

## Classes de situações de função afim identificadas em teses e dissertações brasileiras

## Classes of situations of linear functions identified in Brazilian theses and dissertations

Sandra Maria Tieppo<sup>1</sup>  
Clélia Maria Ignatius Nogueira<sup>2</sup>  
Marli Schmitt Zanella<sup>3</sup>

**Resumo:** Esta pesquisa, parte da tese de doutorado da primeira autora, que objetivou, entre outros aspectos, identificar e classificar as situações de função afim presentes em teses e dissertações brasileiras à luz da Teoria dos Campos Conceituais. Foram examinadas 588 pesquisas (479 dissertações e 109 teses) das bases de dados Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações e do Catálogo de Teses da Capes. Destas, 66 pesquisas foram selecionadas, envolvendo estudantes dos três níveis de ensino. Identificaram-se 1.140 situações, classificadas de acordo com a teoria de base. As classes predominantes são *proporção simples e composição de medidas* e *proporção simples e transformação de medidas*. Com esta pesquisa, espera-se contribuir para a ação didática referente à construção do conceito de função afim.

**Palavras-chave:** Teoria dos Campos Conceituais. Função afim. Classes de situações.

**Abstract:** This research, part of the first author's doctoral thesis, aimed, among other aspects, to identify and classify affine function situations present in Brazilian theses and dissertations considering the Theory of Conceptual Fields. A total of 588 studies (479 dissertations and 109 theses) from the Brazilian Digital Library of Theses and Dissertations and the Capes Theses Catalog databases were examined. Of these, 66 studies were selected, involving students from all three levels of education. Were identified and classified 1,140 situations according to the underlying theory. The predominant classes are simple proportion and composition of measures, and simple proportion and transformation of measures. This research aims to contribute to didactic actions related to the construction of the concept of affine function.

**Keywords:** Theory of Conceptual Fields. Affine function. Situation classes.

### 1 Introdução

Este texto relata parte de uma pesquisa de doutorado da primeira autora, sob a orientação da segunda e terceira autora. Esta investigação nasceu no bojo do Grupo de Estudos e Pesquisas em Didática da Matemática (GEPeDiMa) que tem como um dos seus objetivos mapear o campo conceitual da função afim, ancorado na Teoria dos Campos Conceituais, motivada pela seguinte questão: *Quais classes de situações relacionadas à função afim são identificadas em pesquisas de pós-graduação publicadas no Brasil?* A partir dessa indagação, estabelecemos o objetivo geral da tese: *Analisar as situações relacionadas à função afim presentes em dissertações de mestrado e teses de doutorado brasileiras*. Esse objetivo foi subdividido em três objetivos

<sup>1</sup> Universidade Federal do Paraná • Cascavel, Paraná - Brasil • ✉ [smtieppo@gmail.com](mailto:smtieppo@gmail.com) • ORCID <https://orcid.org/0000-0001-7628-4538>

<sup>2</sup> Universidade Estadual do Oeste do Paraná • Maringá, Paraná - Brasil • ✉ [cminogueira@uem.br](mailto:cminogueira@uem.br) • ORCID <https://orcid.org/0000-0003-0200-2061>

<sup>3</sup> Universidade Estadual de Maringá • Goioerê, Paraná - Brasil • ✉ [mszanella@uem.br](mailto:mszanella@uem.br) • ORCID <https://orcid.org/0000-0002-1621-9934>

específicos, sendo um deles relatado aqui: *Identificar e classificar as situações relacionadas à função afim presentes em dissertações de mestrado e teses de doutorado brasileiras.*

Segundo Vechia e Lorenz (1998), o ensino de funções no Brasil está presente nos currículos desde 1931, os quais já previam o ensino das funções lineares e hiperbólicas. Mas foi somente entre 1955 e 1970 que estas funções começaram a ser ensinadas para estudantes a partir dos 10 anos (Tinoco, 2002). Atualmente, a abordagem das primeiras noções de função está prevista na Base Nacional Comum Curricular (BNCC) desde a Educação Infantil, quando se busca construir os conceitos de regularidade e generalização (Brasil, 2018). No Ensino Médio, a BNCC destaca a formalização do conceito de função, incluindo funções específicas como afim, quadrática, logarítmica e exponencial, além das diferentes formas de representação, como linguagem natural, forma algébrica, tabular e gráfica. A construção do conceito de função facilita a aproximação do estudante à linguagem algébrica, permitindo a criação de modelos matemáticos que relacionam variáveis e conectam a Matemática a contextos cotidianos (Brasil, 2018).

Embora o conteúdo de funções faça parte do currículo básico, as experiências profissionais das três autoras apontam que os estudantes de ensino superior ainda apresentam dificuldades em relação ao conceito de função. Pesquisadores consideram que o uso de símbolos diferentes para o mesmo propósito (Sierpinska, 1992; Santos & Barbosa, 2016), bem como as distintas formas de representação da função (linguagem natural, gráfica, algébrica, tabular), além do uso exclusivo de definições no ensino deste conceito (Tabach & Natchieli, 2015) podem contribuir para que as dificuldades mencionadas não sejam sanadas ao longo da Educação Básica. A busca de subsídios para uma ação docente direcionada a suprir as dificuldades mencionadas evidenciou a necessidade de compreender como o conhecimento é construído. Essas reflexões nos direcionam para as teorias que buscam desvendar os processos cognitivos envolvidos na aprendizagem e na estruturação do conhecimento. Dentre estas teorias encontra-se a Teoria dos Campos Conceituais (TCC), desenvolvida na França na década de 1990 pelo psicólogo Gérard Vergnaud.

