



O uso didático do *Powersim* para o ensino de equações diferenciais

The didactic use of *Powersim* for teaching differential equations

Maria Madalena Dulliu¹
Odair José Teixeira da Fonseca²

Resumo: Neste trabalho, apresentamos uma investigação sobre as contribuições do uso do *Software Powersim* durante o desenvolvimento de atividades de cunho investigativo-exploratório envolvendo taxas de variações instantâneas. As atividades foram elaboradas considerando a Teoria do Uso Didático das Tecnologias Digitais (TUDITEC), na perspectiva da Investigação Matemática. Trata-se de uma pesquisa qualitativa com o objetivo de investigar as propriedades da TUDITEC que emergem no uso didático do *Powersim* para o desenvolvimento de atividades envolvendo taxas de variações. Como resultado, as simulações computacionais possibilitaram a construção de gráficos e tabelas temporais, viabilizando assim, a validação das conjecturas elaboradas pelos participantes. Além disso, pode-se observar a ocorrência das quatro Propriedades Tecnológicas Relevantes da TUDITEC, com destaque para a visualização e praticabilidade.

Palavras-chave: Equações Diferenciais. Powersim. Problema da Vazão. Tecnologias Digitais.

Abstract: In this work, we present an investigation into the contributions of using Powersim Software during the development of investigative-exploratory activities involving instantaneous rates of variation. The activities were prepared considering the Theory of Didactic Use of Digital Technologies (TUDITEC), from the perspective of Mathematical Investigation. This is a qualitative research with the objective of investigating the properties of TUDITEC that emerge in the didactic use of Powersim for the development of activities involving variation rates. As a result, the computer simulations enabled the construction of graphs and temporal tables, thus enabling the validation of the conjectures created by the participants. Furthermore, the occurrence of the four Relevant Technological Properties of TUDITEC can be observed, with emphasis on visualization and practicality.

Keywords: Differential Equations. Powersim. Flow Rate Problem. Digital Technologies.

1 Introdução

Ao longo dos anos, pesquisadores têm investigado a utilização de recursos tecnológicos em ambientes de ensino de matemática. Por exemplo, Borba e Villareal (2005, p. 2) argumentam “sobre a importância da coordenação de múltiplas representações, agora possível com *softwares* que disponibilizam representações escritas, algébricas, tabulares e gráficas.” Os autores também discutem como a tecnologia digital pode favorecer a experimentação e a visualização no contexto da educação matemática. Com o rápido avanço tecnológico, os recursos digitais se tornaram uma realidade do cotidiano das pessoas, inclusive nas escolas. Diante disso, Neide e Quartieri (2016) argumentam que não faz mais sentido discutir porque usar e, portanto, a discussão deve se concentrar em como usar as tecnologias digitais em sala de aula. Nessa perspectiva, Dullius, Quartieri e Neide (2023), apresentam a Teoria do Uso Didático das Tecnologias Digitais (TUDITEC), na qual discutem as condições necessárias para

¹ Universidade do Vale do Taquari • Lajedo, RS — Brasil • ✉ madalena@univates.br • ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-0971-992X>

² Universidade Federal de Rondônia • Ariquemes, RO — Brasil • ✉ odair.fonseca@universo.univates.br • ORCID: <https://orcid.org/0000-0003-1469-1378>

garantir o bom uso dos recursos digitais em sala de aula.

Na última edição do Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática (SIPEM), Silva, Vertuan e Boscaroli (2021) apresentaram uma investigação do tipo estado do conhecimento envolvendo a formação de professores, criatividade e recursos tecnológicos, publicados na penúltima (sétima) edição do SIPEM. Segundo os autores, dentre os 226 trabalhos disponíveis nos anais da referida edição, 9 versavam sobre tecnologias digitais. A partir da análise, observa-se que há “uma ênfase das pesquisas na avaliação da integração desses recursos no ensino, na formação do professor para utilização dos *softwares* em sala de aula, como parte importante do conhecimento profissional docente” (Silva *et al.*, 2021, p. 1306). Além disso, entre os trabalhos analisados predomina a utilização de *softwares* de representações dinâmicas, com destaque para o GeoGebra (4 trabalhos), um trabalho dedicado ao *Winplot* e outro ao *SimCalc*, Silva *et al.* (2021). Segundo os investigadores, em geral as pesquisas envolviam aspectos relacionados com a visualização e o pensamento geométrico para compreender comportamento de funções, geometria analítica, resolução de problemas e modelagem matemática. Não foi mencionado nenhum trabalho envolvendo equações diferenciais ordinárias (taxas de variações instantâneas). Indicando assim, que uma investigação sobre uso de recursos computacionais para simulações de taxas de variação por meio de fluxos de níveis se justifica como um campo promissor de pesquisa.

Dessa forma, com o intuito de desenvolver práticas de ensino que promovam o bom uso das tecnologias digitais nas aulas de cálculo diferencial e integral III, na qual são abordados conceitos de equações diferenciais ordinárias, buscamos apresentar o desenvolvimento de atividades que priorizem aspectos interpretativos da solução de uma equação diferencial com a utilização do *software Powersim*, um aplicativo comercial, também disponível em versão gratuita, que possibilita a realização de simulações numéricas por meio de diagramas com níveis de fluxos. Para maiores detalhes sobre este programa, sugerimos a pesquisa de Dullius (2009).

Esta proposta está fundamentada na Teoria do Uso Didático das Tecnologias Digitais (TUDITEC), apresentada por Dullius *et al.* (2023). Para isso, foram elaboradas atividades investigativas-exploratórias segundo os pressupostos de Ponte (2005). Diante do exposto, esta investigação busca responder à questão de pesquisa: *Como as propriedades da TUDITEC são evidenciadas com o uso didático do Powersim durante o desenvolvimento das atividades investigativas-exploratórias envolvendo problemas de vazão e concentração salina?* A partir deste problema, este trabalho tem por objetivo, investigar as propriedades da TUDITEC que emergem no uso didático do *Powersim* para o desenvolvimento de atividades envolvendo taxas de variações. Essencialmente, buscou-se desenvolver atividades contextualizadas por meio de situações envolvendo a vazão de água em uma caixa e a concentração salina em um tanque com água. Ambas as situações possuem potencial didático para introduzir o conceito de equações diferenciais ordinárias, pois descrevem a taxa de variação instantânea das quantidades de água na caixa e de sal no tanque.

As atividades propostas são de caráter interpretativo contendo questões abertas estruturadas de forma que, inicialmente, os estudantes buscam as respostas a partir da interpretação da situação apresentada e, em seguida, desenvolvem a modelagem computacional com a construção do diagrama no *Powersim*. A partir do diagrama construído, os estudantes realizam experimentações buscando evidências que possibilitam a validação das respostas elaboradas anteriormente. Durante o desenvolvimento desse tipo de atividades podem ocorrer algumas dificuldades por parte dos estudantes, por exemplo, a implementação da situação no *Powersim*, devido ao fato dos discentes não terem familiaridade com a lógica operacional do *software* que utiliza diagramas de fluxos de níveis para descrever uma equação diferencial. Essencialmente, observa-se que os alunos apresentam dificuldades em traduzir a situação

apresentada para a linguagem computacional. Outro obstáculo observado diz respeito ao fato de o aplicativo utilizar o inglês como idioma, isso dificulta a compreensão da descrição da funcionalidade de cada botão durante a construção do diagrama. No entanto, essas dificuldades são amenizadas à medida em que as atividades são desenvolvidas e os participantes vão se familiarizando com as características do recurso computacional.

