

A importância das perguntas e de suas diferentes tipologias na mediação do professor durante uma atividade realizada com estudantes de um curso de Engenharia

The importance of questions and their different types in teacher mediation during an activity with engineering students

Juliana Martins Philot¹
Barbara Lutaif Bianchini²
Eloiza Gomes³

Resumo: Nesse artigo, baseado nos dados apresentados na tese de doutoramento de Philot, apresenta-se uma análise dos diálogos realizados entre três estudantes de um curso Engenharia e a pesquisadora, que foram gravados e transcritos, durante a resolução de uma atividade, envolvendo o objeto matemático autovalor e autovetor. O foco está nas manifestações da pesquisadora, nos momentos das mediações fundamentadas na Teoria da Modificabilidade Cognitiva Estrutural e na Experiência de Aprendizagem Mediada, buscando identificar as diferentes tipologias de perguntas utilizadas por esta. Nessa pesquisa de caráter qualitativa, observa-se que fazer um questionamento ao estudante com clara intencionalidade pedagógica, no sentido de estimulá-lo e de fazer com que supere alguns entraves e colocá-lo diante de um conflito cognitivo, é fundamental para sua aprendizagem.

Palavras-chave: Experiência de Aprendizagem Mediada. Tipologia de perguntas. Engenharia. Autovalor. Autovetor.

Abstract: This article, based on the data presented in the doctoral thesis of the Philot, presents an analysis of the dialogues between three students from an Engineering course and the researcher, which were recorded and transcribed during the resolution of an activity involving the mathematical object eigenvalue and eigenvector. The focus is on the manifestations of the researcher, in the moments of mediation based on the Theory of Structural Cognitive Modifiability and the Mediated Learning Experience, seeking to identify the different types of questions used by the researcher. In this qualitative research, it was observed that questioning the student with a clear pedagogical intent, in order to stimulate them and make them overcome some obstacles and put them in front of a cognitive conflict, is fundamental for their learning.

Keywords: Mediated Learning Experience. Typology of questions. Engineering. Eigenvalue. Eigenvector.

1 Introdução

As Diretrizes Curriculares Nacionais do Curso de Graduação em Engenharia (Brasil, 2019) apontam a necessidade de rever a formação em Engenharia no país, com o objetivo de procurar novas maneiras de se ensinar os conteúdos, tais como, trabalhando com atividades multidisciplinares e transdisciplinares, mais contextualizadas, com o emprego de metodologias ativas, associando teoria e prática com auxílio de *softwares*, propiciando o desenvolvimento de algumas competências necessárias aos futuros engenheiros (Philot, 2022).

¹ Instituto Mauá de Tecnologia • São Caetano do Sul, SP — Brasil • ✉ juliana.philot@maua.br • ORCID <https://orcid.org/0000-0002-0723-7604>

² Pontifícia Universidade Católica de São Paulo • São Paulo, SP — Brasil • ✉ barbara@pucsp.br • ORCID <https://orcid.org/0000-0003-0388-1985>

³ Instituto Mauá de Tecnologia • São Caetano do Sul, SP — Brasil • ✉ eloiza@maua.br • ORCID <https://orcid.org/0000-0002-1217-9904>

Segundo Vallim, Farines e Cury (2006, apud Ferruzi e Almeida, 2013), os engenheiros vêm enfrentando dificuldades em aplicar a teoria estudada nas disciplinas de Matemática, em situações reais, assim como, fazer adaptações necessárias para que problemas reais possam ser modelados. Estes autores sugerem que um engenheiro deve adquirir conhecimento e recursos para solucionar problemas, modelar situações, analisar resultados, além de habilidades intra e interpessoais, incluindo comunicação, trabalho em equipe, criatividade, responsabilidade social e ética (Philot, 2022).

Philot (2022), de acordo com Ribeiro (2018), enfatiza que o ensino dos conteúdos de Álgebra Linear de forma desvinculada pode contribuir para as dificuldades do processo de ensino e de aprendizagem desta. Alguns trabalhos, como por exemplo, Ferruzi e Almeida (2013) têm discutido que não podemos mais ministrar disciplinas de Matemática de forma isolada, sem conexão com as específicas. Fato corroborado por Camarena (2017), que destaca a importância da contextualização:

é importante porque um conceito matemático contextualizado adquire significado por meio das contextualizações realizadas para a apresentação de um determinado assunto, porque os conceitos não são isolados, são constituídos sob a forma de uma rede e mantêm relações entre eles (Camarena, 2000; Muro, 2004; Trejo, 2005 apud Camarena, 2017, p.11).