A Teoria dos Campos Conceituais pressupõe que o conhecimento se organiza em campos conceituais e sua elaboração ocorre ao longo do tempo, na interação do sujeito com situações da vida cotidiana ou escolar (Vergnaud, 1996; 2009). Os campos conceituais são estruturas compostas por diversos elementos, como situações que dão sentido aos conceitos, variados conceitos e operações de pensamento. Esses elementos, em interação na resolução das situações, possibilitam a construção do conhecimento, segundo o pesquisador. Para a Teoria dos Campos Conceituais, uma situação é composta por uma ou mais tarefas que desafiam os conhecimentos estabelecidos pelo indivíduo, promovendo a construção de novos conceitos.

Vergnaud (1996) também estabelece uma definição específica para conceito. Segundo o pesquisador, um conceito extrapola sua definição, sendo um construto composto por situações associadas a ele, operações de pensamento necessárias para resolvê-las e representações utilizadas na apresentação, organização e resolução da situação. Dessa forma, identificar e classificar as situações associadas a um conceito é essencial para o pesquisador que tem como objetivo mapear um campo conceitual.

O próprio autor da Teoria dos Campos Conceituais estabeleceu os campos conceituais das estruturas aditivas e estruturas multiplicativas, para os quais elencou tipos de situações que atribuem significado aos conceitos de adição e multiplicação, respectivamente (Vergnaud, 1983; 1996; 2014). O pesquisador examinou problemas cujas resoluções exigem mais do que uma operação de adição ou de multiplicação, denominando-os de *problemas aritméticos complexos*. Os problemas que envolvem várias operações aditivas são chamados de *problemas*

*aditivos puros*; os que requerem mais de uma operação multiplicação são denominados *problemas multiplicativos puros*; e aqueles que envolvem múltiplas operações aditivas e multiplicativas foram chamados de *problemas mistos* (Vergnaud, 2014). Os problemas aritméticos complexos ainda não foram categorizados, da mesma forma que as situações aditivas e multiplicativas.

O conceito matemático explorado nesta pesquisa, com o aporte teórico da Teoria dos Campos Conceituais, é a *função afim*, descrita algebricamente pela expressão  $y = ax + b$  ( $a \in \mathbb{R}$ ,  $b \in \mathbb{R}$ ), em que  $x$  e  $y$  são variáveis reais, independente e dependente, respectivamente. A expressão algébrica combina uma operação de adição e uma operação de multiplicação, de forma similar aos problemas mistos descritos na teoria. Desta forma, a classificação das situações de função afim, pode ser determinada por meio da combinação das classes aditivas e multiplicativas, como fez Miranda (2019), que supôs a existência de 30 categorias de situações.

A partir desta conjectura, Miranda (2019) analisou e categorizou situações de função afim descritas em livros didáticos do 9º ano do Ensino Fundamental e 1º ano do Ensino Médio concluindo que nem todas as classes possíveis estão presentes nestes livros. Para Vergnaud (1996), a falta destas classes pode interferir na construção do conceito pelo estudante, deixando de ter contato e ser desafiado pelas diferentes situações relacionadas ao conceito.

Outras pesquisas no âmbito do GEPeDiMa mostram que poucas classes apontadas por Miranda (2019) estão presentes nos livros didáticos utilizados atualmente. O predomínio de somente uma destas classes é observado por Rodrigues e Rezende (2021) em livros do Ensino Fundamental – Anos Iniciais. Em relação a problemas multiplicativos, que podem ser relacionados com a função afim, Zanella e Rezende (2021) verificaram que a classe mais comum é a proporção simples. Esta classe é considerada de aprendizado mais rápido e fácil, o que não é suficiente para que o estudante compreenda plenamente o conceito de função afim.

Desta forma, sentimos a necessidade de ampliar a busca por situações que venham a contribuir com professores e estudantes no sentido de construir o conceito de função afim, incluindo novas fontes, como as teses de doutorado e dissertações de mestrado que pesquisaram este tema e o desenvolveram em sala de aula. Com isso, se espera construir um conjunto de situações coerente, com o suporte teórico da Teoria dos Campos Conceituais, contribuindo para a delimitação do campo conceitual da função afim. A existência do campo conceitual das funções, incluindo a função afim, foi evidenciada por Merli (2022), que mostrou este campo transcende a relação entre os campos conceituais aditivo e multiplicativo, pois as funções incluem elementos como variáveis, conjuntos e pares ordenados, que são conceitos pertinentes às funções, mas não estão presentes nos problemas que envolvem as estruturas aditivas e multiplicativas.

Com isso, na pesquisa mencionada, buscamos responder a seguinte questão: quais classes de situações relacionadas à função afim são identificadas em pesquisas de pós-graduação publicadas no Brasil? E para responder à pergunta de pesquisa definimos o objetivo geral: *Analisar as situações relacionadas à função afim presentes em dissertações de mestrado e teses de doutorado brasileiras*. Para atingir este objetivo, o desmembramos em três objetivos específicos: 1 – *Identificar e caracterizar as pesquisas brasileiras que abordaram situações relacionadas à função afim*; 2 – *Identificar e classificar as situações relacionadas à função afim presentes em dissertações de mestrado e teses de doutorado brasileiras*; 3 – *Analisar e categorizar as variáveis didáticas identificadas nessas situações*. Neste texto, a ênfase está em apresentar o objetivo específico 2.

Para atingir o objetivo que relatamos neste artigo, recorremos a Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD) e Catálogo de Teses da Capes (BTD), nas quais selecionamos as dissertações de mestrado e teses de doutorado voltadas ao tema de interesse, utilizando todos os dados disponíveis, sem limitação de tempo. Após isso, foram identificadas as situações de função afim desenvolvidas com estudantes e que apresentavam um contexto próximo ao cotidiano dos estudantes. Para a classificação destas situações, utilizamos o esquema relacional da Teoria dos Campos Conceituais e a resolução da situação, bem como a combinação de classes multiplicativas e aditivas, nesta ordem, conforme se resolve as operações presentes na forma algébrica da função.