Na próxima seção, apresentamos as bases teóricas que fundamentam essa investigação.

2 Referencial teórico

Com o objetivo de mapear as produções acadêmicas sobre o ensino de equações diferenciais, o primeiro autor deste trabalho, sob a orientação da segunda autora, realizou uma busca nos repositórios oficiais de teses e dissertações, bem como no portal de periódicos da Capes. Dentre os trabalhos encontrados e analisados, foi possível observar uma variedade de abordagens de ensino, muitas delas envolvendo o uso de tecnologias digitais. Por exemplo, destacamos as teses de Dullius (2009) e Javaroni (2007), as quais problematizaram o ensino interpretativo de soluções gráficas de equações de primeira ordem e o ensino introdutório de equações de primeira ordem por meio de modelos matemáticos, respectivamente. Em ambas as pesquisas, as autoras utilizaram recursos computacionais para o desenvolvimento das atividades.

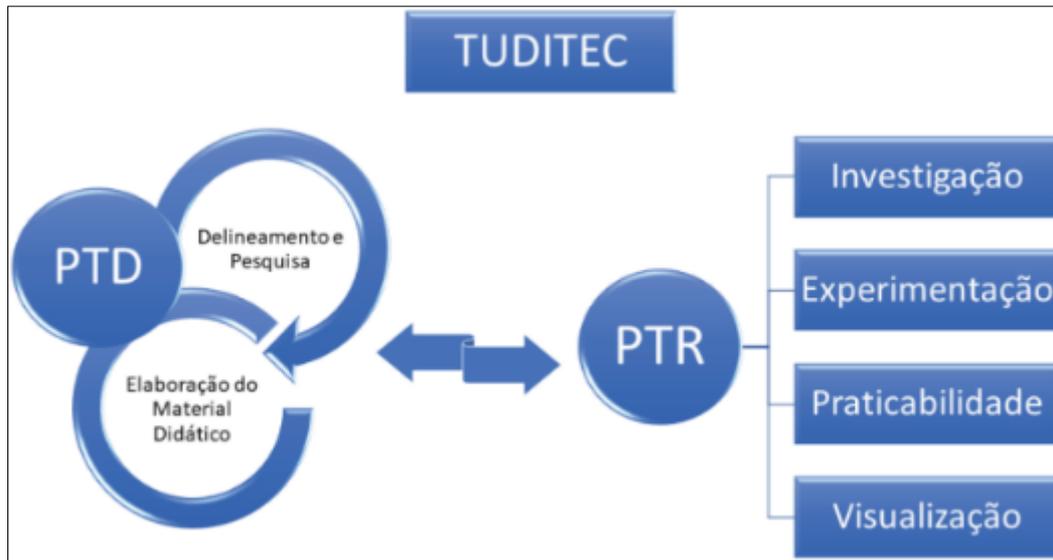
Em geral, as pesquisas analisadas investigaram o ensino de equações de primeira ordem a partir de resolução de problemas, modelagem matemática, metodologia ativa (PBL), engenharia didática envolvendo situações-problema aplicadas à Engenharia, dentre outras. No entanto, não foi identificada a ocorrência de pesquisa envolvendo o ensino de Equações Diferenciais com o uso didático de recursos computacionais por meio de atividades investigativas-exploratórias.

Dessa forma, nos propomos a investigar o ensino de Equações Diferenciais por meio do uso didático do *Powersim* a partir de atividades de cunho investigativo-exploratório. Portanto, considerando as características da pesquisa apresentada, utilizaremos como referencial teórico as tecnologias digitais no ensino de matemática, na qual daremos ênfase à TUDITEC. Além disso, também discutimos o conceito de atividades investigativas-exploratórias, conforme Ponte (2005), segundo os pressupostos da Investigação Matemática de Ponte, Brocardo e Oliveira (2019).

As tecnologias digitais se fazem presentes em nosso dia a dia e isso impulsiona, naturalmente, a sua utilização em atividades de ensino. Nesse sentido, vários tipos de aplicativos têm sido desenvolvidos para serem utilizados em ambientes de ensino, bem como na pesquisa. Muitas são as características dos recursos computacionais que podem potencializar o ensino de matemática. Por exemplo, existem aplicativos que favorecem a visualização, ao passo que outros podem ser dedicados a aspectos algébricos e/ou numéricos. O aspecto da “visualização é uma ação importante que deve ser levada em consideração quando se pretende desenvolver o Ensino de Matemática” (Neide & Quartieri, 2016, p. 10). Nessa mesma perspectiva, “a visualização constitui uma forma alternativa de acesso ao conhecimento matemático. [Além disso], faz parte da atividade matemática e é uma forma de resolver problemas.” (Borba & Villareal, 2005, p. 96).

Mais recentemente, Dullius *et al.* (2023), apresentam a Teoria do Uso Didático das Tecnologias Digitais (TUDITEC). Essencialmente, os autores discutem aspectos que caracterizam o bom uso das tecnologias. Na perspectiva da TUDITEC, o uso adequado das tecnologias pressupõe “dois conceitos-chave principais: o Planejamento Tecnológico Didático (PTD) e as Propriedades Tecnológicas Relevantes (PTR)” (p. 17), conforme ilustrado na Figura

1.

Figura 1: Diagrama com ilustração da Teoria do Uso Didático das Tecnologias Digitais

Fonte: Dullius *et al.* (2023, p. 18).

As etapas ‘delineamento e pesquisa’ e ‘elaboração do material didático’ “são respectivamente orientadas pelos questionamentos O quê? E como?” (Dullius, *et al.*, 2023, p. 17). É importante salientar que o material didático deve ser planejado de forma que as Propriedades Tecnológicas Relevantes possam ser contempladas. No entanto, os autores sugerem que a TUDITEC não pressupõe a necessidade da ocorrência de todas as propriedades, ou seja, pode ocorrer apenas uma. Essa característica evidencia que os dois conceitos-chave ocorrem em um movimento de ida e volta.

Dullius *et al.* (2023), sugerem que a prática de ensino na perspectiva da TUDITEC normalmente implica a elaboração de material didático com características desafiadoras que potencializam a investigação dos estudantes sobre determinado conceito. Com isso, “temos de integrar a tecnologia de uma forma que não só permite que os estudantes façam coisas “velhas” de novas maneiras, mas permitir que nossos estudantes façam coisas novas, de novas maneiras.” (p. 11). Nesse sentido, buscamos investigar o uso didático do *Powersim* para explorar o conceito de taxas de variação a partir de situações envolvendo os problemas da vazão e da concentração salina.