Diante desses entraves, com o objetivo de contextualizar o ensino de Álgebra Linear, Philot (2022), em sua tese de doutorado intitulada: *Evento Contextualizado: uma proposta de ensino e de aprendizagem de autovalor e autovetor no curso de Engenharia de Controle e Automação e áreas afins*, objetivou determinar quais são os subsídios necessários para a elaboração de um evento contextualizado voltado à construção dos conceitos de autovalor e de autovetor, aplicar este como uma ferramenta de ensino para os estudantes de um curso de Engenharia de Controle e Automação e áreas afins e identificar quais funções cognitivas foram manifestadas a partir deste ensino contextualizado. A escolha pelo referido objeto matemático deveu-se ao fato de que, dentre todos os tópicos abordados em Álgebra Linear, este é pouco explorado, aspecto identificado em um levantamento bibliográfico realizado pela autora citada.

Para a elaboração deste evento contextualizado a pesquisadora recorreu a preceitos da Teoria A Matemática no Contexto das Ciências (TMCC), que teve início em 1982, no Instituto Politécnico Nacional do México, com a investigadora Patricia Camarena Gallardo. Essa teoria foi desenvolvida tratando de abordar a problemática do ensino e da aprendizagem da Matemática em profissões de Engenharia e, posteriormente estendida para outras graduações em que a Matemática não é a meta principal.

Camarena (2014, 2017), considera o ambiente de ensino e de aprendizagem constituído por um sistema complexo, no qual estão presentes os conteúdos a ensinar, o estudante e o professor, bem como as interações que ocorrem entre eles. Essas interações são compostas por cinco fases⁴: *curricular, didática, epistemológica, docente e cognitiva* que interagem entre si, de maneira não linear. A elaboração do evento contextualizado está vinculada à fase *epistemológica*, e é definido, segundo Camarena (2014), por

problemas ou projetos, que podem ser contextualizados em três fontes: a) nas demais ciências que o aluno está estudando, b) no trabalho e nas atividades profissionais do futuro profissional, c) nas situações da vida cotidiana. É importante ressaltar a diferença que existe entre um evento contextualizado e um exercício: no primeiro, cria-se um conflito cognitivo para o aluno, que muitas vezes nem sabe por onde

⁴ Para maiores detalhes consulte Camarena (2021).

começar; enquanto o segundo (o exercício) é uma situação que o aluno sabe imediatamente como proceder para resolver. (Camarena, 2014, p.145).

Para a análise das funções cognitivas que os estudantes evidenciaram, Philot (2022) sentiu a necessidade de agregar o referencial teórico proposto por Reuven Feuerstein. Discutiu então em detalhes as funções cognitivas evidenciadas por seis estudantes participantes da pesquisa e salientou a importância da mediação nos moldes da Teoria da Modificabilidade Cognitiva Estrutural (TMCE).

Neste artigo, faremos uma revisita aos diálogos apresentados em Philot (2022) referentes à mediação do professor durante o trabalho dos estudantes com questões norteadoras as quais serão posteriormente detalhadas. Optamos por analisar a mediação docente, por esta não ter sido realizada em sua tese, uma vez que este não era o seu objetivo. Na seção seguinte apresentamos os principais subsídios teóricos relativos à mediação que nos permitirão fundamentar as análises apresentadas.

2 Referencial Teórico

A Teoria da Modificabilidade Cognitiva Estrutural (TMCE) e a Experiência de Aprendizagem Mediada (EAM) foram desenvolvidas por Reuven Feuerstein, que era de origem judaica e um dos sobreviventes do Holocausto⁵ ocorrido durante a segunda guerra mundial. Com o fim da guerra, imigrou para a Palestina (que logo se tornou o estado de Israel) e começou a lecionar para crianças, que assim como ele, eram sobreviventes do Holocausto e tinham imigrado para a Palestina.

Essas crianças, por tudo que haviam vivenciado, possuíam severos distúrbios intelectuais, cognitivos, físicos e emocionais, mas Feuerstein não admitia que elas fossem mentalmente limitadas e acreditava que poderiam modificar sua inteligência se houvesse uma mediação correta visando este objetivo. Feuerstein sentiu-se então motivado a pensar sobre o processo e o potencial de mudança intelectual de indivíduos em situações semelhantes àsquelas crianças e dessa forma, passou a desenvolver sua teoria (Philot, 2022; Feuerstein, Feuerstein & Falik, 2014).

A partir deste cenário, Feuerstein começou a se questionar se é possível alterar a inteligência e as formas como uma pessoa aprende. Passou então a conceber a inteligência como uma entidade dinâmica e não estática como considerado na época em outras teorias. Segundo ele, a inteligência é

a habilidade de pensar de forma adaptável em resposta a mudanças em nosso ambiente. (...) um agente ou estado dinâmico energético que é instável e responsivo à necessidade da pessoa de se modificar para adaptar-se a situações e lidar com elas com sucesso (Feuerstein, Feuerstein & Falik, 2014, p.49).