## 2 Referencial teórico

O aporte teórico da investigação realizada é a Teoria dos Campos Conceituais (TCC). Esta teoria foi elaborada, desenvolvida e divulgada pelo pesquisador francês Gérard Vergnaud, com seus principais fundamentos na epistemologia genética de Jean Piaget e na teoria sócio-crítica de Lev Vygotsky, de acordo com Vergnaud (2017). O pesquisador considerou e aprimorou conceitos dessas duas teorias, para atingir o objetivo da TCC, que é oferecer fundamentos para a investigação do desenvolvimento da aprendizagem de competências complexas do sujeito, especialmente aquelas voltadas às ciências, mediante a análise das operações mentais desencadeadas na ação do sujeito ao se sentir desafiado por alguma situação que demanda solução, seja ela educacional, cotidiana ou profissional (Vergnaud, 1996, 2017).

Para Gérard Vergnaud e sua Teoria dos Campos Conceituais, o conhecimento é composto por uma variedade de elementos que se organizam em estruturas por ele denominadas de campos conceituais. Os campos conceituais são caracterizados por um conjunto de elementos, dos quais fazem parte as situações, conceitos e operações de pensamentos, que atuam de forma conjunta para proporcionar a aquisição do conhecimento (Vergnaud, 1996). O pesquisador considera que um conceito é composto por elementos de natureza distintas, que estão interrelacionados, atuando de maneira orquestrada no desenvolvimento da situação. Diante disso, Vergnaud (2009) define conceito como uma terna de conjuntos da forma  $C = (S, I, R)$ , na qual:

S: conjunto de situações que dão sentido ao conceito;

I: conjunto dos invariantes operatórios, composto pelos teoremas em ação e conceitos em ação, que são mobilizados pelo aprendiz na atuação em situação;

R: conjunto das representações simbólicas (linguagem natural, gráfico, tabelas, diagramas etc.) usadas pelo estudante para resolver determinada situação. Essas representações ajudam a identificar os processos mentais envolvidos, mesmo que alguns sejam implícitos, e estabelecem a ligação entre o sujeito e a atividade cognitiva.

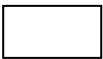
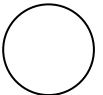
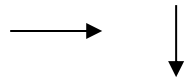
Para a TCC, um conceito só existe associado às diversas situações a ele relacionadas, bem como, cada situação pode envolver vários conceitos necessários para sua resolução, como proporção, dependência entre variáveis, ângulo entre duas retas e taxa de variação, no caso da função afim, por exemplo. Como o conceito de função afim está associado à diferentes tipos de situações, um dos objetivos da investigação original realizada foi estabelecer a tipologia das situações que dão sentido ao conceito de função afim. Para isso, examinamos situações de instrumentos de pesquisa desenvolvidas em programas de pós-graduação brasileiros, elaboradas com a intenção de favorecer a construção do conceito de função afim pelo estudante.

O objetivo é conhecer as classes de situações de função afim identificadas no *corpus* da investigação.

Inicialmente, Vergnaud (1996, 2014) caracterizou e divulgou dois campos conceituais na Matemática, o campo conceitual das estruturas aditivas e o campo conceitual das estruturas multiplicativas. Para estes campos, o pesquisador, identificou e classificou situações relativas aos conceitos de adição e de multiplicação. É o que fizemos, inspirados nele, para as situações de função afim. As situações de estrutura aditiva foram organizadas pelo pesquisador, em seis classes: *composição de medidas*; *transformação de medidas*; *comparação entre medidas*; *composição de transformações*; *transformação de uma relação*; e, *composição de duas relações*. Em relação às situações de estrutura multiplicativa, foram estabelecidas cinco categorias: *proporção simples (isomorfismo de medidas)*, *proporção dupla ou função bilinear*; *proporção múltipla*, *comparação multiplicativa e produto cartesiano* (Gitirana et al., 2014; Vergnaud, 2014). Além dos problemas de estruturas aditivas e multiplicativas, a TCC descreve os problemas aritméticos complexos, subdivididos em problemas aditivos puros, problemas multiplicativos puros e problemas mistos como aqueles que envolvem uma destas estruturas mais de uma vez ou as duas conjuntamente na mesma situação, respectivamente. Para estes, Vergnaud não estabeleceu uma classificação.

No processo de categorização das situações, Vergnaud (2014) utilizou símbolos e esquemas relacionais capazes de representar as estruturas aditivas e multiplicativas. Estes símbolos estão descritos no Quadro 1 e são: a chave (vertical ou horizontal), que representa a composição de elementos de mesma natureza; e a flecha ou seta (vertical ou horizontal), usadas para representar transformações ou relações, que compõem elementos de naturezas distintas.

**Quadro 1:** Simbologia adotada por Vergnaud para representar números e operações de pensamento

| Símbolo                                                                             | Designação                      | O que ele representa                                                                                   |
|-------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|  | Retângulo                       | Um número natural (sem sinal)                                                                          |
|  | Círculo                         | Um número relativo (com sinal)                                                                         |
|  | Chave (horizontal ou vertical)  | A composição de elementos de mesma natureza                                                            |
|  | Flecha (horizontal ou vertical) | Uma transformação ou uma relação de comparação, isto é, a composição de elementos de natureza distinta |

**Fonte:** Adaptado - Vergnaud (2014, p. 201)

A categorização de situações de função afim, foco deste trabalho, teve início, no âmbito do GEPEDiMa, com Miranda (2019), que traçou um paralelo entre os problemas mistos de Vergnaud (2014) e a função afim. A autora conjecturou a existência de 30 classes de situações de função afim, que foram obtidas combinando as classes de situações de estrutura aditiva e as classes de estrutura multiplicativa.