As atividades elaboradas são de cunho investigativo-exploratório, segundo os pressupostos de Ponte (2005), por se tratarem de tarefas abertas com determinado grau de desafio. Além disso, “sua característica principal é que o professor não procura explicar tudo, mas deixa uma parte importante do trabalho de descoberta e de construção do conhecimento para os alunos realizarem” (Ponte, 2005, p. 13). Essencialmente, atividades investigativas-exploratórias estão fundamentadas na teoria da Investigação Matemática de Ponte *et al.* (2019). Em linhas gerais, abordagens de ensino nessa perspectiva se desenvolvem em três etapas:

- (i) introdução da tarefa, em que o professor faz a proposta à turma, oralmente ou por escrito, (ii) realização da investigação, individualmente, aos pares, em pequenos grupos ou com toda a turma, e (iii) discussão dos resultados, em que os alunos relatam aos colegas o trabalho realizado. Essas fases podem ser concretizadas de muitas maneiras. (Ponte *et al.*, 2019, p. 25).

Dessa forma, em abordagens de ensino por meio de atividades investigativas-exploratórias, é muito importante dedicar uma parte da aula para que os grupos apresentem os resultados encontrados durante o desenvolvimento de cada atividade, pois “os momentos de reflexão, discussão e análise crítica posteriores à realização de uma atividade prática assumem um papel fundamental” (Ponte, 2005, p. 15).

Por fim, ressaltamos que uma abordagem de ensino pautada em atividades investigativas-exploratórias está em simbiose com a Teoria do Uso Didático das Tecnologias Digitais, uma vez que, Dullius *et al.* (2023), enfatizam que na perspectiva da TUDITEC, as atividades tendem a seguir três tipos de metodologias, dentre as quais, destacamos a Investigação Matemática de Ponte *et al.* (2019). Na próxima seção, apresentamos as atividades desenvolvidas com estudantes de uma disciplina de cálculo III.

3 Atividades desenvolvidas

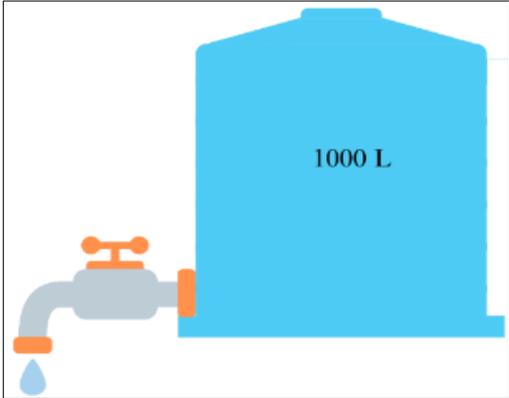
Considerando o aporte teórico apresentado na seção anterior, foram exploradas duas atividades contextualizadas envolvendo taxas de variação instantâneas. A primeira atividade está relacionada com a vazão de uma caixa d'água, a segunda aborda o problema da concentração salina em um tanque. No Quadro 1, apresentamos a primeira atividade desenvolvida.

Quadro 1: Atividade sobre o problema da vazão da caixa d'água.

Primeira Atividade

Considerando que determinada caixa de água contenha, inicialmente 1000 litros de água. Conforme ilustrado na Figura 2, na parte inferior da caixa existe uma torneira pela qual escoam, a cada hora, 10% da água existente.

Figura 2: Ilustração do problema da vazão.



Fonte: Elaborada pelos autores com o canva.

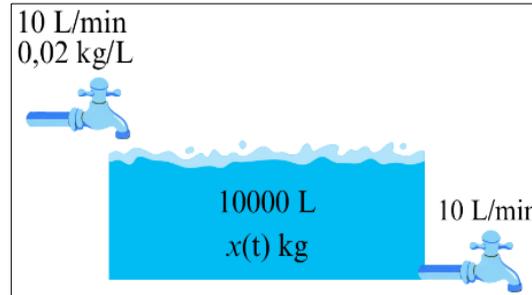
- Esboce o gráfico da quantidade de água na caixa em função do tempo.
- A quantidade de água que escoam a cada hora é a mesma? Justifique.
- Simule a situação no *Powersim* e verifique se as respostas dos itens anteriores estão coerentes.
- Após quanto tempo, aproximadamente, a caixa estará completamente vazia?
- O tempo de esvaziamento da caixa seria o mesmo se a vazão da torneira fosse de 10 litros por hora?
- E o gráfico da quantidade de água, como seria neste caso?

Fonte: Elaborado pelos autores.

No Quadro 2, apresentamos a segunda atividade que foi desenvolvida com os estudantes sobre concentração salina em um tanque de água.

Quadro 2: Atividade sobre concentração salina em um tanque.**Segunda Atividade**

Um tanque com 10000 litros de água contém, inicialmente, 20 kg de sal. Uma torneira despeja água salgada com uma concentração de 0,02 quilos de sal por litro a uma taxa de 10 litros por minuto. Existe um mecanismo de agitação que mantém a concentração salina homogênea. Há também uma torneira de saída no fundo do tanque com taxa de vazão de 10 litros por minuto.

Figura 3: Ilustração do problema da concentração salina.

Fonte: Elaborada pelos autores com o canva.

Considerando as informações sobre a concentração salina no tanque de água, pede-se:

- Esboce o gráfico que representa a quantidade de sal no tanque em função do tempo.
- O que acontece com a quantidade de sal no tanque com o passar do tempo? Aumenta, diminui ou permanece igual? Comente.
- Utilize o *Powersim* para simular a situação e verifique se as respostas dos itens anteriores estão coerentes.
- É correto afirmar que a quantidade de sal no tanque vai se estabilizar ao longo do tempo? Comente.
- O que aconteceria se, no instante inicial, a água no tanque estivesse com 200 kg de sal?
- Existe alguma relação entre a quantidade de sal que entra pela torneira e a quantidade de sal no tanque ao longo do tempo? Comente.

Fonte: Elaborado pelos autores.

As atividades apresentadas foram elaboradas de forma de que as respostas não poderiam ser obtidas de maneira direta, isto é, as questões são abertas e desafiadoras, características fundamentais de atividades investigativas-exploratórias, segundo os pressupostos de Ponte (2005). Além disso, o seu desenvolvimento implica na investigação por meio da formulação de conjecturas e validação por meio da simulação computacional, conforme é preconizado pela Investigação Matemática de Ponte *et al.* (2019).

Na próxima seção, apresentamos os caminhos metodológicos percorridos durante o desenvolvimento desta pesquisa.

4 Procedimentos metodológicos

Considerando o problema de pesquisa, bem como o objetivo delineado, a presente pesquisa se caracteriza como sendo do tipo qualitativa, uma vez que, buscamos compreender os “aspectos da realidade que não podem ser quantificados, centrando-se na compreensão e explicação da dinâmica das relações sociais [de construção do conhecimento]” (Silveira & Córdova, 2009, p. 34). Nesse sentido, a partir das características fundamentais do conceito-chave PTD, no qual ocorre a delimitação do tema a ser investigado e a elaboração de material didático, delineamos que o conceito a ser abordado seria equações diferenciais ordinárias. Para isso, elaboramos duas atividades de cunho investigativo-exploratório envolvendo taxas de variação instantâneas, cujo desenvolvimento requer o uso do *Powersim*. Acreditamos que a forma como as atividades foram estruturadas deve promover a ocorrência das quatro

Propriedades Tecnológicas Relevantes, um dos conceitos-chave da TUDITEC.

