

O Pensamento Matemático Avançado no ensino de Equações Diferenciais Ordinárias e de Geometria Analítica e Cálculo Vetorial

Advanced Mathematical Thinking in teaching Ordinary Differential Equations and Analytical Geometry and Vector Calculus

Frederico da Silva Reis¹
Aldo Peres Campos e Lopes²
Érica Resende Malaspina³

Resumo: Este trabalho apresenta uma pesquisa realizada no Grupo de Estudos e Pesquisas em Educação Matemática no Ensino Superior da Universidade Federal de Ouro Preto sobre a mobilização de processos do Pensamento Matemático Avançado (PMA) no ensino de alguns conteúdos de Equações Diferenciais Ordinárias e de Geometria Analítica e Cálculo Vetorial. A metodologia contemplou uma pesquisa teórico-bibliográfica e a análise de conteúdos em livros didáticos das referidas disciplinas. A análise dos conteúdos foi embasada na teoria de Tommy Dreyfus e evidenciou a mobilização dos seguintes processos mentais característicos do PMA: representação simbólica, mudança de representações e tradução entre elas, visualização, modelação, sintetização e generalização. As conclusões da pesquisa apontam para a possibilidade de potencialização do desenvolvimento do PMA no Ensino Superior.

Palavras-chave: Pensamento Matemático Avançado. Equações Diferenciais Ordinárias. Geometria Analítica e Cálculo Vetorial. Educação Matemática no Ensino Superior.

Abstract: This paper presents research conducted by the Study and Research Group on Mathematics Education in Higher Education at the Federal University of Ouro Preto. The research focuses on the mobilization of processes of Advanced Mathematical Thinking (AMT) in teaching certain topics in Ordinary Differential Equations and Analytical Geometry and Vector Calculus. The methodology included theoretical-bibliographic research and content analysis of textbooks for these subjects. The content analysis was based on Tommy Dreyfus's theory and highlighted the mobilization of the following mental processes characteristic of AMT: symbolic representation, change of representations and translation between them, visualization, modeling, synthesizing, and generalization. The research conclusions indicate the possibility of enhancing the development of AMT in Higher Education.

Keywords: Advanced Mathematical Thinking. Ordinary Differential Equations. Analytical Geometry and Vector Calculus. Mathematics Education in Higher Education.

1 Introdução

Inicialmente, o Pensamento Matemático Avançado (PMA) foi abordado/referenciado no decorrer do evento *The International Group for the Psychology of Mathematics Education*, que aconteceu na década de 1980, tendo como objetivo a produção de uma obra sobre o PMA e que teve como consequência a criação do grupo *Advanced Mathematical Thinking Group* (Almeida & Iglori, 2013), responsável pela publicação de pesquisas que, ainda hoje, são utilizadas como principais referências teórico-bibliográficas para investigações sobre o PMA.

¹ Universidade Federal de Ouro Preto • Ouro Preto, MG — Brasil • ✉ frederico.reis@ufop.edu.br • ORCID <https://orcid.org/0000-0001-6087-6483>

² Universidade Federal de Itajubá • Itabira, MG — Brasil; Universidade Estadual Paulista • Rio Claro, SP – Brasil • ✉ aldolopes@unifei.edu.br • ORCID <https://orcid.org/0000-0002-4046-0840>

³ Universidade Federal de Ouro Preto • Ouro Preto, MG — Brasil • ✉ malaspin@ufop.edu.br • ORCID <https://orcid.org/0009-0003-6023-4415>

Os pesquisadores Dreyfus (2002) e Tall (2002) afirmam que o PMA está presente nos processos de ensino e de aprendizagem de muitas definições matemáticas complexas que são trabalhadas nos mais variados níveis de ensino, entretanto, ele manifesta-se com maior intensidade nos anos finais do Ensino Médio e ao longo do Ensino Superior. Cabe ressaltar que, segundo Tall (1995, p. 65), “o pensar em Matemática avançada nem sempre é um processo lógico para a criação de ideias matemáticas”.

Para Tall (2002), o PMA envolve um ciclo de atividades que devem ser consideradas, desde o ato de modelar um problema para a pesquisa matemática até a sua formulação criativa de conjecturas, concluindo com a prova. Já Dreyfus (2002) caracteriza o PMA por meio de uma série de processos mentais que ele classifica e caracteriza como processos de representação e de abstração.

No presente trabalho, como descrevemos a seguir, apresentamos a mobilização de tais processos do PMA no ensino de alguns conteúdos de Equações Diferenciais Ordinárias e de Geometria Analítica e Cálculo Vetorial, disciplinas integrantes da estrutura curricular de diversos cursos da área de Ciências Exatas no Brasil e no mundo.