No entanto, Tieppo (2024) mostrou que algumas classes de estrutura multiplicativa, são incompatíveis com a função afim. A autora demonstra que as classes denominadas *proporção múltipla*, *função bilinear* e *produto cartesiano* são incompatíveis com a função afim, pois estas classes são representadas por funções que demandam ao menos duas variáveis independentes, em contraste com a função afim com apenas uma variável independente. Com isso, o número de classes que fora inicialmente conjecturado ficou reduzido para apenas 12 classes, combinação de duas classes multiplicativas e cinco classes aditivas.

### 3 Metodologia

A investigação original realizada adotou uma abordagem qualitativa, conforme Gil (2002), interpretativa e humanística, conforme aponta Stake (2011). Os dados foram produzidos a partir de teses e dissertações, dando um caráter documental à pesquisa, por serem consideradas fontes primárias de informação que ainda não foram submetidas a um tratamento analítico (Gil, 2002). Essa escolha se baseou na existência de programas profissionais voltados à Educação Básica, momento adequado ao ensino das funções e que poderiam fornecer situações desenvolvidas em sala. No entanto, encontramos pesquisas de programas acadêmicos que também atenderam a este critério.

A seleção dos componentes do *corpus* ocorreu nas plataformas digitais Biblioteca Digital Brasileira de Teses e Dissertações (BDTD) e Catálogo de Teses e Dissertações (BTD). Estes locais concentram teses e dissertações provenientes de programas de pós-graduação brasileiros. Ambas as bases de dados são importantes iniciativas brasileiras que oferecem acesso a uma vasta quantidade de teses e dissertações de programas de pós-graduação, tanto nacionais quanto internacionais de brasileiros, por meio de plataformas online. Elas facilitam a busca e disponibilizam documentos integralmente, contribuindo significativamente para estudantes, pesquisadores e interessados na obtenção e disseminação de conhecimento científico.

A exploração inicial dos repositórios foi guiada pelos descritores: *função afim*; *função polinomial do 1º grau*; *função do 1º grau*; e, *função linear*, expressões mais comuns utilizadas para designar a função afim. Nesta primeira busca, nenhum outro filtro, seja ela relação a datas ou qualquer outra limitação dos repositórios foi utilizado. Essa exploração ocorreu em três momentos distintos, nos meses de fevereiro e março/2021, julho/2022 e junho/2023. Nas duas últimas datas ocorreu a revisão das bases de dados para atualizar a pesquisa e incluir documentos que foram disponibilizados após março/2021. Após a exclusão de documentos duplicados, presentes na BDTD e BTD, contabilizamos 588 pesquisas, sendo 479 dissertações e 109 teses, que ainda não é a delimitação final do *corpus*, que se fez necessária em virtude de fatores de interesse desta pesquisa e de características das teses e dissertações.

Razões técnicas e metodológicas influenciaram a redução no *corpus* da pesquisa, como: a não disponibilidade dos documentos na íntegra; a duplicidade de pesquisas nas duas plataformas; a utilização de função linear fora do escopo da Educação Básica; o desenvolvimento das pesquisas com professores; situações não desenvolvidas por estudantes; e a ausência de situações com contexto, apenas algoritmizadas. Outra razão que causou a redução no número de teses e dissertações analisadas, foi a incompatibilidade de algumas classes de estrutura multiplicativa com o conceito de função afim. Atendidos todos esses critérios, a composição final do *corpus* da investigação realizada contou com 66 pesquisas, sendo 63 dissertações de mestrado e 3 teses de doutorado.

No *corpus* delimitado, foram identificadas 1.140 situações de função afim, provenientes de programas acadêmicos e profissionais em 19 estados brasileiros, com uma concentração maior de pesquisas nos estados do Sul e Sudeste do Brasil. Neste texto, utilizamos situação para designar qualquer pergunta ou problema que seja solicitado a resolução pelo estudante. Assim, cada enunciado pode ter uma ou mais situações a serem resolvidas.

Os problemas obtidos nas teses e dissertações foram resolvidos e analisados, algebricamente e por meio dos esquemas de Vergnaud (2014), os quais auxiliaram na classificação das situações. Esta categorização das situações de função afim parte do pressuposto da existência do Campo Conceitual da Função Afim, conforme delineado por Merli (2022), nos moldes da Teoria dos Campos Conceituais. Essa teoria estabelece que o conhecimento está organizado em campos conceituais, e que identificar o conjunto de situações que atribuem significado a um conceito específico é essencial para a ação pedagógica visando à construção do conceito (Vergnaud, 1996). Desta forma, a categorização se sustenta em Vergnaud (1996; 2014), Gitirana *et al.* (2014) e Miranda (2019). A classificação de situações tem o respaldo de Vergnaud (1996), para quem toda situação pode ser relacionada com situações de base, tornando a classificação dessas situações essencial para o trabalho do pesquisador que pretende mapear um campo conceitual. Conhecer a tipologia das situações que dão sentido a um determinado conceito é, fundamental para o docente, na mediação da construção do conhecimento dos estudantes.

Para categorizar situações relacionadas à função afim, analisamos a estrutura do enunciado e elaboramos os esquemas relacionais inerentes. Classificamos as situações com base na expressão algébrica  $y = ax + b$ , considerando os coeficientes reais, considerando separadamente as operações para obter o termo  $ax$  (multiplicativo) e o termo  $b$  (aditivo). A nomeação das categorias foi elaborada de acordo com as estruturas multiplicativas e aditivas, nesta ordem, de acordo com a forma algébrica da função afim.