Segundo Feuerstein, Feuerstein e Falik (2014), a TMCE é uma teoria que parte do pressuposto que as pessoas são modificáveis, defende não apenas a modificabilidade dos indivíduos, mas também de seus ambientes, que o ser humano tem potencial para aprender e se modificar cognitivamente, em qualquer etapa do seu desenvolvimento, independentemente das barreiras que possam surgir. Para o autor, deve-se buscar que esta modificação seja estrutural, isto é, não aleatória ou limitada no tempo e no espaço, mas

que afetará o aprendizado e o comportamento de forma profunda, sustentável e autoperpetuável. (...) se uma mudança estrutural é criada, ela não ficará confinada ao

⁵ Holocausto se refere à perseguição e ao extermínio sistemático, elaborado pelo governo nazista, de cerca de seis milhões de judeus durante a Segunda Guerra Mundial.

evento sozinha, mas se manifestará em diversos eventos adicionais que têm elementos similares. (Feuerstein, Feuerstein & Falik, 2014, p. 43).

Desta forma, “uma mudança estrutural tende a continuar operando mesmo após o fator inicial que a causou não ser mais vivido diretamente” (Feuerstein, Feuerstein & Falik, 2014, p. 44), concluem ainda que a modificabilidade é transmitida para o ser humano por meio da mediação, compreendida como “uma interação intencional com quem aprende, com o propósito de aumentar o seu entendimento para além da experiência imediata e ajudá-lo a aplicar o que é aprendido em contextos mais amplos” (p. 21). Como salientam os autores supracitados,

o mediador humano não se impõe continuamente ou constantemente sobre a pessoa que está sendo mediada e o mundo. Ele não cobre todo o território entre eles, mas deixa para o mediado uma grande área de exposição direta ao estímulo. Mas, na área em que o agente mediador atua, este está ativo de diversas formas. Entrega para o mediado as componentes que serão responsáveis por sua habilidade de entender fenômenos, procurar entre eles associações e conexões e assim se beneficiar deles e ser modificado (Feuerstein, Feuerstein & Falik, 2014, p. 65).

O professor no papel de mediador provoca, incentiva, dispara e possibilita aos estudantes construir seus próprios conhecimentos (Meier & Garcia, 2008). Pode-se dizer, portanto, que mediar significa

possibilitar e potencializar a construção do conhecimento pelo mediado. Significa estar consciente de que não se transmite conhecimento. É estar intencionalmente entre o objeto de conhecimento e o aluno de forma a modificar, alterar, organizar, enfatizar e transformar os estímulos provenientes desse objeto a fim de que o mediado aprenda por si só (Meier & Garcia, 2008, p. 72).

Feuerstein *et al.* (2014) entendem que a EAM ocorre quando a pessoa mediadora, que já possui experiências e conhecimentos prévios sobre o que será mediado, medeia o mundo, tornando-o mais fácil de ser compreendido, trazendo-lhe significados, fazendo questionamentos (de antecipação, de comparação, entre outros) e despertando a atenção para detalhes que por vezes podem passar despercebidos para o mediado. Dessa forma, a pessoa que medeia não é um objeto que o mediado encontra e com o qual aprende por acaso, tem-se um propósito e uma intenção.

Na mediação de significado, o mediador não está preocupado somente com a transmissão de conteúdos, mas sim com o porquê ensinar esse conteúdo, permitindo dessa forma que o mediado tenha um motivo para estudar e sinta-se motivado para aprender e utilizar os conceitos vistos.

Ao trabalhar com eventos contextualizados, temos recorrido, como estratégia de mediação, à proposição do que denominamos de questões norteadoras, objetivando possibilitar aos estudantes refletirem sobre pontos essenciais para a resolução do evento, levando-os a avançar por conta própria em direção à solução visada. Essas questões não são propostas a partir de um entrave enfrentado pelos estudantes durante a resolução, mas já planejadas com o intuito de evitá-lo, sem, no entanto, eliminar os conflitos cognitivos essenciais para a construção de novas aprendizagens, apresentando, de forma direcionada, por meio de uma EAM, subsídios para que reflitam e enfrentem tais conflitos de maneira bem-sucedida e modifiquem-se estruturalmente.

Inspirados no que foi proposto por Bianchini, Gomes e Lima (2022), além das questões norteadoras elaboradas a priori propusemos aos estudantes uma série de outras perguntas de diferentes tipologias (Brodie & Boaler, 2004), explicitadas no Quadro 1, com o intuito de, durante o processo de respostas das questões norteadoras, a partir dos entraves enfrentados

pelos estudantes, inferir acerca de como eles estavam raciocinando e a partir disto desencadear novas mediações.