2 Os Processos do Pensamento Matemático Avançado

Em outra pesquisa de nosso grupo de pesquisa (Torrente & Reis, 2023), destacamos que não existe uma concepção ou uma caracterização única ou uniforme do PMA, assim como também verificamos que existe uma diversidade de processos cuja interação está fortemente presente na construção do PMA.

No presente trabalho, apresentaremos brevemente a teorização feita por Dreyfus (2002), para quem o PMA consiste na interação entre vários processos, principalmente, os processos mais globais de representação e de abstração e outros que os constituem, como afirmam Gereti e Savioli (2015):

Por meio de nossos estudos, entendemos que os processos de representação e de abstração são os mais globais, sendo constituídos por outros processos como representar, visualizar, generalizar, classificar, conjecturar, induzir, verificar, analisar, sintetizar, abstrair, provar, definir, formalizar, entre outros (Gereti & Savioli, 2015, p. 209).

Ainda segundo Dreyfus (2002), o desenvolvimento do PMA acontece de modo gradual por meio das interações que um sujeito realiza com atividades matemáticas, partindo-se de modos de pensamento mais elementares para outros cada vez mais complexos e, assim, o pesquisador afirma que os processos de representação e de abstração possibilitam ir de um tipo de pensamento para outro, por meio de uma espécie de “gerenciamento” dessa complexidade. Outrossim, Dreyfus (2002) destaca o papel essencial do processo de abstração para o desenvolvimento do PMA, afirmando que se um sujeito desenvolve a habilidade de fazer abstrações a partir de situações matemáticas, de forma consciente, então ele parece ter alcançado um nível avançado de pensamento matemático e, com isso, os processos de generalizar e sintetizar são desenvolvidos de modo simultâneo.

Destarte, apresentamos o Quadro 1, no qual Gereti e Savioli (2015), a partir de suas interpretações de Dreyfus (2002), descrevem diversos processos mentais do PMA envolvidos na representação e na abstração, concebidos pelas pesquisadoras como os processos mais globais interagentes no desenvolvimento do PMA:

Quadro 1: Descrição dos Processos do PMA a partir de Dreyfus (2002)

Processos envolvidos na REPRESENTAÇÃO	
Representação Simbólica	Pode-se representar um conceito/objeto matemático por meio da escrita, em forma de notações ou símbolos. No entanto, é necessário que se tenha antes um significado associado ao conceito/objeto matemático representado.
Representação Mental	A representação de um conceito/objeto matemático ocorre na mente do indivíduo, relacionando-se ao conjunto de representações concretas que possui do conceito/objeto.
Visualização	Por meio da intuição e da compreensão, este processo permite que as representações mentais sejam criadas.
Mudança de Representações e Tradução entre elas	Transitar por diversas representações de um conceito/objeto matemático demanda habilidade para interligá-las corretamente, sempre que necessário. Traduzir representações se refere à passagem de informações de um enunciado/propriedade matemático(a) para outro(a), assim como a tradução entre linguagens (matemática e verbal).
Modelação	O objeto/processo a ser modelado requer a construção de uma estrutura/teoria matemática que abrange suas características.
Processos envolvidos na ABSTRAÇÃO	
Sintetização	Utilizar uma composição de objetos / conceitos matemáticos (distintos), inter-relacionando-os com o propósito de resolver a tarefa como um todo.
Generalização	A partir de casos particulares, identificar características comuns para a validade ser expandida. Pode ser que seja preciso incluir a formulação de outros conceitos matemáticos.

Fonte: Gereti e Savioli (2015, p. 211)

Partindo, então, dessa caracterização dos diversos processos de representação e de abstração, buscaremos identificá-los no ensino de alguns conteúdos de Equações Diferenciais Ordinárias e de Geometria Analítica e Cálculo Vetorial, a partir da análise de tais conteúdos em livros didáticos especialmente selecionados pelo fato de já terem sido utilizados como referências bibliográficas pelos autores do presente trabalho, quando ministraram as referidas disciplinas em suas respectivas universidades federais, tanto para cursos de Engenharia como para cursos de Matemática (Licenciatura e Bacharelado).

3 O Pensamento Matemático Avançado no ensino de Equações Diferenciais Ordinárias: um foco sobre EDO de 1ª ordem

Algumas de nossas pesquisas recentes em Educação Matemática no Ensino Superior apontam para a necessidade de um ensino de Equações Diferenciais Ordinárias (EDO) com mais aplicações dos seus conceitos nucleares, apesar dos desafios de tempo e adequações curriculares (Lopes, 2021; Lopes & Reis, 2021, 2022).

Ainda que o trabalho com aplicações, geralmente, remeta ao processo de *modelação*, entendemos ser fundamental compreender que outros processos do PMA podem ser associados ao ensino de certos conteúdos de EDO.