As atividades foram desenvolvidas em uma disciplina de cálculo 3, de um curso de Engenharia de Alimentos de uma Universidade pública brasileira. A turma era composta por três estudantes. Considerando o baixo número de participantes, as atividades foram desenvolvidas em um único grupo com três alunos. Neste trabalho, buscamos apresentar o conceito de taxa de variação com o uso didático do *software Powersim*.

Cada estudante recebeu uma versão impressa das atividades, contendo espaços para anotações e/ou registros das respectivas respostas. Após entregar o material, o professor pesquisador apresentou com detalhes cada item das atividades, com o intuito de deixar claro o que deveria ser feito pelos participantes.

Como instrumentos de coleta de dados, utilizou-se as anotações realizadas a partir da observação do pesquisador ao acompanhar o desenvolvimento das atividades, os materiais entregues pelos participantes, bem como os arquivos gerados no *Powersim*, que foram enviados por e-mail.

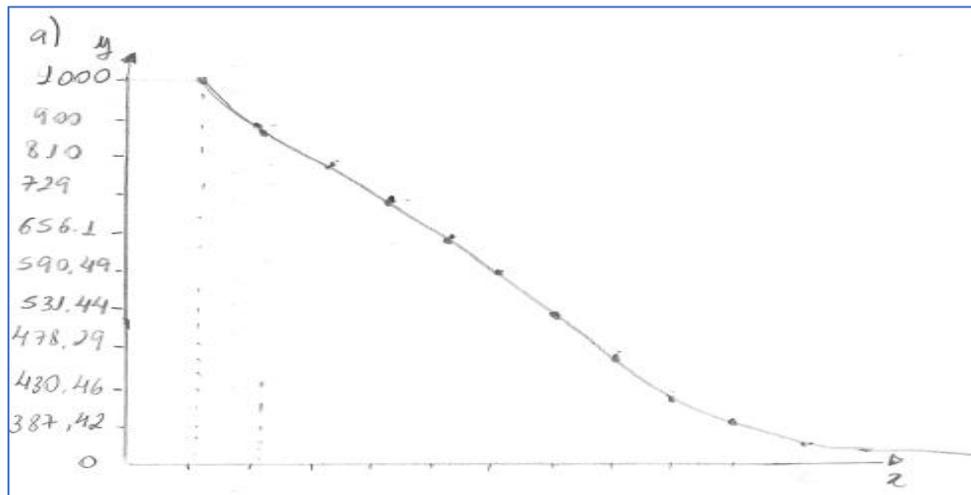
A análise dos dados se deu de forma interpretativa por meio da observação dos materiais coletados durante a pesquisa, em especial, as resoluções apresentadas pelos participantes e os arquivos contendo os diagramas do *Powersim*, bem como as anotações do professor que, neste caso, assume o papel de pesquisador.

5 Resultados e discussão

Inicialmente o professor/pesquisador entregou uma versão impressa da primeira atividade para cada aluno, seguida da apresentação da questão com o intuito de familiarizar os estudantes quanto aos objetivos da atividade, esta apresentação inicial está alinhada à primeira etapa descrita por Ponte *et al.* (2019). Como mencionado anteriormente, a atividade foi desenvolvida em um único grupo com três participantes. Para garantir o anonimato, utilizaremos os códigos P1, P2 e P3 sempre que for preciso mencionar as ações dos respectivos participantes. A seguir, prosseguimos com a análise do desenvolvimento de cada item da primeira atividade proposta. Considerando que havia apenas um grupo, o pesquisador optou por suprimir o espaço da terceira etapa descrita por Ponte *et al.* (2019) e foi conduzindo as discussões conforme os estudantes iam avançando com o desenvolvimento das atividades, para isso, buscava intervir com perguntas desencadeadoras sempre que indagado pelos alunos ou sempre que percebia que estavam traçando um raciocínio equivocados.

No item a), pedimos o esboço do gráfico da quantidade de água no tanque em função do tanque. Durante as discussões os estudantes consideraram que a quantidade de água deveria diminuir 100 litros em cada hora, pois calcularam que 10% de 1000 era igual a 100. Neste momento, o professor/pesquisador indagou: 100 litros por hora, por quê? Ao fazer essa pergunta, o professor provocou para que repensassem um pouco. A partir de então, perceberam que após a primeira hora restaria apenas 900 litros de água no tanque e, portanto, 10% daquela quantidade não seria igual a 100, mas 90. Neste momento, P1 e P3 construíram uma espécie de escala evidenciando a quantidade de água no tanque de hora em hora (veja Figura 4). Concluindo assim, que a cada hora a quantidade de água que sairia da caixa d'água seria menor. Outra questão levantada pelo docente foi: vocês acham que o gráfico será assintótico ao eixo y (que representava a quantidade de água) ou irá interceptá-lo? P2 afirmou que o gráfico iria cortar/tocar o eixo y , pois no tempo inicial $t = 0$ a caixa continha 1000 litros de água. Mesmo assim, o esboço do gráfico apresentado ficou parcialmente equivocados, pois não intercepta o eixo y no ponto $(0,1000)$, conforme pode ser observado na Figura 4.

Figura 4: Resposta dos estudantes para o item (a) da primeira atividade.



Fonte: Acervo da pesquisa.

O item b) poderia fornecer pistas sobre como seria o gráfico a ser esboçado no item a). Dessa forma, durante o esboço do gráfico, o professor/pesquisador sugeriu que olhassem a próxima pergunta. Inicialmente, P1 afirmou que sim, que a quantidade de água que escoaria seria a mesma em cada hora. O docente indagou: por quê? Ao tentar justificar, P1 acabou se convencendo que esta afirmação estava equivocada, pois na segunda hora não teria mais a mesma quantidade de água que tinha no instante anterior. Essa provocação conduziu o grupo a concluir o esboço do gráfico, além de formalizar a resposta do item b), conforme podemos verificar na Figura 5.

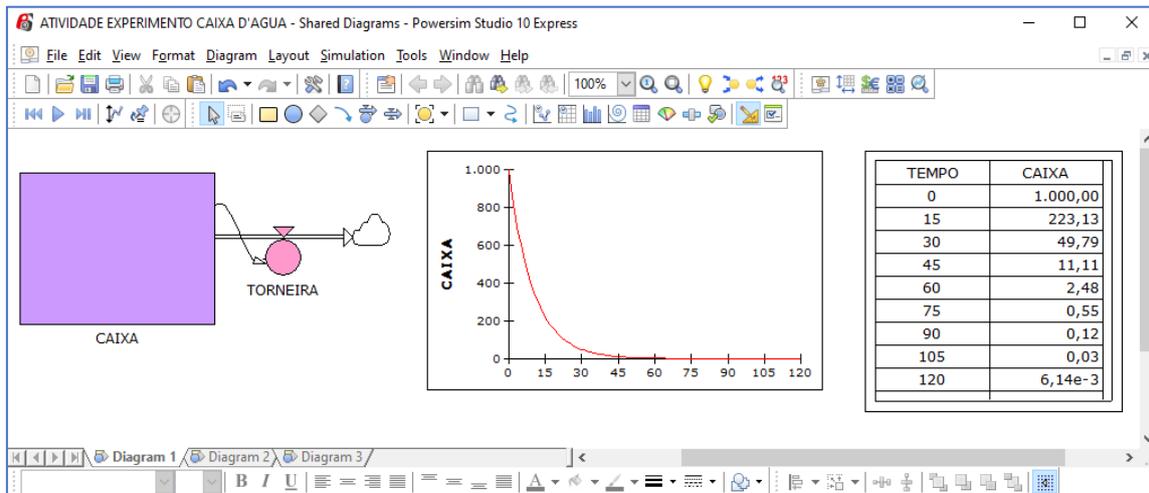
Figura 5: Resposta dos estudantes para o item b) da primeira atividade.

b) A quantidade de água que escoia a cada hora é a mesma? Justifique.
 não, pois a cada 10% de água que escoia sobra
 uma quantidade menor na caixa de água

Fonte: Acervo da pesquisa.