Quadro 1: Tipos de questões e suas respectivas descrições

Tipo de Questão	Descrição
T1. Compilando informações e conduzindo por meio de um método	Requer resposta imediata. Permite tentativas e erros com base em fatos ou procedimentos conhecidos. Possibilita que os estudantes façam afirmações sobre fatos ou procedimentos conhecidos.
T2. Utilizando ou inserindo terminologias	Oportuniza que a linguagem matemática seja corretamente empregada para as ideias em discussão.
T3. Explorando significados matemáticos e/ou relações	Proporciona destacar relações matemáticas e significados. Propicia fazer ligações entre ideias matemáticas e representações.
T4. Sondando e requerendo explicações de pensamentos	Viabiliza aos estudantes articular, elaborar ou esclarecer ideias.
T5. Gerando discussões	Provoca contribuições de outros estudantes da sala, além daquele que está respondendo à questão.
T6. Relacionando e aplicando	Permite relacionar ideias matemáticas. Facilita relacionar ideias matemáticas com ideias de outras áreas de estudo ou da vida.
T7. Estendendo o pensamento	Oportuniza estender o que está sendo discutido em determinada situação para outras situações em que ideias similares podem ser utilizadas.
T8. Orientando e focando	Auxilia os estudantes a focar em elementos-chave ou elementos da situação que possibilitam a resolução de problemas.
T9. Estabelecendo contexto	Motiva discutir questões fora da Matemática e estabelecer relações com a Matemática.

Fonte: Bianchini, Gomes e Lima (2022, p. 7)

Nas análises apresentadas neste artigo, buscamos evidenciar nas intervenções realizadas por Philot (2022) a quais dessas tipologias recorreu durante suas mediações.

3 Metodologia

Os dados analisados neste artigo, como já ressaltamos, são provenientes da tese de doutorado de Philot (2022), cujo principal objetivo foi criar, implementar e analisar um evento contextualizado voltado à construção dos conceitos de autovalor e de autovetor. Este evento teve como ponto motivador os modelos matemáticos introduzidos em Epidemiologia, que tiveram início com Kermack e McKendrik em 1927 e foram aprimorados por Isea e Lonngren em 2013, sendo tais modelos conhecidos como SIR (Suscetíveis-Infectados-Recuperados), que preveem a propagação de doenças infecciosas e a interação dos indivíduos envolvidos, modelos compartimentais, determinísticos envolvendo equações diferenciais não lineares.

A intervenção proposta e implementada por Philot (2022) teve a participação de seis estudantes de uma Instituição de Ensino Superior privada do estado de São Paulo, que cursavam a segunda série do curso de Engenharia de Controle e Automação e áreas afins, e trabalharam

de maneira colaborativa, em equipes de três estudantes, durante oito encontros⁶ com duração de duas horas cada.

Nos dois primeiros encontros, os estudantes foram apresentados ao modelo SIR e discutiram que a dinâmica e a estabilidade deste modelo podem ser estudadas de três maneiras distintas (utilizando a: resolução de Equações Diferenciais Ordinárias, Teoria de Controle Clássica ou Teoria de Controle Moderno), mas o foco utilizado foi a abordagem por meio da Teoria de Controle Moderno, a qual possibilita um tratamento das situações estudadas a partir da Álgebra Linear. Nos terceiro e quarto encontros ocorreram aulas teóricas expositivas sobre os conceitos de matrizes, determinantes e sistemas de equações lineares, aulas estas que tiveram como objetivo nivelar o conhecimento dos estudantes, pois alguns já tinham estudado esses conteúdos anteriormente e outros disseram que não se lembravam muito bem e nenhum deles havia estudado sistemas de equações lineares com o enfoque matricial.

No quinto encontro, dividido em duas partes (A e B), foi abordado o conteúdo de autovalor e de autovetor com atividades que auxiliaram os estudantes a obterem a definição desses objetos matemáticos, bem como suas representações geométricas nos espaços bi e tridimensional. O objetivo da primeira parte foi a compreensão pelos estudantes da interpretação geométrica de autovalores e de autovetores. Na Parte B, o principal objetivo foi recorrer especificamente às representações matriciais para consolidar os conceitos de autovalor e de autovetor e os procedimentos algébricos para determiná-los.

No sexto encontro foram retomados os conceitos de autovalor e de autovetor e em seguida, os estudantes resolveram alguns exercícios com o objetivo de verificar se detinham o conhecimento de como realizar os cálculos para obtenção dos autovalores e dos autovetores e se sabiam manipular algum *software* (Symbolab, Matlab ou GeoGebra) para auxiliar nesse processo. Os últimos dois encontros foram destinados à resolução do evento proposto.

Todos os encontros foram audiogravados e posteriormente transcritos por Philot (2022). Neste artigo, retomamos as transcrições da Parte A do quinto encontro e analisamos, a partir da perspectiva da mediação docente e das diferentes tipologias de perguntas que podem ser feitas neste processo, os diálogos desenvolvidos entre os estudantes e Philot durante a resolução de algumas questões norteadoras que compuseram o encontro.