Na resolução das situações, denominamos *situação principal* aquela que é solicitada no enunciado, como por exemplo: determinar a expressão algébrica da função; encontrar a imagem da função em um valor específico; ou identificar o domínio correspondente a uma determinada imagem. Por outro lado, denominamos *etapa intermediária* a situação necessária para responder a situação principal, mas que não a responde diretamente, se caracterizando como uma *situação auxiliar*. Para diferenciar a situação principal das etapas intermediárias utilizamos traçados diferentes nos esquemas, sendo que as linhas contínuas indicam a situação principal e linhas pontilhadas indicam as etapas intermediárias. Além disso, estendemos a simbologia utilizada por Vergnaud (2014), utilizando os retângulos e os círculos para representar números reais. Na próxima seção, apresentamos um recorte das análises realizadas com base no *corpus* de pesquisa.

### 3 Discussão e resultados

Com o objetivo de estabelecer a tipologia de situações relacionadas à função afim em dissertações de mestrado e teses de doutorado brasileiras, foi realizada a identificação, análise, resolução e classificação dessas situações presentes no *corpus* da investigação original. Buscamos situações contextualizadas em eventos do cotidiano, que expressassem relações entre variáveis por meio de uma função afim, excluindo aquelas desprovidas de contexto ou que pudessem ser solucionadas apenas por processos algébricos.

Posteriormente, cada situação foi resolvida algebricamente e construídos seus esquemas relacionais, permitindo sua classificação conforme critérios da Teoria dos Campos Conceituais. Cada item apresentado no problema foi considerado como uma situação distinta, mesmo quando utilizava os mesmos dados exibidos no enunciado.

A tipologia das situações relacionadas à função afim é fundamentada na Teoria dos Campos Conceituais, abrangendo classes de situações de estrutura aditiva (Vergnaud, 1996; 2014), de estrutura multiplicativa (Gitirana *et al.*, 2014), problemas mistos (Vergnaud, 2014) e Miranda (2019) no que se refere à classificação de situações envolvendo função afim. Com estes aportes, a partir da *situação principal*, pudemos determinar a classe da situação. No entanto, para resolver a situação principal, pode ser necessária a resolução de situações intermediárias, que também foram classificadas, e contribuem para a solução da situação principal.

As situações relacionadas à função afim identificadas nas teses e dissertações do *corpus* da pesquisa são apresentadas no Quadro 2, abrangendo 12 categorias distintas com estruturas aditivas, multiplicativas e mistas.

**Quadro 2:** Contagem das situações relacionadas à função afim classificadas, conforme estrutura utilizada na resolução

| Classes                                               | Estrutura      | Situações    |
|-------------------------------------------------------|----------------|--------------|
| Proporção simples e composição de medidas             | Mista          | 559          |
| Proporção simples e transformação de medidas          | Mista          | 81           |
| Comparação multiplicativa e composição de medidas     | Mista          | 25           |
| Dupla proporção simples e dupla composição de medidas | Mista          | 1            |
| Proporção simples e dupla composição de medidas       | Mista          | 1            |
| Proporção simples e dupla transformação de medidas    | Mista          | 1            |
| <b>Total de situações de estrutura mista</b>          |                | <b>668</b>   |
| Proporção simples                                     | Multiplicativa | 426          |
| Comparação multiplicativa                             | Multiplicativa | 4            |
| Dupla proporção simples                               | Multiplicativa | 1            |
| Proporção simples e comparação multiplicativa         | Multiplicativa | 1            |
| <b>Total de situações de estrutura multiplicativa</b> |                | <b>432</b>   |
| Composição de medidas                                 | Aditiva        | 25           |
| Transformação de medidas                              | Aditiva        | 15           |
| <b>Total de situações de estrutura aditiva</b>        |                | <b>40</b>    |
| <b>Total Geral</b>                                    |                | <b>1.140</b> |

Fonte: Dados da pesquisa (2024)

Para ilustrar o processo de classificação das situações apresentamos dois exemplos deste procedimento. A primeira situação pertence a classe proporção simples e composição de medidas; a segunda, comparação multiplicativa e composição de medidas. A escolha dessas classes justifica-se pela expressividade numérica que cada uma representa no quantitativo das situações avaliadas no *corpus* da pesquisa, variando-se apenas a classe da estrutura multiplicativa.

**Quadro 3:** Situação de função afim – custo de aluguel de automóveis

Uma locadora de automóveis adota o seguinte critério para calcular o valor a ser cobrado pelo aluguel de seus carros:  
 Uma taxa fixa de R\$ 30,00, independente de quantos quilômetros foram rodados.  
 Uma taxa variável de R\$ 1,20 por quilômetro rodado.  
 a) Um cliente que tenha rodado 135 km numa locação, deverá pagar quanto de aluguel?  
 b) Quantos quilômetros um cliente pode rodar no máximo, se ele dispõe de R\$ 120,00 para pagar o aluguel?

**Fonte:** Barros (2008, p. 238)

O item a) pede o custo da locação de um veículo para uma viagem de 135 km. O custo ( $C$ ) inclui uma taxa fixa (R\$ 30,00) e uma taxa variável ( $d$ ), que aumenta R\$ 1,20 por quilômetro. O custo da viagem é diretamente proporcional aos quilômetros rodados, mais a taxa fixa. Com base no Quadro 4, o custo variável ( $d$ ) é calculado como R\$ 162,00, pertencente à categoria proporção simples (multiplicação um para muitos).

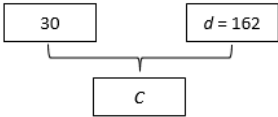
**Quadro 1:** Esquema relacional e cálculo numérico de situação de proporção simples (multiplicação um para muitos)

| Esquema relacional |                    | Cálculo numérico                |
|--------------------|--------------------|---------------------------------|
| Distância (km)     | Custo por km (R\$) | $d = 1,20 \times 135$ $d = 162$ |
| 1                  | 1,20               |                                 |
| 135                | $d$                |                                 |

**Fonte:** Dados da pesquisa (2024).

Para obter o custo total da locação ( $C$ ), ao valor  $d$  deve ser adicionado o valor fixo. Com isso, nos deparamos com uma situação de estrutura aditiva, representada no quadro a seguir.