Especificamente, no presente trabalho, para identificar os processos do PMA mobilizados no ensino de EDO, apresentaremos recortes do livro de Zill (2016), intitulado “Equações Diferenciais com Aplicações em Modelagem”, porquanto pode-se esperar que o autor dê um destaque especial para aplicações, modelos e outros recursos que, certamente, podem favorecer o desenvolvimento do PMA. Focaremos nossa análise em EDO de 1ª ordem.

A Seção 2.2 aborda o tema “variáveis separáveis”. O Exemplo 1, apresentado na Figura 1, mostra uma resolução típica de uma EDO pelo método de separação de variáveis.

Figura 1: Resolução de uma EDO pelo método de separação de variáveis

<p>EXEMPLO 1 Resolvendo uma ED exata</p> <p>Resolva $2xy \, dx + (x^2 - 1)dy = 0$.</p> <p>SOLUÇÃO</p> <p>Sendo $M(x, y) = 2xy$ e $N(x, y) = x^2 - 1$, temos</p> $\frac{\partial M}{\partial y} = 2x = \frac{\partial N}{\partial x}.$ <p>Assim, a equação é exata e, portanto, pelo Teorema 2.4.1 há uma função $f(x, y)$ tal que</p> $\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy \text{ e } \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 - 1.$ <p>Da primeira dessas equações, depois de integrar, obtemos</p> $f(x, y) = x^2y + g(y).$ <p>Computando a derivada parcial da última expressão em relação a y e igualando a $N(x, y)$, obtemos</p> $\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + g'(y) = x^2 - 1. \quad \leftarrow N(x, y)$ <p>Segue que $g'(y) = -1$ e $g(y) = -y$. Logo $f(x, y) = x^2y - y$ e, portanto, a solução da equação na forma implícita é $x^2y - y = c$. Pode-se ver facilmente que a forma explícita de solução é $y = \frac{c}{1-x^2}$, que está definida em todo intervalo que não contenha $x = 1$ nem $x = -1$. ■</p>
--

Fonte: Zill (2016, p. 49)

Para resolver esse exemplo da Figura 1, o aluno deve identificar o tipo de equação e, em seguida, proceder com o método de resolução adequado. Em suma, basta aplicar o algoritmo de resolução, que nesse caso é a resolução de uma EDO exata. Dessa forma, notamos que é destacada a *representação simbólica*.

Outros exemplos destacam algumas particularidades gráficas, como é o caso do Exemplo 1 da Seção 2.4, conforme ilustramos na Figura 2.

Figura 2: Obtenção da curva integral de uma EDO de 1ª ordem

EXEMPLO 2 Curva Integral	
<p>Resolva o problema de valor inicial $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$, $y(4) = -3$</p> <p>SOLUÇÃO Reescrevendo a equação como $y dy = -x dx$, obtemos</p> $\int y dy = -\int x dx \text{ e } \frac{y^2}{2} = -\frac{x^2}{2} + c_1.$ <p>Podemos escrever o resultado da integração como $x^2 + y^2 = c^2$ substituindo a constante $2c_1$ por c^2. Essa solução da equação diferencial representa uma família de círculos concêntricos centrados na origem. Agora, quando $x = 4$, $y = -3$; logo $16 + 9 = 25 = c^2$. Assim, o problema de valor inicial determina o círculo $x^2 + y^2 = 25$ com raio 5. Por sua simplicidade, podemos, a partir dessa solução implícita, encontrar uma solução explícita que satisfaça a condição inicial. Vimos essa solução como sendo $y = \phi_2(x)$ ou $y = -\sqrt{25 - x^2}$, $-5 < x < 5$ no exemplo 3 da Seção 1.1. A curva integral é o gráfico de uma função diferenciável. Nesse caso, a curva integral é o semicírculo inferior, mostrado em preto na Figura 2.2.1, contendo o ponto (4,-3).</p>	

Figura 2.2.1 Curva solução para o PVI no Exemplo 2.

Fonte: Zill (2016, p. 69)

Similarmente ao caso do exemplo analisado anteriormente, esse exemplo enfatiza a *representação simbólica*, mas, como apresenta a curva solução (ou curva integral) da EDO, a *visualização* também ganha destaque. Com essa curva, características da solução e da EDO são notadas. Para que o aluno resolva esse exemplo é necessário entender a solução geométrica, ou seja, compreender a construção de gráficos que se relacionam com a função solução.

Já o Capítulo 3 aborda o tema “Modelagem com Equações Diferenciais de Primeira Ordem”. O Exemplo 4 da Seção 3.1 utiliza a lei empírica de Newton para aquecimento/esfriamento de um objeto. A formulação matemática dessa lei é uma EDO de 1ª ordem, como vemos na Figura 3.

