente, as tecnologias utilizadas para justificar as técnicas podem indicar objetos de conhecimento da matemática, e por fim, as teorias que regem as tecnologias, conduzem às unidades temáticas.

Portanto, destacamos que a mobilização das habilidades e objetos de conhecimento identificados na análise praxeológica foram encontrados na área de Matemática e suas Tecnologias sugeridos na BNCC para o Ensino Fundamental, uma vez que a área de Matemática e suas Tecnologias constante na BNCC para o Ensino Médio não nos possibilitou fazer tal investigação. A razão para isso é que as competências específicas e habilidades nela descritas não estão relacionadas com as técnicas e as tecnologias, como as habilidades e objetos de conhecimento do documento do Ensino Fundamental. As habilidades descritas na BNCC para o Ensino Médio direcionam a questões amplas, como aplicações e elaboração de estratégias para resolver e interpretar situações-problema, o que não nos possibilitou fazer a investigação na presente discussão.

O uso do software GeoGebra para a construção da Árvore Pitagórica também se apresenta com um bom recurso para auxiliar no entendimento dos aspectos geométricos relacionados à construção, também para a visualização e as explorações matemáticas advindas desse fractal. A partir disso, ressaltamos que as duas tarefas propostas e estudadas possibilitam a articulação da Geometria dos Fractais com outros objetos de conhecimento, bem como o desenvolvimento de diversas habilidades durante a sua exploração.

Sendo assim, concluímos que a elaboração e a escolha de tarefas que proporcionem o trabalho com os fractais nas aulas de Matemática pode contribuir com a aprendizagem desse componente em diferentes níveis de ensino, de modo dinâmico e interessante.

Agradecimentos

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Referências

Barbosa, R. M. (2005). *Descobrindo a Geometria Fractal: para a sala de aula*. (v. 1, 3. ed.). Belo Horizonte, MG: Autêntica.

Brasil. Ministério da Educação. (2018). *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília, DF: Autor.

Chevallard, Y. (1998). *Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques : l'approche anthropologique*. IUFM d'Aix-Marseille.

Chevallard, Y. (2018). A teoria antropológica do didático face ao professor de matemática. In: S. Almouloud, L. M. S. Farias, A. Henriques. (Org.) *A teoria antropológica do didático: princípios e fundamentos*. (1. ed., pp. 31-50). Curitiba, PR: CRV.

Dias, M. A. & Santos Júnior, V. B. dos. (2018). Elementos da Teoria Antropológica do Didático para Análise das Propostas Institucionais Brasileiras e Metodologias de Atividades e Percursos de Estudo e Pesquisa. In: S. Almouloud, L. M. S. Farias, A. Henriques. (Org.). *A teoria antropológica do didático: princípios e fundamentos*. (1. ed., p. 523-550). Curitiba, PR: CRV.

Fractal Matemático. (2011). *Samambaia*. Disponível em: http://fractalmatematico.blogspot.com/2011/09/o-que-e-um-fractal.html. Acesso: 28 abr. 2024.

Moran, M. & Rezende, V. (2020). Uma exploração do Hexágono de Dürer com professores de Matemática da Educação Básica. *Revista BOEM*, 8(15), 109-127. Disponível em: https://www.revistas.udesc.br/index.php/boem/article/view/17141. Acesso em: 28 abr. 2024.

Padilha dos Santos, L. (2023). *Uma Organização Praxeológica da construção do fractal Árvore Pitagórica utilizando o software GeoGebra*. 2023. 179f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Universidade Estadual do Paraná, União da Vitória, PR.

Wikipedia. (2018). *Romanesco*. Disponível em: https://pt.wikipedia.org/wiki/Romanesco. Acesso em: 28 abr. 2024.

ISSN 2764-3158