Durante a construção do diagrama no *Powersim*, os estudantes compreendiam que o nível/tanque deveria ter uma torneira de saída representando a vazão da água, no entanto, não haviam notado que precisariam relacionar o tanque com a saída, com isso, os gráficos ficaram incorretos, neste momento, o professor/pesquisador indagou: existe alguma relação entre a água que escoia e a quantidade de água na caixa? Todos responderam que sim, pois a vazão é de 10% da água na caixa a cada hora. Então o professor/pesquisador questiona novamente: como podemos fazer essa conexão no *Powersim*: P2 responde dizendo que devem usar a “setinha” se referindo à ferramenta do *software* para criação de *link* entre objetos. Em seguida, redefiniram os parâmetros que determinavam a saída e plotaram novamente o gráfico de maneira correta. Na Figura 6, apresentamos o diagrama construído pelos participantes, no qual são apresentados o gráfico e a tabela da quantidade de água na caixa em função do tempo.

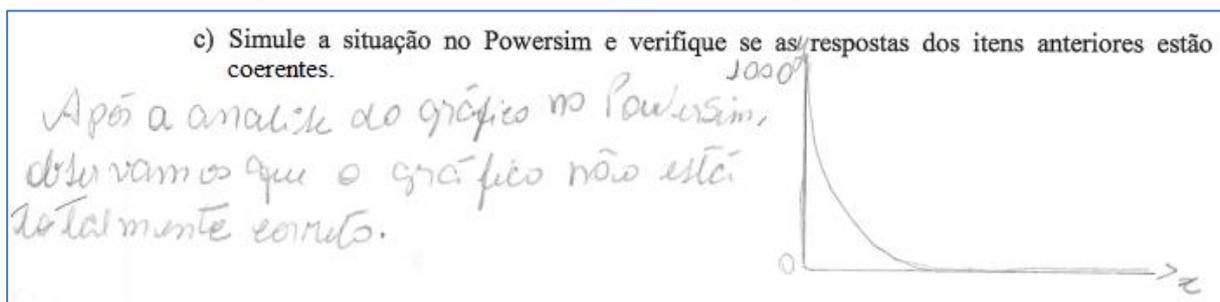
Figura 6: Diagrama do *Powersim* construído pelos estudantes para o item c) da primeira atividade.



Fonte: Acervo da pesquisa.

No diagrama apresentado na Figura 6, o termo ‘CAIXA’ representa a quantidade de água na caixa. O processo de construir o diagrama no *Powersim* se constitui como um momento importante de construção do conhecimento sobre taxas de variação, pois requer que o estudante tenha clareza sobre como a dinâmica do fenômeno a ser modelado ocorre. Este aspecto evidencia o caráter investigativo e exploratório do *software*, contemplando assim, a Propriedade Tecnológica Relevante da investigação da TUDITEC. Além disso, também contempla a Propriedade da visualização (gráfico e tabela, por exemplo), fornecendo elementos que permitam a validação das conclusões dos estudantes para as questões dos itens anteriores. Neste caso, o professor/pesquisador sugeriu que se fossem constatadas incoerências quanto às respostas anteriores, os estudantes deveriam fazer o registro no espaço de resposta do item c), relatando as inconsistências e apresentando a resposta correta a partir da investigação com o *Powersim*. Consolidando, assim, a construção do conhecimento. Com isso, os estudantes constataram a incoerência do gráfico esboçado no item a) e registraram de forma correta o gráfico, conforme apresentamos na Figura 7.

Figura 7: Resposta dos estudantes para o item c) da primeira atividade.



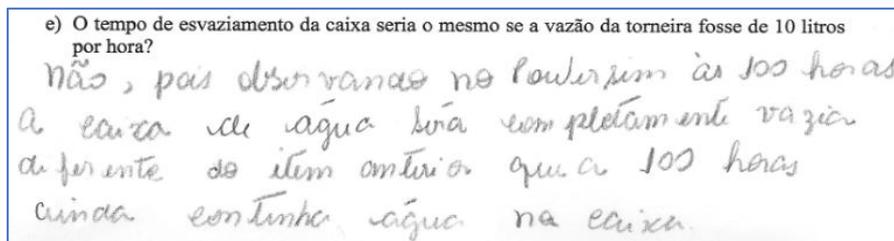
Fonte: Acervo da pesquisa.

Os itens d), e) e f) evidenciam as PTR experimentação e praticabilidade, uma vez que, os estudantes formularam suas respostas com agilidade por meio da realização de simulações. Por exemplo, P2 sugeriu que poderiam responder o item d) a partir da construção da tabela temporal, pois poderiam observar o tempo necessário para que a quantidade de água na caixa se tornaria zero. Por padrão o *Powersim* realiza as simulações no intervalo de tempo [0,100], no entanto, com esse intervalo de tempo a quantidade de água ainda não teria acabado completamente. Dessa forma, o professor/pesquisador sugeriu que realizassem a alteração do intervalo de simulação para [0,120], a partir disso, concluíram que a caixa estaria seca após 116

horas.

Quanto ao item e), o docente sugeriu que primeiro discutissem sobre a questão antes de realizarem a simulação. Neste momento, P3 afirmou que a caixa demoraria mais tempo para esvaziar pois teria vazão de 10 litros por hora, e na configuração anterior escoava 100 litros, P2 discordou porque seria 100 litros apenas na primeira hora e que nas horas seguintes a quantidade que escoava seria cada vez menor. Não chegaram a uma conclusão comum. Em seguida, questionaram como deveriam proceder para realizar a simulação no *Powersim*. O Professor/pesquisador indagou: o que mudou? Responderam que agora a vazão seria 10 litros por hora, ao invés de 10% da quantidade de água no tanque. O docente questiona novamente: Então, como vocês podem representar essa situação no *Powersim*? P2 responde sugerindo que precisavam alterar a torneira de saída. Após as discussões, concluíram que a vazão era fixa e deveriam apenas inserir o valor 10 no respectivo campo de definição da torneira. Após a simulação observaram que após 100 horas a caixa estaria completamente vazia, ao contrário do item anterior. Na Figura 8, apresentamos a resposta dos estudantes, obtida a partir da experimentação com o *Powersim*.

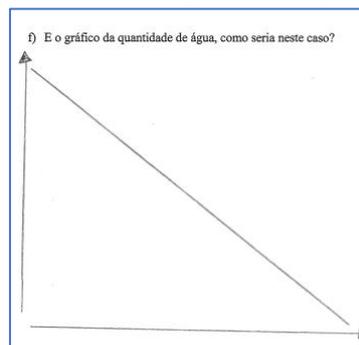
Figura 8: Resposta dos estudantes para o item e) da primeira atividade.