Figura 3: Lei do resfriamento / aquecimento de Newton aplicada ao esfriamento de um bolo

LEI DO ESFRIAMENTO/AQUECIMENTO DE NEWTON	
<p>Na equação (3) da Seção 1.3, vimos que a formulação matemática da lei empírica de Newton do resfriamento/aquecimento de um objeto é dada pela equação diferencial linear de primeira ordem</p> $\frac{dT}{dt} = k(T - T_m), \quad (2)$ <p>onde k é uma constante de proporcionalidade, $T(t)$ é a temperatura do objeto para $t > 0$ e T_m é a temperatura do ambiente – isto é, a temperatura do ambiente em torno do objeto. No exemplo 4, supomos que T_m seja constante.</p>	
EXEMPLO 4 Esfriamento de um bolo	
<p>Quando um bolo é tirado do forno, sua temperatura é 300 °F. Três minutos mais tarde, sua temperatura é 200 °F. Quanto tempo levará para o bolo resfriar até a temperatura ambiente de 70 °F?</p>	

Fonte: Zill (2016, p. 92)

Para resolver esse problema, o primeiro passo é *identificar* qual lei física utilizar – uma *mudança de representações e tradução entre elas*. A lei física utilizada é a lei de aquecimento/resfriamento de Newton cuja representação matemática é dada pela Equação (2) da Figura 3, em que $T(t)$ representa a função da variação da temperatura T ao longo do tempo t . Logo de início, é necessário a utilização de uma estrutura matemática que caracterize o resfriamento do bolo, ou seja, inicialmente, o processo de *modelação* se torna importante para a resolução do problema. Observamos que a expressão matemática da lei de Newton tem um

significado associado – a taxa de variação de temperatura de um objeto dT/dt é proporcional à diferença entre a temperatura do objeto e a temperatura do ambiente. Dessa forma, o processo de *representação simbólica* também se torna evidente. Utilizando os dados do exemplo, a equação do problema é, então, obtida, como mostra a Figura 4. Com isso, percebemos que, para resolver a equação do modelo, o aluno deve *analisar* as variáveis envolvidas e *identificar* as leis físicas envolvidas.

Figura 4: Equação do problema envolvendo a Lei de Newton com uma condição inicial

SOLUÇÃO

Vamos fazer em (2) a identificação $T_m = 70$. Precisamos então resolver o problema de valor inicial

$$\frac{dT}{dt} = k(T - 70), \quad T(0) = 300 \quad (3)$$

Fonte: Zill (2016, p. 92)

Com a condição inicial e a EDO obtida, temos um problema de valor inicial e é possível obter a solução. A Equação (3) da Figura 4 é separável. Assim, basta aplicar o método de resolução de equações separáveis (dentre outros métodos possíveis), que envolve separação de variáveis. Essa parte da resolução é puramente algébrica. Basta seguir o algoritmo de resolução de equações separáveis, o que envolve o uso do Teorema Fundamental do Cálculo, como mostra a Figura 5.

Figura 5: Resolução da EDO do problema

SOLUÇÃO

A Equação (3) é ao mesmo tempo linear e separável. Se separarmos as variáveis,

$$\frac{dT}{T - 70} = k dt,$$

temos $\ln |T - 70| = kt + c_1$ e, portanto, $T = 70 + c_2 e^{kt}$. Quando $t = 0, T = 300$ e, portanto $300 = 70 + c_2$ resulta em $c_2 = 230$. Dessa forma, $T = 70 + 230e^{kt}$. Finalmente, a medição $T(3) = 200$ leva a $e^{3k} = \frac{13}{23}$ ou $k = \frac{1}{3} \ln \frac{13}{23} = -0,19018$.

Fonte: Zill (2016, p. 92)

Por fim, a solução é obtida, como vemos na Figura 6.

Figura 6: Solução da EDO do problema

Assim,

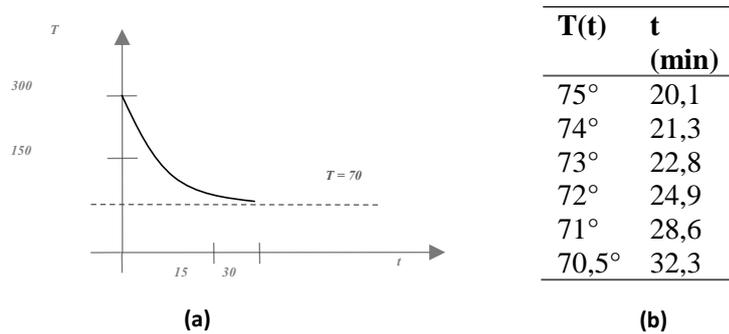
$$T(t) = 70 + 230e^{-0,19018t}.$$

Fonte: Zill (2016, p. 93)

A resolução da EDO envolve tanto o uso da *representação simbólica* quanto o uso de alguns processos algébricos (Lopes, 2023). Observamos o uso de objetos matemáticos, o que inclui a relação entre eles, sintetizando ideias e conceitos, ou seja, notamos a presença de um processo envolvido na *abstração*, a *sintetização*.