Para as análises apresentadas neste artigo, do ponto de vista metodológico, inicialmente relemos atentamente as transcrições dos diálogos realizados no encontro em foco. Em seguida, detivemo-nos nas manifestações da pesquisadora (Philot) buscando identificar, nos momentos em que realizava mediações junto aos estudantes, a que tipologias de perguntas, na acepção Brodie e Boaler (2004), recorria e com quais intenções.

4 Análise e Discussão dos dados produzidos

Como já destacado, no quinto encontro, o objetivo da Parte A foi estimular os estudantes a compreenderem a interpretação geométrica dos autovalores e dos autovetores. Para isso, foi apresentada uma questão motivadora (Figura 1) e na sequência uma série de questões que foram trabalhadas com a utilização do *software* GeoGebra.

⁶ Detalhes podem ser vistos em Philot (2022).

Figura 1: Questão motivadora

Vamos supor que você esteja trabalhando com processamento de imagens e tenha a Imagem 1 (original) e queira transformá-la na Imagem 2 (transformada).



Imagem 1: original



Imagem 2: transformada

Sabe-se que se criarmos um sistema cartesiano plano de referência adequado e associarmos cada ponto da Imagem 1 um vetor com origem na origem do sistema adotado e multiplicarmos cada um desses vetores por uma matriz $A = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ a Imagem 1 sofrerá uma transformação (distorção) obtendo assim a Imagem 2.

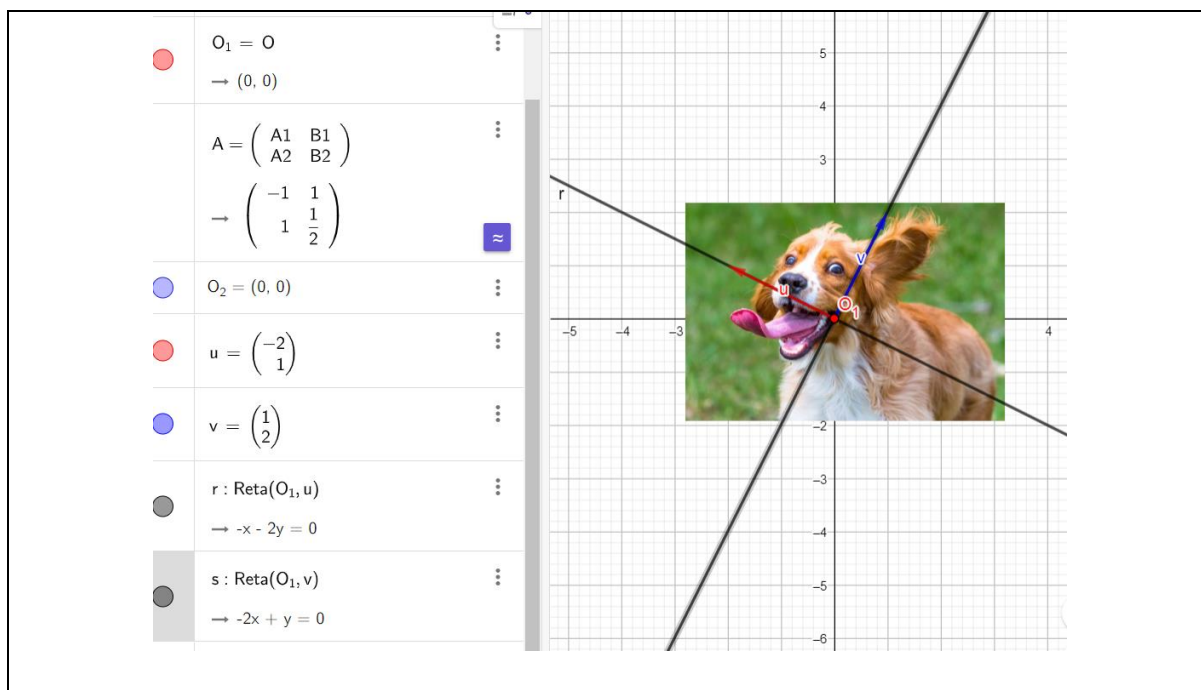
Abra o Exercício, no GeoGebra, para ver essas Figuras associadas a um sistema de coordenadas cartesianas planas, e a partir das informações resolva as seguintes questões.

Fonte: Philot (2022, p. 219)

Nossa análise foi focada nas intervenções realizadas pela pesquisadora durante a resolução das três primeiras questões norteadoras que são apresentadas nos quadros 2 e 3, acompanhadas de seus objetivos e de uma possível resolução esperada dos estudantes.