Fonte: Acervo da pesquisa.

Por fim, no item f), construíram o gráfico que tinha comportamento linear decrescente. O professor, enfatiza que esse tipo de comportamento é típico de situações em que a taxa de variação é constante. Na Figura 9, apresentamos o gráfico esboçado pelos participantes a partir da investigação realizada por meio da simulação com o *Powersim*.

Figura 9: Resposta dos estudantes para o item f) da primeira atividade.

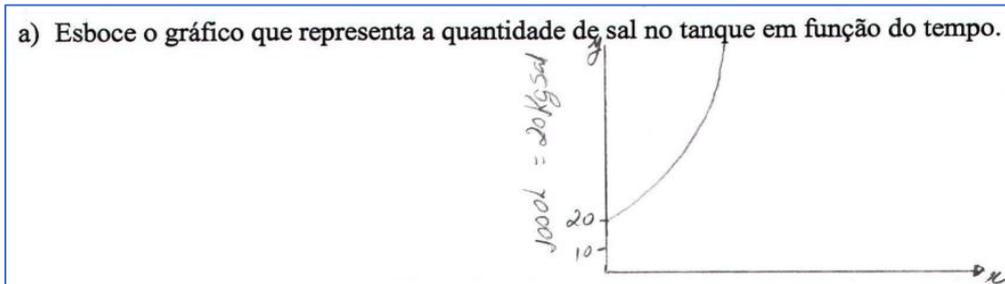


Fonte: Acervo da pesquisa.

Agora, apresentamos os resultados do desenvolvimento da segunda atividade. No item a) pedia-se o esboço do gráfico da quantidade de sal no tanque ao longo do tempo. P3 sugeriu que a quantidade de sal aumentaria, mas não conseguia justificar o motivo. Neste momento, o professor perguntou: quanto entra de sal no tanque a cada minuto? P2 concluiu que entrava 20 gramas por litro, o que implicaria 200 gramas por minuto, visto que a taxa de entrada era de 10 L/min. Quanto à saída, P1 afirmou que escoava 10 litros. O docente indagou: 10 litros de um total de quantos? P1 disse: de um total de 10000 litros, concluindo que a saída era 10/10000, mas não conseguiram relacionar esse valor como uma proporção da quantidade de sal no tanque

em cada instante de tempo. O professor questiona: quanto tem de sal em cada instante? Todos respondem que não sabem. Por fim concluem que a quantidade de sal que entra no tanque é $0,02 \cdot 10$ e escoam $10/10000 = 0,001$ do sal existente no tanque a cada momento. Após as discussões, chegam à conclusão de que o gráfico seria crescente, conforme pode ser observado na Figura 10.

Figura 10: Resposta dos estudantes para o item a) da segunda atividade.

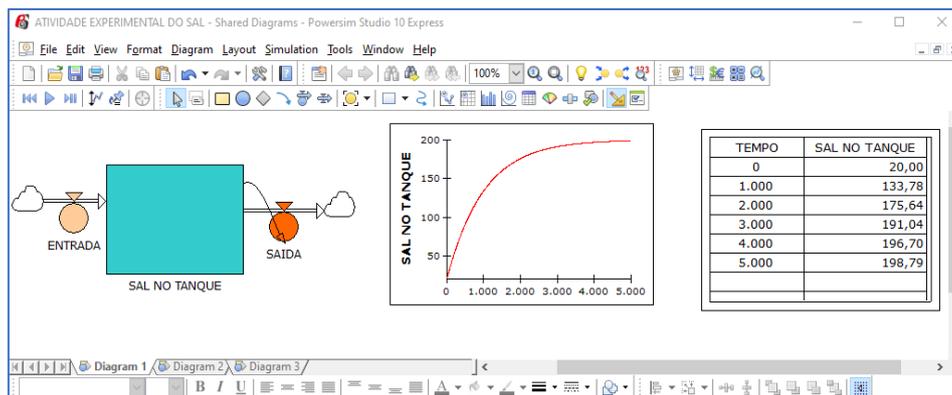


Fonte: Acervo da pesquisa.

Ressaltamos que, neste momento, o professor/pesquisador notou que o gráfico estava incorreto, no entanto, não interviu, pois no item c), os estudantes teriam a oportunidade de validar os resultados a partir das simulações com o *Powersim*, conforme apresentado na Figura 12. Quanto ao item b) os participantes concluíram que a quantidade de sal aumentaria, pois entrava mais sal do que escoava. Aqui, estão se referindo aos valores $0,02 \cdot 10$ e $0,001$ obtidos no item anterior. Naturalmente, existe um pequeno equívoco nesta afirmação, pois faltou mencionar que a quantidade de sal aumentaria até se estabilizar. Este fato foi observado pelos participantes durante as simulações computacionais.

O item c) envolvia a construção do diagrama no *Powersim*. A priori, não tiveram dificuldades, no entanto, não consideraram que a torneira de saída deveria ser conectada ao tanque. Neste momento, o professor indaga: no item a) vocês concluíram que iria escoar $0,001$ do sal existente no tanque, certo? Isso significa que? Todos responderam que deveriam ligar o tanque à torneira e assim o fizeram. Em seguida, realizaram as simulações. Na Figura 11, apresentamos o diagrama construído pelos participantes.

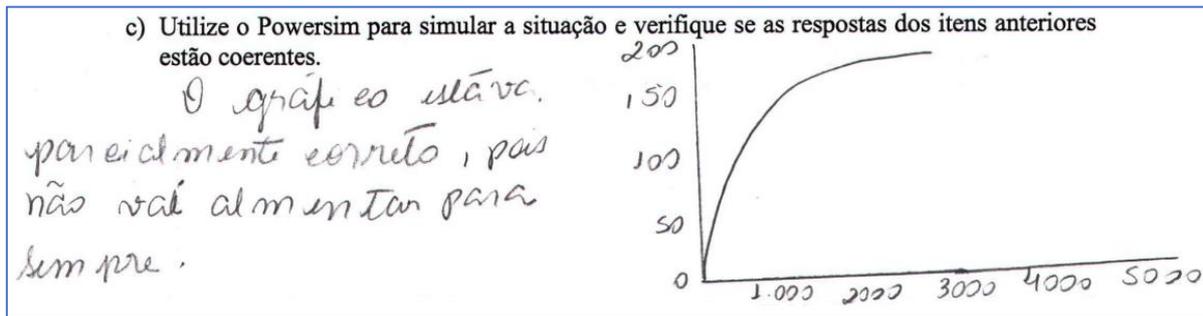
Figura 11: Diagrama do *Powersim* construído pelos estudantes para a segunda atividade.



Fonte: Acervo da pesquisa.

Com os resultados das simulações, os participantes observaram que o gráfico esboçado inicialmente, no item a), estava incorreto, e fizeram o registro dessa observação no campo de resposta, conforme apresentado na Figura 12.