Por fim, vemos enfatizado o uso da *mudança de representações e tradução entre elas* ao se apresentar o gráfico da função solução e uma tabela com variação da temperatura de acordo com o tempo. Isso é importante para *interpretar* a solução da equação, como dada na Figura 6, tendo em vista que a temperatura ambiente será somente atingida quando t tende ao infinito na equação dada na Figura 4. Porém, a tabela da Figura 7 (parte (b)) mostra que a temperatura ambiente é atingida em cerca de 30 minutos, algo também a se *identificar* pelo gráfico (parte (a)) da Figura 7.

Figura 7: Tabela e gráfico referentes à solução da EDO do problema



Fonte: Zill (2016, p. 93)

Assim, nesse exemplo identificamos praticamente todos os processos de *representação* (exceto a *representação mental*, que não abordaremos nesse tipo de análise aqui realizada), entretanto, não identificamos o processo de *generalização*, envolvido na *abstração*.

A respeito dos processos envolvidos na *abstração*, conforme abordamos, percebemos que a *generalização* não foi encontrada nos exemplos apresentados e a *synetização* não apareceu de forma constante. Constatamos que tais processos ocorrem principalmente nas definições e nas demonstrações dos teoremas e algoritmos de resolução de um determinado tipo de EDO.

Esse é o caso de EDO classificadas como variáveis separáveis, como mostra a Figura 8. A resolução de um determinado tipo de EDO demanda ao aluno *classificar* qual tipo está envolvido. Assim, esse aluno poderá associar o método de resolução adequado ao tipo específico de EDO. A resolução da EDO (1) da Figura 8 pode ser obtida pelo aluno. Isso pode ser realizado ao conjecturar a respeito da aplicação de técnicas de integração e utilizando o Teorema Fundamental do Cálculo.

Figura 8: Definição de uma EDO separável

SOLUÇÃO POR INTEGRAÇÃO
 Considere a equação diferencial de primeira ordem $dy/dx = f(x, y)$. Quando f não depende da variável y , isto é, $f(x, y) = g(x)$, a equação diferencial

$$\frac{dy}{dx} = g(x) \quad (1)$$

pode ser resolvida por integração. Se $g(x)$ é uma função contínua, então integrando ambos os lados de (1) resulta em $y = \int g(x)dx = G(x) + c$, em que $G(x)$ é a antiderivada (integral indefinida) de $g(x)$. Por exemplo, se $dy/dx = 1 + e^{2x}$, então sua solução é $y = \int (1 + e^{2x})dx$ ou é $y = x + \frac{1}{2}e^{2x} + c$.

SOLUÇÃO POR INTEGRAÇÃO
 A Equação (1), bem como seu método de resolução, é apenas um caso especial de quando f em $dv/dx = f(x, v)$ é produto de uma função de x por uma função de v .

DEFINIÇÃO 2.2.1 Equação separável

Uma equação diferencial de primeira ordem da forma

$$\frac{dy}{dx} = g(x)h(y)$$

é chamada de **separável** ou de **variáveis separáveis**.

Fonte: Zill (2016, p. 49)

Concluimos, pela análise dos conteúdos aqui realizada, que o ensino de EDO de 1ª ordem possibilita e favorece a mobilização de diversos processos do PMA.

4 O Pensamento Matemático Avançado no ensino de Geometria Analítica e Cálculo Vetorial: um foco sobre retas no espaço

Algumas de nossas pesquisas recentes em Educação Matemática no Ensino Superior apontam para a necessidade de um ensino de Geometria Analítica e Cálculo Vetorial (GACV) com a utilização de tecnologias que possibilitem uma melhor visualização, experimentação e compreensão dos seus conceitos nucleares, apesar dos desafios da elaboração de atividades exploratórias (Santos & Reis, 2011; Santos & Reis, 2012).

Ainda que o trabalho com tecnologias, geralmente, remeta ao processo de *visualização*, entendemos ser fundamental compreender que outros processos do PMA podem ser associados ao ensino de certos conteúdos de GACV.

Especificamente, no presente trabalho, para identificar os processos do PMA mobilizados no ensino de GACV, apresentaremos recortes do livro de Steinbruch e Winterle (1987), intitulado “Geometria Analítica”, considerado um clássico entre os livros nacionais, provavelmente, por desenvolver a teoria de Geometria Analítica de forma vetorial, com muitos exemplos resolvidos e exercícios que, certamente, podem favorecer o desenvolvimento do PMA. Focaremos nossa análise em retas no espaço.