Quadro 2: Questão norteadora 1, objetivo e possível solução

Questão norteadora 1
Escreva na Janela Gráfica 1 um representante dos vetores $\vec{u} = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ e $\vec{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ e as retas r que passa pelo ponto O_1 e tem direção do vetor $\vec{u}$ e s que passa pelo ponto O_1 e tem direção do vetor $\vec{v}$. Utilize o comando “Reta (Ponto,Vetor Diretor)”.
Objetivo
Possibilitar que o aluno empregando, no GeoGebra o comando: Reta (Ponto, Vetor Diretor), revise conceitos já estudados na disciplina Vetores, Curvas e Superfícies ministrada no primeiro ano do curso de Engenharia.
Resposta
Espera-se que os estudantes obtenham a seguinte janela do GeoGebra.

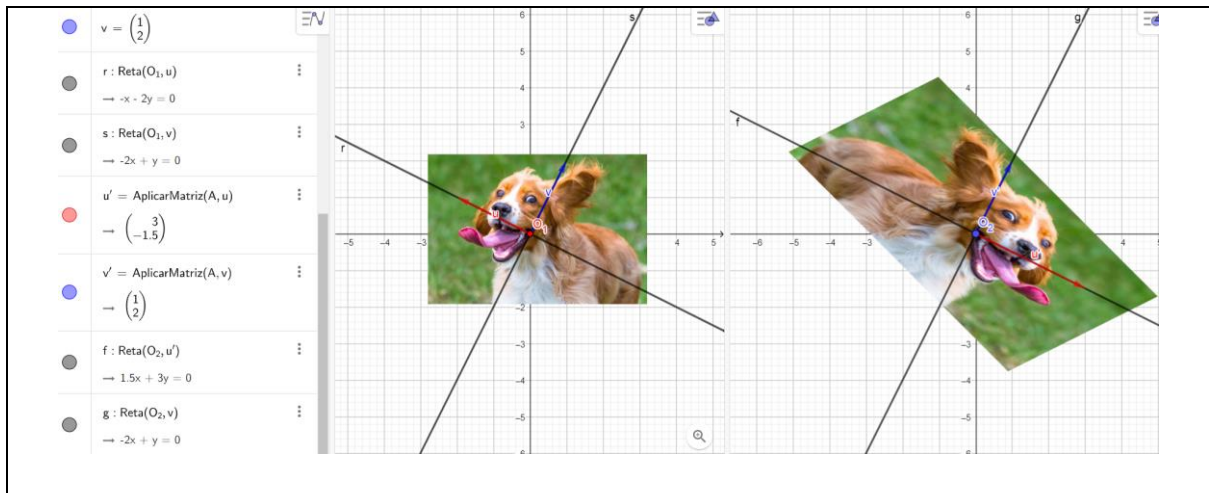


Fonte: Philot (2022, p. 220)

As questões norteadoras 2 e 3 são apresentadas conjuntamente no Quadro 3 devido à similaridade nos objetivos.

Quadro 3: Questões norteadoras 2 e 3, objetivo e possíveis soluções

Questão norteadora 2
Na Janela Gráfica 2, digite no campo de Entrada o comando “AplicarMatriz (Matriz, Objeto)” e digite no lugar da palavra Matriz a matriz A e no lugar da palavra Objeto o vetor $\vec{u}$ e em seguida, faça o mesmo para o vetor $\vec{v}$.
Questão norteadora 3
Na Janela Gráfica 2, digite o comando “Reta (Ponto,Vetor Diretor)”, para representar graficamente a reta que passa pelo ponto O_2 e tem direção do vetor $\vec{u}$ e a reta que passa pelo ponto O_2 e tem direção do vetor $\vec{v}$. Vocês perceberam alguma relação entre os vetores $\vec{u}$ e $\vec{u}'$ e entre $\vec{v}$ e $\vec{v}'$? Em caso afirmativo, justifique.
Objetivo
Possibilitar que o aluno observe que o resultado desta multiplicação da matriz A pelo vetor $\vec{u}$ gera um vetor $\vec{u}'$ de mesma direção de $\vec{u}$ e respectivamente, o mesmo ocorre com o vetor $\vec{v}$. Nestas questões revisa-se também o conceito de paralelismo de vetores.
Resposta
Espera-se que os estudantes obtenham a seguinte janela do GeoGebra.