**Quadro 5:** Esquema relacional e cálculo numérico de uma situação de composição de medidas (todo desconhecido)

| Esquema relacional                                                                  | Cálculo numérico                      |
|-------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------|
|  | $C = 30 + d$ $C = 30 + 162$ $C = 192$ |

**Fonte:** Dados da pesquisa (2024)

A taxa fixa (R\$ 30,00), acrescida do valor referente aos quilômetros rodados ( $d = 162,00$ ) resulta em R\$ 192,00, custo total da locação do veículo (**Error! Reference source not found.** 6). Um esquema relacional único é descrito no quadro a seguir.

**Quadro 6:** Esquema relacional principal e classificação de situação de multiplicação um para muitos e composição de medidas (todo desconhecido)

| Esquema relacional principal |                       |                 | Classificação                                                            |
|------------------------------|-----------------------|-----------------|--------------------------------------------------------------------------|
| Distância (km)               | Custo por km (R\$)    | Taxa fixa (R\$) | Multiplicação um para muitos e composição de medidas (todo desconhecido) |
| 1                            | 1,20                  |                 |                                                                          |
| 135                          | $d$                   | 30              |                                                                          |
|                              | $c$ Custo total (R\$) |                 |                                                                          |

Fonte: Dados da pesquisa (2024)

Este quadro exemplifica uma situação de estrutura mista, pertencente à classe *proporção simples (multiplicação um para muitos) e composição de medidas (todo desconhecido)*, resultado da junção da classe de estrutura multiplicativa com a classe de estrutura aditiva. Neste momento, omitimos a resolução do item b) em razão da limitação de espaço deste texto.

O contexto da segunda situação refere-se ao pagamento de honorários advocatícios por atuação em um processo de divórcio, envolvendo um casal com filhos e possuidor de bens patrimoniais (Quadro 2). A situação, elaborada por Mello (2018) objetivava construir o conceito de função afim por meio de problemas com contextos próximos à realidade dos estudantes do 1º ano do Ensino Médio.

**Quadro 2:** Situação que envolve função afim – honorários advocatícios

João e Maria [...] resolveram por bem, optar pelo divórcio direto. Para tanto, buscaram um escritório de advocacia [...] que cobrou o valor inicial de R\$ 4.500,00 [...]

Ocorre que durante a vida conjugal ambos contribuíram pelo esforço para aquisição de bens que formaram o patrimônio do casal:

- 1 casa de alvenaria, medindo 100 m<sup>2</sup> com valor venal de R\$ 100.000,00;
- 1 veículo marca CACARECO, ano modelo 2005 com valor venal de R\$ 15.000,00;
- 1 veículo marca TRANQUEIRA, ano modelo 2010 com valor venal de R\$ 30.000,00;
- 1 lote de terreno, medindo 300 m<sup>2</sup> com valor venal de R\$ 150.000,00;
- Mobília que guarnece o imóvel do casal com valor venal de R\$ 25.000,00.

Após o advogado tomar conhecimento da existência de bens comuns a partilhar, contratou com as partes o valor equivalente a 10% sobre o ajustamento da partilha dos bens [...]

Considerando todos os bens do casal a serem partilhados, qual o valor total pago pelo casal ao advogado?

Fonte: Mello (2018, p. 73-74)

O enunciado estabelece que os honorários advocatícios ( $C$ ) são calculados em função do valor dos bens imóveis ( $B$ ) e de um valor inicial preestabelecido de R\$ 4.500,00. Para responder à situação, precisamos conhecer o valor total dos bens ( $B$ ) patrimoniais, obtidos pela soma dos valores de cada um deles. Portanto, estamos diante de um problema aditivo puro (Vergnaud, 2014), o que significa que a resolução exige apenas operações aditivas. No Quadro 8, apresentamos o esquema relacional e o cálculo numérico, a partir dos quais obtemos o valor total de bens ( $B$ ) do casal.

**Quadro 8:** Esquema relacional e cálculo numérico de etapa intermediária, da classe composição de medidas (todo desconhecido)

| Esquema relacional | Cálculo numérico                                                 |
|--------------------|------------------------------------------------------------------|
|                    | $B = 100.000 + 15.000 + 30.000 + 150.000 + 25.000$ $B = 320.000$ |

Fonte: Dados da pesquisa (2024)

O esquema relacional apresentado acima é uma adaptação da proposta de Vergnaud (2014) para a composição de duas medidas. O raciocínio envolvido é equivalente, pois o cálculo numérico pode ser feito somando-se as medidas duas a duas, conforme indicado pelas chaves no esquema relacional. Utilizamos contornos pontilhados para representar a etapa intermediária, o que facilita alcançar o objetivo principal da situação: determinar o valor pago em honorários advocatícios. Esta etapa intermediária pertence à classe *composição de medidas (todo desconhecido)*.

O Quadro 9 mostra o cálculo da parte variável dos custos de honorários, obtido a partir do valor total dos bens ( $B = 320.000$ ), à razão de 10% (0,1). Esta situação se enquadra na classe *comparação multiplicativa (referido desconhecido)*.

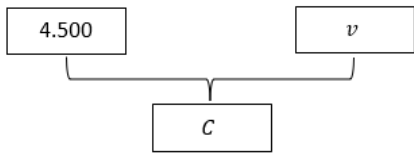
**Quadro 9:** Esquema relacional e cálculo numérico de situação de comparação multiplicativa (referido desconhecido)

| Esquema relacional | Cálculo numérico                                         |
|--------------------|----------------------------------------------------------|
|                    | $v = B \times 0,1$ $v = 320.000 \times 0,1$ $v = 32.000$ |

Fonte: Dados da pesquisa (2024)

Conhecendo o valor fixo (R\$ 4.500,00), citado no enunciado, e o valor variável ( $v = R\$ 32.000,00$ ), calculado no quadro anterior, podemos determinar o total gasto pelo casal no processo de divórcio ( $C = R\$ 36.500,00$ ), conforme explicitado no **Quadro** . O esquema relacional e o cálculo utilizado nos permitem classificar o problema como *composição de medidas*.