Inicialmente, é apresentada um estudo geral de vetores e, em seguida, um estudo de vetores no plano e no espaço, intercalando com exemplos para, depois, aplicá-la no desenvolvimento da teoria sobre retas e planos. As seções teóricas seguem a tradicional maneira de apresentar um conteúdo matemático: definições, teoremas com suas respectivas provas e exemplos. Porém, nas definições, teoremas e exemplos é possível encontrar diversos processos do PMA.

A definição da equação vetorial da reta da Seção 4.1 segue um padrão de livros matemáticos. Vejamos, por exemplo, a Figura 9. Para entender a definição da Figura 9, o aluno deve identificar o vetor diretor, ter um ponto conhecido e um ponto qualquer da reta e, em seguida, criar um vetor que seja colinear ou linearmente dependente do vetor diretor. Dessa forma, notamos que são destacadas a *representação simbólica*, a *visualização*, a *sintetização*, além da tradicional passagem do *formalizar* para *definir*.

Figura 9: Definição da equação vetorial da reta

4.1 Equação Vetorial da Reta

Seja r uma reta que passa pelo ponto A e tem a direção de um vetor não nulo \vec{v} . Para que um ponto do *espaço* pertença à reta r , é necessário e suficiente que os vetores \overrightarrow{AP} e \vec{v} sejam colineares, isto é:

$$\overrightarrow{AP} = t\vec{v}$$

Ou

$$P - A = t\vec{v}$$

Fonte: Steinbruch & Winterle (1987, p. 99)

A partir da equação vetorial da reta, é possível determinar as equações paramétricas da reta, como mostra a Figura 10.

Figura 10: Definição das equações paramétricas da reta

4.2 Equações paramétricas da Reta

Sejam $(0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ um sistema de coordenadas, $P(x, y, z)$ e $A(x_1, y_1, z_1)$ um ponto genérico e um ponto dado, respectivamente, da reta r , e $\vec{v} = a\vec{i} + b\vec{j} + c\vec{k}$ um vetor de mesma direção de r . Da equação vetorial da reta r :

$$P = A + t\vec{v},$$

ou:

$$(x, y, z) = (x_1, y_1, z_1) + t(a, b, c)$$

ou ainda:

$$(x, y, z) = (x_1 + at, y_1 + bt, z_1 + ct)$$

vem:

$$\begin{cases} x = x_1 + at \\ y = y_1 + bt \\ z = z_1 + ct \end{cases}$$

Fonte: Steinbruch & Winterle (1987, p. 101)

Para a mudança da equação vetorial para as equações simétricas, apenas cálculos foram usados. Porém, é possível identificar *representação simbólica, visualização, sintetização, mudança de representações e tradução entre elas* e, para isso, é necessário *induzir para definir*.

Com a definição de reta dada, pode-se considerar agora a condição para que três pontos estejam em linha reta. Essa condição, apresentada na Figura 11, remete à *representação simbólica* necessitando, anteriormente, *formalizar, conjecturar e analisar*.

Figura 11: Condição de alinhamento de três pontos no espaço

4.4.1 Condições para que Três Pontos Estejam em Linha Reta

A condição para que três pontos $A_1(x_1, y_1, z_1)$, $A_2(x_2, y_2, z_2)$ e $A_3(x_3, y_3, z_3)$ estejam em linha reta é que os vetores $\overrightarrow{A_1A_2}$ e $\overrightarrow{A_1A_3}$ sejam colineares, isto é:

$$\overrightarrow{A_1A_2} = m\overrightarrow{A_1A_3}, \text{ para algum } m \in \mathbb{R}$$

ou:

$$\frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{y_3 - y_1} = \frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1}$$

Fonte: Steinbruch & Winterle (1987, p. 105)

As retas no espaço podem se apresentar de formas variadas. Uma dessas formas é quando elas são paralelas aos planos coordenados. Vejamos um exemplo na Figura 12.

Figura 12: Reta paralela ao plano coordenado xOy

c) Se $c = 0$, $\vec{v} = (a, b, 0) \perp Oz \therefore r // xOy$

As equações de r ficam:

$$\begin{cases} z = z_1 \\ \frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} \end{cases}$$

Das coordenadas de um ponto genérico $P(x, y, z)$ da reta r variam somente x e y , conservando-se $z = z_1$ constante. A reta r se acha num plano paralelo ao plano xOy (Fig. 4.6-c).

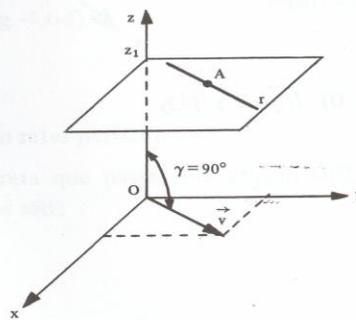


Figura 4.6-c

Fonte: Steinbruch & Winterle (1987, p. 111)

No estudo de retas paralelas aos planos coordenados, observamos os processos de *representação simbólica, visualização e modelação*, que demandam *verificar e classificar*.