Fonte: Philot (2022, p. 220-221)

Na resolução das questões 1, 2 e 3 os estudantes, em alguns momentos com a participação da pesquisadora, desenvolveram um diálogo do qual alguns trechos apresentamos e analisamos na sequência:

- (1) Pedro: Acho que o comando “AplicarMatriz” está multiplicando mesmo.
- (2) Bruno: Acho que ele pegou e....espera, porque esses dois vetores estão a 90°?
- (3) Rafael: Mas eles estão mesmo a 90°? Como você sabe?
- (4) Bruno: Ah, parece.
- (5) Pedro: Mede o ângulo entre eles. Que ângulo você mediu? Não mediu o ângulo entre $\vec{u}$ e $\vec{v}$, você mediu o ângulo entre $\vec{u}'$ e $\vec{v}$.
- (6) Pesquisadora: Vocês conseguiram perceber que a origem, nas duas imagens é a mesma? Se as figuras estivessem sobrepostas uma origem estaria sobre a outra, colocamos separado em duas figuras para ficar melhor para visualizar.
- (7) Bruno: Sim, percebemos. Então ele está....quando você multiplica a matriz pelo vetor, você inverte ele e você vai.....você está pegando todo o plano e fazendo isso aqui (grou a mão em cima da Imagem 2).
- (8) Rafael: Exato, o plano está sendo readequado.
- (9) Bruno: Se você perceber, o vetor $\vec{u}$ está apontando para a orelha do cachorro e o vetor $\vec{v}$ para o nariz e isso continuou acontecendo.
- (10) Pesquisadora: Vocês chegaram a alguma conclusão?
- (11) Rafael: A gente chegou à conclusão de que o Bruno está fazendo umas contas muito malucas e transpondo ali no outro (pensamos que ele estava querendo dizer transladando).
- (12) Pesquisadora: Sim, esse comando está “levando” aquele vetor naquele outro, ok. Mas lembre-se que a origem é a mesma se colocássemos uma figura sobre a outra. O que vocês poderiam dizer que aconteceu quando o comando “levou” um vetor no outro? O que mudou ou o que não mudou?
- (13) Bruno: Ele pega o eixo x e faz um negócio maluco, pega o y e faz outro negócio maluco.
- (14) Rafael: Esse negócio maluco que o Bruno está tentando falar é multiplicação.
- (15) Pesquisadora: Então vocês acham que quando utilizamos esse comando “AplicarMatriz” ele está fazendo o que?

(16) Rafael: Multiplicando.

(17) Pesquisadora: Multiplicando o que?

(18) Rafael: Essa matriz por esse vetor (mostrou a matriz A e o vetor $\vec{u}$).

(19) Pesquisadora: E o que está se obtendo como resposta?

(20) Pedro: Um vetor.

(21) Pesquisadora: Que vetor?

(22) Pedro: $\vec{u}^t$ e $\vec{v}^t$.

A partir desse momento a pesquisadora começa a induzi-los a responder à Questão 3.

(23) Pesquisadora: E vocês perceberam alguma relação entre os vetores $\vec{u}^t$ e $\vec{v}^t$ e os vetores $\vec{u}$ e $\vec{v}$ respectivamente?

(24) Rafael: Eles têm a mesma direção, só que sentido diferente no caso do vetor $\vec{u}$.

(25) Bruno: Se pegássemos esse plano inteiro e colocarmos aqui obteríamos que eles estão no mesmo lugar ainda.

(26) Pesquisadora: O que vocês estão querendo dizer com a expressão no mesmo lugar? No caso do vetor $\vec{v}$ e $\vec{v}^t$ esses vetores são o mesmo, então até concordamos com vocês que eles estariam no mesmo “lugar”. Mas no caso dos vetores $\vec{u}$ e $\vec{u}^t$ se olharmos para o ponto extremo dos dois vetores, eles têm o mesmo ponto extremo?

(27) Bruno: Não, eu quis dizer que eles “levam” no mesmo ponto da figura.

(28) Pesquisadora: Ah ok, mas e pensando nos vetores não daria para concluir nada?

(29) Bruno: Iria acontecer a mesma coisa que aconteceu com a figura do cachorro com cada um dos vetores, isso é, iria inverter, deitar um pouco e esticar um pouco.

(30) Pesquisadora: Mas se pensarmos, por exemplo, no vetor $\vec{v}$ aconteceu essas três coisas com o vetor $\vec{v}^t$?

(31) Bruno: Não, parece que não.

(32) Pesquisadora: Vamos devagar, tenta olhar por enquanto somente para esses dois vetores que pedi para vocês analisarem, o que aconteceu quando vocês multiplicaram a matriz por $\vec{u}$ e depois por $\vec{v}$? O que aconteceu com o vetor $\vec{u}^t$ e $\vec{v}^t$ comparado com $\vec{u}$ e $\vec{v}$? Primeiro responde o que aconteceu quando vocês multiplicaram a matriz A pelo vetor $\vec{u}$, o que aconteceu com o vetor $\vec{u}^t$?

(33) Bruno: Eles distorceram igualmente.

(34) Pesquisadora: Distorceram?

(35) Pedro: Não, com o vetor $\vec{v}$ não aconteceu nada, mas com os vetores $\vec{u}$ e $\vec{u}^t$ aconteceu.

(36) Pesquisadora: Então o que aconteceu com o vetor $\vec{u}^t$?