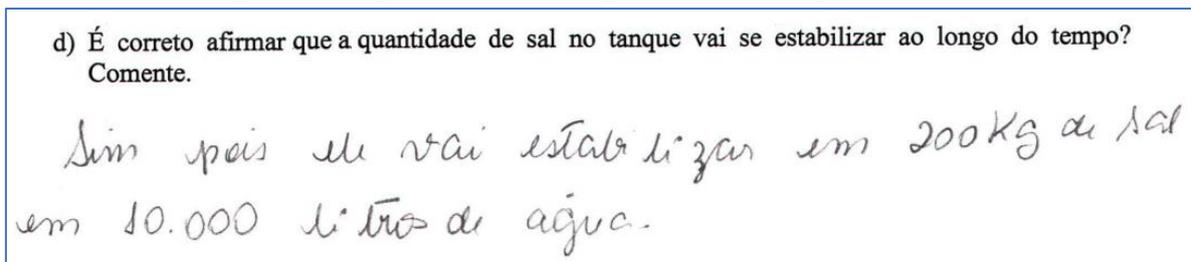
Figura 12: Correção dos estudantes para a resposta do item a) da segunda atividade.



Fonte: Acervo da pesquisa.

Este fato, evidencia que o Powersim potencializa a compreensão conceitual, contribuindo assim, com a construção do conhecimento por meio da visualização, uma das Propriedades Tecnológicas Relevantes da TUDITEC. Além disso, a partir da visualização os participantes observaram que a quantidade de sal no tanque não aumentaria indefinidamente. Pelo contrário, deveria se estabilizar em 200 kg. Isto fica evidente na resposta do item d), conforme apresentamos na Figura 13.

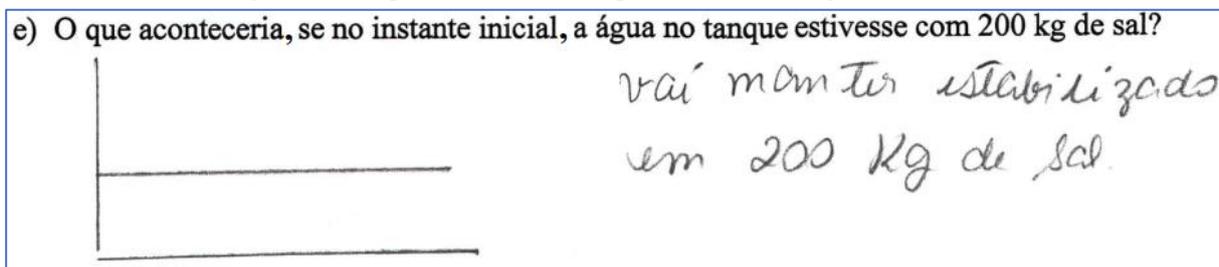
Figura 13: Resposta dos estudantes para o item d) da segunda atividade.



Fonte: Acervo da pesquisa.

No item e) o professor sugeriu que pensassem sobre o comportamento do gráfico antes de realizarem a simulação computacional. Todos afirmaram que o comportamento continuaria semelhante ao discutido nos itens anteriores. Ao realizarem a simulação, observaram que o resultado seria uma reta horizontal paralela ao eixo do tempo t , conforme apresentado na Figura 14.

Figura 14: Resposta dos estudantes para o item e) da segunda atividade.



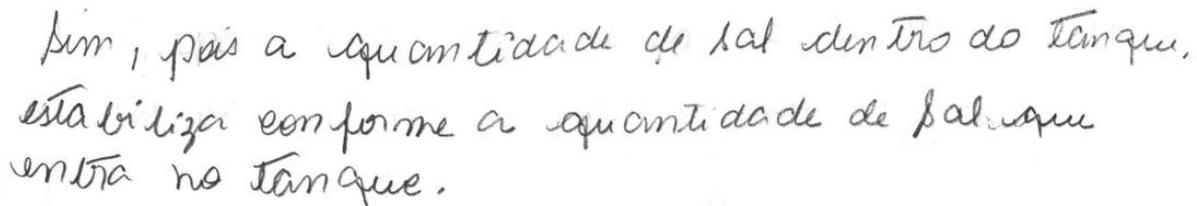
Fonte: Acervo da pesquisa.

Neste momento, o docente discute que isso acontece porque a quantidade inicial seria igual ao valor limite, por isso a quantidade de sal não seria alterada, pois já estaria estabilizada, segundo as condições da situação apresentada. Em seguida, sugeriu que alterassem a taxa de entrada para $0,03 \cdot 10$ e observassem o que aconteceria. Com essa discussão o professor/pesquisador buscava fornecer pistas para que pudessem responder o próximo item da atividade. Na qual os estudantes, após a realização de simulações para diversos valores da taxa de entrada, observaram que o valor do limite assintótico também era alterado, conforme

apresentado na Figura 15.

Figura 15: Resposta dos estudantes para o item f) da segunda atividade.

- f) Existe alguma relação entre a quantidade de sal que entra pela torneira e a quantidade de sal no tanque ao longo do tempo? Comente.



Sim, pois a quantidade de sal dentro do tanque, estabiliza conforme a quantidade de sal que entra no tanque.

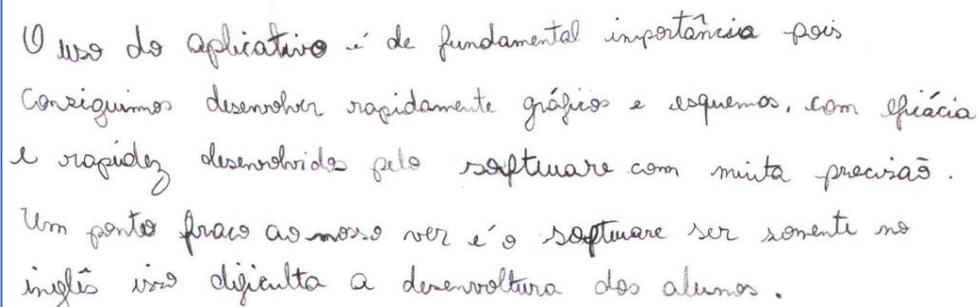
Fonte: Acervo da pesquisa.

A resposta apresentada acima foi obtida por meio da realização de simulações de vários cenários envolvendo diferentes taxas de entrada de sal no tanque. Isso evidencia a Propriedade da experimentação. Também podemos constatar as características investigativas-exploratórias das atividades desenvolvidas, segundo os pressupostos da Investigação Matemática. De fato, pois as atividades envolviam questões abertas e desafiadoras, levando os estudantes a explorarem os aspectos da situação apresentada (vazão de água e concentração salina), formular conjecturas quanto à representação gráfica da quantidade da água na caixa (ou a quantidade de sal no tanque) em função do tempo. A justificação das conjecturas pode ser observada na fase em que os participantes realizam as simulações computacionais no *Powersim*. Outro fator importante da Investigação Matemática observado durante a realização das atividades diz respeito ao registro dos alunos, pois o ato de registrar as formulações das conjecturas constitui um desafio adicional aos estudantes Ponte, *et al.* (2019).

Ao final do desenvolvimento das duas atividades solicitamos aos participantes que fizessem ponderações sobre a utilização do *Powersim*, apontando pontos fortes e fracos. Na ocasião, os estudantes ressaltam como pontos fortes a rapidez para obtenção dos gráficos. O que corrobora com a tese de que as Propriedades Tecnológicas Relevantes ‘praticabilidade’ e ‘visualização’ emergiram durante a realização das atividades propostas. Como ponto fraco sinalizam o fato de o *Powersim* estar disponível em língua inglesa, o que dificultaria a sua utilização. Na Figura 16, apresentamos o registro dos alunos sobre essa questão.