Já quando é apresentada a definição de ângulo entre duas retas, notamos a *representação simbólica* e a *generalização*, além de um destaque para a *visualização* e a *mudança de representações e tradução entre elas*. Também é possível notar a necessidade de *analisar e verificar*, como indica a Figura 13.

Figura 13: Definição de ângulo de duas retas

4.7 Ângulo de duas retas

Sejam as retas r_1 , que passa pelo ponto $A_1(x_1, y_1, z_1)$ e tem direção de um vetor $\vec{v}_1 = (a_1, b_1, c_1)$ e r_2 , que passa pelo ponto $A_2(x_2, y_2, z_2)$ e tem direção de um vetor $\vec{v}_2 = (a_2, b_2, c_2)$ (Fig. 4.7).

Chama-se ângulo de duas retas r_1 e r_2 o menor ângulo de um vetor diretor de r_1 e de um vetor diretor de r_2 . Logo, sendo θ este ângulo, tem-se

$$\cos \theta = \frac{|\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2|}{|\vec{v}_1| \cdot |\vec{v}_2|}, \text{ com } 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

Figura 4.7

Fonte: Steinbruch & Winterle (1987, p. 115-116)

O exemplo da Figura 14 mostra, claramente, uma *mudança de representações e tradução entre elas*.

Figura 14: Usando duas representações de retas no cálculo de ângulo

Exemplo

Calcular o ângulo entre as retas

$$r_1: \begin{cases} x = 3 + t \\ y = t \\ z = -1 - 2t \end{cases}$$

e

$$r_2: \frac{x+2}{-2} = \frac{y-3}{1} = \frac{z}{1}$$

Solução

Os vetores que definem as direções das retas r_1 e r_2 são, respectivamente:

$$\vec{v}_1 = (1, 1, -2)$$

$$\vec{v}_2 = (-2, 1, 1)$$

Pela fórmula (4.7-1):

$$\cos \theta = \frac{|\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2|}{|\vec{v}_1| |\vec{v}_2|} = \frac{|(1, 1, -2) \cdot (-2, 1, 1)|}{\sqrt{1^2 + 1^2 + (-2)^2} \times \sqrt{(-2)^2 + 1^2 + 1^2}}$$

$$\cos \theta = \frac{|-2 + 1 - 2|}{\sqrt{1+1+4} \times \sqrt{4+1+1}} = \frac{|-3|}{\sqrt{6} \times \sqrt{6}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2},$$

logo:

$$\theta = \arccos\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi}{3} \text{ rad} = 60^\circ$$

Fonte: Steinbruch & Winterle (1987, p. 117)

Concluimos, pela análise dos conteúdos aqui realizada, que o ensino de retas no espaço possibilita e favorece a mobilização de diversos processos do PMA.

5 Considerações Finais

Apesar de termos apresentado, inicialmente, as ideias de Dreyfus (2002) e Tall (2002) sobre o PMA, vários pesquisadores abordaram o seu desenvolvimento e processos. Para Brandemberg (2010), por exemplo, o PMA envolve manipular, investigar e descobrir fatos relacionados ao objeto que está sendo estudado e isso não deve ser feito de uma forma parcial e fragmentada, mas sim buscando-se visualizar sua “totalidade generalizante”, considerando também, fundamentalmente, os processos de representação e abstração como os mais importantes em tal busca.

Em nossa experiência docente no Ensino Superior, consideramos fundamental na prática educativa a identificação dos processos do PMA no ensino das diversas disciplinas de conteúdos matemáticos, especialmente, no contexto dos cursos de Licenciatura e de Bacharelado de Matemática; outrossim, levantamos a questão da necessidade da investigação sobre o desenvolvimento do PMA em cursos de formação de professores de Matemática, seja para atuar na Educação Básica (no caso dos licenciandos em formação) ou para atuar na Educação Superior (no caso dos bacharelados em formação que, em geral, posteriormente cursarão Mestrado e Doutorado em Matemática).

Nessa perspectiva, o presente trabalho mostrou que o ensino de conteúdos de Equações Diferenciais Ordinárias e de Geometria Analítica e Cálculo Vetorial aqui focados, a partir da análise de tais conteúdos em livros didáticos “clássicos”, possibilita e favorece a mobilização de diversos processos do PMA, destacadamente: representação simbólica, mudança de representações e tradução entre elas, visualização, modelação, sintetização e generalização.

Cabe, então, a nós, professores e, principalmente, pesquisadores da Educação Matemática no Ensino Superior, explorarmos o desenvolvimento do PMA em sala de aula, levando nossos alunos a “pensar fora da caixa”, desenvolvendo a sua capacidade de pensar matematicamente em nível avançado (Abd Algani & Eshan, 2022).