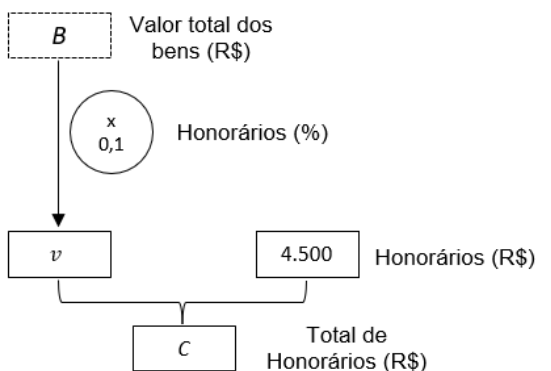
**Quadro 10:** Esquema relacional, cálculo numérico e classificação da situação de composição de medidas (todo desconhecido)

| Esquema relacional                                                                | Cálculo numérico                                  |
|-----------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------|
|  | $4.500 + v = C$ $C = 4.500 + 32.000$ $C = 36.500$ |

Fonte: Dados da pesquisa (2024)

Os esquemas relacionais utilizados na resolução do problema foram reunidos no Quadro 11, denominado *esquema relacional principal*. Este quadro mostra os esquemas relacionais de estrutura multiplicativa, da etapa intermediária e o esquema relacional de estrutura aditiva de forma conjunta. Com isso, concluímos que a situação pertence a classe *comparação multiplicativa (referido desconhecido)* e *composição de medidas (todo desconhecido)*.

**Quadro 11:** Esquema relacional principal e classificação de situação de comparação multiplicativa (referido desconhecido) e composição de medidas (estado final desconhecido), com etapa intermediária

| Esquema relacional principal                                                       | Classificação                                                                                                              |
|------------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
|  | <p>Comparação multiplicativa (referido desconhecido) e composição de medidas (todo desconhecido) e etapa intermediária</p> |

Fonte: Dados da pesquisa (2024)

O percurso que escolhemos para a solução da situação foi, primeiramente, a obtenção do valor total dos imóveis e, posteriormente, calculamos o percentual devido ao advogado. Esse valor, somado ao valor inicial, determina o custo do divórcio mencionado. Poderíamos ter calculado, primeiramente, os 10% de cada imóvel e, depois, somado ao valor inicial para obter o custo final, modificando a forma de resolução, porém sem modificar a classificação final da situação. Com isso, pode-se observar que a interpretação da situação, bem como o itinerário utilizado na resolução, depende de análise individual.

A categorização das situações de função afim seguiu um processo semelhante a este exemplo, utilizando a estrutura descrita no enunciado e apoiando-se nas categorias previamente estabelecidas pela Teoria dos Campos Conceituais para situações aditivas e multiplicativas. Os esquemas relacionais foram elaborados considerando a estrutura da situação, diferenciando entre situação principal e etapa intermediária.

Para a análise dos dados, supomos 30 categorias distintas de situações de função afim, conforme Miranda (2019). No entanto, como demonstrado por Tieppo (2024), algumas classes como *produto de medidas*, *proporção múltipla* e *função bilinear*, são incompatíveis com a função afim, reduzindo o número de possíveis classes para 12. No *corpus* delimitado,

identificamos seis classes de situações de estrutura mista provenientes de problemas relativos à função afim. Três delas corroboram com Miranda (2019): proporção simples e composição de medidas; proporção simples e transformação de medidas; comparação multiplicativa e composição de medidas. As outras três classes são variações das classes iniciais: *dupla proporção simples e dupla composição de medidas*; *proporção simples e dupla composição de medidas*; *proporção simples e dupla transformação de medidas*. Essas classes mostram a recorrência de componentes de estrutura aditiva ou multiplicativa ou de ambas.

Observa-se que as classes possíveis de estrutura multiplicativa, proporção simples e comparação multiplicativa, foram identificadas no conjunto de dados. No entanto, entre as classes de estrutura aditiva, apenas a composição de medidas e a transformação de medidas, e sua forma simples ou duplas, foram observadas. Isso revela uma limitação dessas situações quando analisadas à luz da Teoria dos Campos Conceituais.

As situações com estrutura multiplicativa foram agrupadas em quatro categorias distintas: proporção simples; comparação multiplicativa; dupla proporção simples; proporção simples e comparação multiplicativa. Duas dessas classes coincidem com os resultados de Miranda (2019): proporção simples e proporção simples e comparação multiplicativa. Além disso, foram identificadas situações com dupla estrutura multiplicativa em duas categorias específicas: dupla proporção simples; proporção simples e comparação multiplicativa. Na primeira, a estrutura se replica dentro da mesma classe, enquanto na segunda, ocorre em classes diferentes.

Uma outra conclusão significativa desta pesquisa é que a classificação atribuída a cada situação está condicionada ao percurso adotado para resolvê-la, especialmente em problemas complexos que envolvem várias etapas intermediárias. Isso já foi sugerido por Vergnaud (2014) ao abordar os problemas aritméticos complexos. Ele menciona que quando o objetivo só pode ser alcançado após várias etapas intermediárias, muitas vezes há diversos caminhos possíveis que requerem uma análise cuidadosa. Essa diversidade de abordagens pode levar a diferentes classificações das situações complexas.

Nesse contexto, os esquemas relacionais apresentados para cada exemplo de situação, incluindo suas etapas intermediárias, delineiam um dos possíveis caminhos para a resolução dessas situações. No entanto, isso não exclui a possibilidade de existirem outros caminhos, dependendo da escolha do estudante.