Figura 16: Considerações dos participantes quanto aos pontos fortes e fracos do *Powersim*.

Gostaria que comentassem sobre os pontos fortes e fracos quanto ao uso do *Powersim* para o desenvolvimento das atividades.



O uso do aplicativo é de fundamental importância pois conseguimos desenvolver rapidamente gráficos e esquemas, com eficiência e rapidez desenvolvidos pelo software com muita precisão. Um ponto fraco ao mesmo vez é o software ser somente em inglês isso dificulta a desenvoltura dos alunos.

Fonte: Acervo da pesquisa.

6 Considerações Finais

Neste trabalho, nos propomos a apresentar uma investigação sobre o ensino de Equações



Diferenciais Ordinárias com abordagem interpretativa a partir de questões problematizadas com características investigativas-exploratórias, segundo os pressupostos da Investigação Matemática. As atividades foram desenvolvidas com o uso didático do *Powersim*, na perspectiva da TUDITEC. Dessa forma, o objetivo delineado consistia em investigar quais as Propriedades Tecnológicas Relevantes poderiam ser observadas durante o uso didático do *software*. Para isso, foram desenvolvidas duas atividades envolvendo taxas de variação instantânea, uma versava sobre a vazão de água em uma caixa e a outra sobre a concentração salina em um tanque. O desenvolvimento seguiu as etapas da Investigação Matemática, perpassando pela apresentação da atividade aos estudantes, a exploração da atividade e discussão. Visto que as atividades foram desenvolvidas com um grupo de apenas três estudantes, as duas últimas etapas ocorreram simultaneamente, já que o professor/pesquisador foi mediando as discussões conforme surgiam as dúvidas dos estudantes durante a etapa de exploração.

No que diz respeito ao problema de pesquisa: *Como as Propriedades Tecnológicas Relevantes da TUDITEC são evidenciadas com o uso didático do Powersim durante o desenvolvimento das atividades investigativas-exploratórias envolvendo problemas de vazão e concentração salina?* A partir da análise dos resultados, foi possível observar que os participantes utilizaram o recurso de exibição gráfica do *software* para compreenderem o comportamento da situação ao longo do tempo, nesse sentido, percebe-se que a Propriedade da visualização pôde ser evidenciada a partir do desenvolvimento das atividades. Além disso, a modelagem computacional por meio da construção de diagramas para representar cada situação, possibilitou aos estudantes a realização de várias simulações e, com isso, o recurso digital potencializou a experimentação, constituindo elementos que evidenciam como as Propriedades da praticabilidade e da experimentação emergiram durante a exploração das atividades com o uso didático do *Powersim*.

Por fim, de certa forma, também pode-se dizer que a característica do *software* também permite observar a ocorrência da propriedade da investigação. No entanto, as propriedades mais marcantes foram a praticabilidade e a visualização, visto que este fato foi mencionado pelos participantes da pesquisa. Naturalmente, a resposta ao problema de pesquisa implica a contemplação do objetivo delineado, que consistia em investigar as propriedades da TUDITEC que emergem no uso didático do *Powersim* para o desenvolvimento de atividades envolvendo taxas de variações.

Considerando que existe pouca, ou talvez, nenhuma discussão, sobre o ensino de Equações Diferenciais Ordinárias com foco no uso didático do *Powersim*, acreditamos que esta pesquisa possa contribuir com o ensino de Equações Diferenciais, fortalecendo assim, a construção do conhecimento pelos estudantes. Além disso, os resultados encontrados indicam que a abordagem apresentada pode contribuir de forma positiva para o ensino de matemática por meio da utilização de recursos computacionais, promovendo assim o desenvolvimento da Educação Matemática. Como fragilidade desta investigação, podemos destacar o número reduzido de participantes, o que poderia dificultar generalizações. No entanto, acreditamos que esse fator não compromete a análise qualitativa dos resultados obtidos, uma vez que os achados encontram-se em consonância com o referencial teórico utilizado, em especial, a Teoria do Uso Didático das Tecnologias Digitais. Nesse sentido, sinalizamos que os resultados apontam indícios de que a estratégia de ensino apresentada possa potencializar o ensino de equações diferenciais.

Considerando que as atividades exploradas envolviam situações descritas por Equações Diferenciais Ordinárias de primeira ordem de coeficientes constantes e termo não homogêneo constante, outra possibilidade investigativa poderia ser o desenvolvimento de atividades que



envolvam Equações Diferenciais com coeficientes e termo não homogêneo variáveis. Neste caso, também seria necessário investigar como definir funções não constantes com o *Powersim*. Essa investigação fica reservada para estudos futuros.

Agradecimentos

Agradecemos ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), pelo apoio financeiro ao projeto, do qual este trabalho é um resultado.

Referências

- Borba, M. C. & Villareal, M. E. (2005). *Humans-with-Media and the Reorganization of Mathematical Thinking: Information and Communication Technologies, Modeling, Visualization and Experimentation*. (v. 39), New York, NY: Springer.
- Dullius, M. M. (2009). *Enseñanza y aprendizaje en ecuaciones diferenciales con abordaje gráfico, numérico y analítico*. 2009. 514f. Tese. (Doutorado em Enseñanza de las Ciencias). Universidad de Burgos. Burgos, Espanha.
- Dullius, M. M.; Quartieri, M. T. & Neide, I. G. (2023). Teoria do uso didático das tecnologias digitais - TUDITEC. In: M. M. Dullius & I. G. Neide. (Org.). *Tecnologias digitais no ensino de ciências e matemática*. (1. ed., pp. 9-34). São Paulo, SP: Editora Livraria da Física.
- Javaroni, S. L. (2007) *Abordagem geométrica: possibilidades para o ensino e aprendizagem de Introdução às Equações Diferenciais Ordinárias*. 2007. 230f. Tese (Doutorado em Educação Matemática). Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”. Rio Claro, SP.
- Neide, I. G. & Quartieri, M. (2016). Recursos tecnológicos nos processos de ensino e de aprendizagem da matemática e da física. In: M. M. Dullius, & M. T. Quartieri (Org.). *Aproximando a matemática e a física por meio de recursos tecnológicos: ensino médio*. (1. ed., pp. 9-14). Lajeado, RS: Editora da Univates.
- Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em Matemática. In GTI (Ed.). *O professor e o desenvolvimento curricular* (pp. 11-34). Lisboa, Portugal: APM.
- Ponte, J. P.; Brocardo, J. & Oliveira, H. (2019). *Investigações matemáticas na sala de aula*. (4. ed.). Belo Horizonte, MG: Autêntica Editora.
- Silva, P. G. N. da; Vertuan, R. E. & Boscaroli, C. (2021). Tecnologias digitais, criatividade e formação de professores: reflexões a partir das publicações do VII SIPEM. In: *Anais do 8º Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática* (pp. 1306-1320), evento on-line.
- Silveira, D. T. & Córdova, F. P. (2009). A pesquisa científica. In: T. E. Gerhardt. & D. T. Silveira. (Org.). *Métodos de Pesquisa*. (1. ed., pp. 31-42). Porto Alegre, RS: Editora da UFRGS.