Por fim, ressaltamos uma eventual limitação metodológica do nosso trabalho por ter contemplado uma pesquisa teórico-bibliográfica por meio da análise de conteúdos em livros didáticos, porquanto apontamos para a importância da realização de futuras pesquisas ampliando o espectro metodológico de investigação e trazendo, em seu escopo, a abordagem de mais disciplinas de conteúdos matemáticos do Ensino Superior, profícuos para a mobilização dos processos mentais característicos do PMA.

Referências

- Abd Algani, Y. M. & Eshan, J. (2022). *Important Issues in Mathematics Teaching*. Lucknow, IN: Book Rivers.
- Almeida, M. V. & Iglioni, S. B. C. (2013). Educação Matemática no Ensino Superior e abordagens de Tall sobre o ensino/aprendizagem do Cálculo. *Educação Matemática Pesquisa*, 15(3), 718-734. <https://revistas.pucsp.br/index.php/emp/article/view/17617>
- Brandemberg, J. C. (2010). *Uma análise histórico-epistemológica do conceito de grupo*. São Paulo, SP: Livraria da Física.
- Dreyfus, T. (2002). Advanced Mathematical Thinking Processes. In: D. Tall (Ed.). *Advanced Mathematical Thinking*. (2a ed., pp. 25-41). Dordrecht, NE: Kluwer Academic Publishers.
- Gereti, L. C. V., & Savioli, A. M. P. D. (2015). Processos do Pensamento Matemático Avançado evidenciados em resoluções de questões do ENADE. *Boletim de Educação Matemática*, 29(51), 206-222. <https://doi.org/10.1590/1980-4415v29n51a11>

- Lopes, A. P. C. (2021). Modelagem Matemática e Equações Diferenciais: um mapeamento das pesquisas em Educação Matemática. *Revista de Ensino de Ciências e Matemática*, 12(4), 1-25. <https://doi.org/10.26843/rencima.v12n4a16>
- Lopes, A. P. C. (2023). Advanced algebraic thinking processes in students' modelling activities, *Teaching Mathematics and its Applications: An International Journal of the IMA*, 42(4), 360-374. <https://doi.org/10.1093/teamat/hrac024>
- Lopes, A. P. C. & Reis, F. S. (2021). Ensino Remoto de Equações Diferenciais para Engenharia: reflexões para a Educação Matemática em tempos de (pós)pandemia. In: *VIII Seminário Internacional de Educação Matemática*. (v. 1, pp. 802-815). Atas do VIII SIPEM. Uberlândia, MG: Sociedade Brasileira de Educação Matemática.
- Lopes, A. P. C. & Reis, F. S. (2022). Contributions of Mathematical Modelling for Learning of Differential Equations in the Remote Teaching Context. *Acta Scientiae*, 24(3), 84-215. <https://doi.org/10.17648/acta.scientiae.7011>
- Santos, I. N. & Reis, F. S. (2011). Usando Tecnologias da Informação e Comunicação no ensino de Geometria Analítica Plana: explorando os conceitos de Feixe de Retas Paralelas e Concorrentes. *Revista de Educação Matemática da Universidade Federal de Ouro Preto*, 1(1), 123-130. <https://periodicos.ufop.br/redumat/article/view/2009>
- Santos, I. N. & Reis, F. S. (2012). Explorando conceitos de Geometria Analítica Plana utilizando Tecnologias da Informação e Comunicação. In: *XXVI Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa*. (v. 1, pp. 1-12). Actas de RELME 26. Belo Horizonte, MG: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.
- Steinbruch, A. & Winterle, P. (1987). Geometria Analítica. São Paulo, SP: Pearson Makron Books.
- Tall, D. (1995). Cognitive growth in elementary and advanced mathematical thinking. In: L. Meira & D. Carraher (Eds.). *Proceedings of 19th International Conference for the Psychology of Mathematics Education*. (pp. 61-75). Recife, PE: Universidade Federal de Pernambuco.
- Tall, D. (2002). The Psychology of Advanced Mathematical Thinking. In: D. Tall (Ed.). *Advanced Mathematical Thinking*. (2a ed., pp. 3-21). Dordrecht, NE: Kluwer Academic Publishers.
- Torrente, C. R. & Reis, F. S. (2023). A mobilização de processos do Pensamento Matemático Avançado na resolução de questões da OBMEP. *Revista Internacional de Pesquisa em Educação Matemática*, 13(2), 1-22. <https://doi.org/10.37001/ripem.v13i2.3384>
- Zill, D. (2016). *Equações Diferenciais com Aplicações em Modelagem*. São Paulo, SP: Cengage Learning.