#### 4 Considerações

O conhecimento das classes de situações que conduzem à construção de um conceito é fundamental para os processos de ensino e de aprendizagem. Assim, com o aporte da Teoria dos Campos Conceituais, apresentamos aqui, quais as classes de situações de função afim foram identificadas em teses e dissertações produzidas no Brasil.

A pesquisa permitiu confirmar a predominância das classes de *proporção simples e composição de medidas*, bem como de *proporção simples e transformação de medidas*, já identificadas em pesquisas anteriores no âmbito do GEPEDiMa. Além disso, novas classes foram identificadas, particularmente aquelas em que uma das estruturas, aditiva e multiplicativa, ou ambas, aparecem em duplicidade. Em relação à componente aditiva utilizada na classificação, foram observadas apenas as classes de composição e de transformação de medidas, sendo as demais ausentes no conjunto de dados.

Um ponto importante levantado por este estudo é a influência do percurso de resolução na classificação das situações, uma vez que problemas complexos, com múltiplas etapas

intermediárias, podem ser abordados por diversos caminhos, o que pode modificar sua classificação. Esta diversidade de percursos ressalta a flexibilidade e a adaptabilidade necessárias no ensino e na aprendizagem da Matemática, especialmente em contextos complexos.

Em síntese, este estudo contribui para melhor compreensão das categorias de situações de função afim, evidenciando tanto suas potencialidades quanto suas limitações. Esperamos que as conclusões aqui apresentadas possam servir de base para futuras pesquisas e práticas educativas, promovendo um ensino mais eficaz e adaptado às diversas formas de raciocínio matemático dos estudantes.

## Referências

- Barros, C. P. M. (2008). *Análise de atitudes de estudantes na educação de jovens e adultos em situação de resolução de problemas*. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo, SP.
- Brasil. Ministério da Educação. Secretaria da Educação. (2018). *Base Nacional Comum Curricular (BNCC)*. Brasília, DF.
- Gil, A. C. (2002). *Como elaborar projetos de pesquisa*. São Paulo, SP: Atlas.
- Gitirana, V.; Campos, T. M. M.; Magina, S. & Spinillo, A. (2014). *Repensando Multiplicação e Divisão. Contribuição da Teoria dos Campos Conceituais*. São Paulo, SP: PROEM.
- Mello, A. L. (2018). *Resolução de problemas e avaliação conceitual: uma experiência no ensino de função afim*. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional). Universidade Tecnológica Federal do Paraná. Pato Branco, PR.
- Merli, R. F. (2022). *Do pensamento funcional ao campo conceitual de função: o desenvolvimento de um conceito*. 216f. Tese (Doutorado em Educação em Ciências e Educação Matemática). Universidade Estadual do Oeste do Paraná. Cascavel, PR.
- Miranda, C. A. (2019). *Situações que envolvem o conceito de função afim: uma análise à luz da teoria dos campos conceituais*. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Educação Matemática). Universidade Estadual do Oeste do Paraná. Cascavel, PR.
- Rodrigues, C. L. B. H.; Rezende, V. (2021). Problemas mistos em livros didáticos: uma classificação com base na teoria dos campos conceituais. *Amazônia: Revista de Educação em Ciências e Matemáticas*, 17(39), 271-287.
- Santos, G. L. D.; Barbosa, J. C. (2016). Um modelo teórico de matemática para o ensino do conceito de função a partir de um estudo com professores. *Unión-Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 12(48), 315-338.
- Sierpinska, A. (1992). On understanding the notion of function. In: E. Dubinsky; G. Harel (eds.). *The concept of function: aspects of epistemology and pedagogy*. (p. 25-58). USA: Mathematical Association of America.
- Stake, R. E. (2011). *Pesquisa qualitativa: como as coisas funcionam*. Rio de Janeiro, RJ: Penso.
- Tabach, M.; Nachlieli, T. (2015). Classroom engagement towards using definitions for developing mathematical objects: the case of function. *Educational Studies in Mathematics*, 90, 163-187.



- TIEPPO, S. M. (2024). *Panorama das situações relacionadas à função afim em teses e dissertações brasileiras*. 231f. Tese (Doutorado em Educação em Ciências e Educação Matemática). Universidade Estadual do Oeste do Paraná. Cascavel, PR.
- Tinoco, L. A. A. (2002). *Construindo o conceito de Função*. Rio de Janeiro, RJ: Projeto Fundação.
- Vechia, A.; Lorenz, K. M. (1998). *Programa de ensino da escola secundária brasileira: 1850-1951*. Curitiba, PR: Ed. do Autor.
- Vergnaud, G. (2017) *Piaget e Vygotski em Gérard Vergnaud: Teoria dos Campos Conceituais*. Porto Alegre, RS: GEEMPA.
- Vergnaud, G. (2014). *A criança, a matemática e a realidade: problemas do ensino da matemática na escola elementar*. Curitiba, PR: UFPR.
- Vergnaud, G. (2009). O que é aprender. In: M., BITTAR; C. A., MUNIZ. (Org). *A aprendizagem Matemática na perspectiva da teoria dos campos conceituais*. (p. 13-26). Curitiba, PR: CRV.
- Vergnaud, G. (1996). A teoria dos campos conceituais. In: BRUN, J. *Didáctica das matemáticas*. Tradução de Maria José Figueiredo. (p. 155-191). Lisboa, Portugal: Instituto Piaget.
- Vergnaud, G. (1983). Multiplicative structures. In: R. LESH & M. LANDAU (Eds.). *Acquisition of math concepts and processes*. (p. 127-174). London, England: Academic Press.
- Zanella, M. S.; Rezende, V. (2021). Ideias base de função e o Campo Conceitual das Estruturas Multiplicativas: um estudo de um livro didático do 5º ano. *Anais do VIII Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática* (pp. 2847-2861). Uberlândia, MG.