(37) Pedro: Ele expandiu o vetor $\vec{u}$ (aumentou o módulo dele) e inverteu.

(38) Pesquisadora: Ele mudou tudo? Vetor tem módulo, sentido e direção. Vocês falaram que aumentou o tamanho dele (módulo), vocês falaram que ele inverteu (sentido), ou seja, o que está faltando analisar?

(39) Pedro: Sentido.

(40) Pesquisadora: O sentido vocês disseram que inverteu, falta analisar o que? Para ter fundamento falar em sentido o que precisa acontecer com os vetores?

(41) Rafael: É mesmo, não mudou a direção!

(42) Bruno: Não é verdade, ele não está mais a 90° igual ao primeiro.

(43) Pesquisadora: Olhem para as retas que foi pedido no exercício 3 e veja se melhora a sua visualização.

(44) Bruno: Verdade professora, não mudou a direção de nenhum deles.

(45) Pesquisadora: Então agora respondam na folha de vocês, o que o comando está fazendo. Vocês me disseram que este comando está multiplicando. Será que existe alguma semelhança nessas multiplicações?

(46) Pedro: Fiz aqui os cálculos e deu como resposta o vetor $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$.

(47) Bruno: Ah, o vetor $\vec{v}$ saiu de $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ e foi para $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$, está bom beleza! (parece que Bruno havia confundido os vetores, embora o outro vetor não daria o valor que ele havia falado).

(48) Pedro: Enfim, deu o mesmo vetor vocês concordam?

(49) Rafael: Sim. Era para dar mesmo, vimos isso na figura.

(50) Pedro: Professora, isso está certo?

(51) Pesquisadora: Sim, vocês disseram que quando multiplicaram a matriz A pelo vetor $\vec{v}$ deu o próprio $\vec{v}$ e se multiplicar a matriz A por $\vec{u}$ o que vocês vão obter? Vocês conseguem perceber alguma semelhança nesses dois casos?

(52) Bruno: O vetor $\vec{u}$ tem que dar $\begin{bmatrix} 3 \\ -3/2 \end{bmatrix}$.

(53) Pesquisadora: Perceberam alguma relação?

(54) Pedro: No caso do vetor $\vec{v}$ deu para entender o que aconteceu, agora com o vetor $\vec{u}$

(55) Pesquisadora: O que aconteceu geometricamente com esse vetor mesmo? O que vocês observaram no GeoGebra?

(56) Bruno: O $\vec{v}$ continuava igual e o $\vec{u}$ foi esticado e estava no sentido oposto e mantinham a mesma direção.

(57) Pesquisadora: Ah ok, $\vec{u}$ e $\vec{u}'$ tinham sentido opostos e mesma direção. Então agora observem o vetor $\vec{u}'$ que vocês obtiveram e tentem pensar nisso. Como será que você poderia representar esse $\vec{u}'$? Caso vocês não consigam reescrever $\vec{u}'$ pensando no que aconteceu geometricamente, vão seguindo para ver se o que aparece mais para frente ajuda vocês a inferirem alguma coisa.

(58) Pedro: Vamos voltar no que a professora tinha perguntado que era: vocês perceberam alguma relação entre $\vec{v}$ e $\vec{v}'$ e $\vec{u}$ e $\vec{u}'$?

(59) Rafael: Isso nos já respondemos, o $\vec{v}$ vai continuar sempre igual e o $\vec{u}$ vai aumentar e inverter, porém os dois mantêm o sentido.

(60) Pedro: Isso, ele multiplicou o $\vec{u}$ por um escalar negativo e inverteu o vetor; basicamente foi isso. Provavelmente tem alguma coisa aqui, deve ter algum escalar multiplicando esses vetores, que o $\vec{v}$ dá a mesma coisa e o $\vec{u}$ dá diferente. Agora não sei se esse escalar é o determinante da matriz ou se é outra coisa.

(61) Pesquisadora: Pensando no que vocês acabaram de falar, pergunto: que escalar vocês estão multiplicando para obter o mesmo vetor?

(62) Pedro: O vetor $\vec{v}$ por 1.

(63) Pesquisadora: Isso. E nesse outro caso será que existe um escalar que quando vocês multiplicam vai dar esse vetor $\vec{u}'$?

(64) Rafael: A gente já tinha chegado nessa conclusão antes é o $-\frac{3}{2}$. Tínhamos concluído que $\vec{v} = \vec{v}'$ e que $\vec{u}' = \lambda \vec{u}$ e esse, era $-\frac{3}{2}$ e vimos também que esses vetores mantinham a mesma direção. Eu acho que isso de manter a direção deve ser específico com essas duas retas.

(65) Pesquisadora: Vocês vão perceber daqui a pouco que vai ter uma pergunta nesse sentido.

(66) Bruno: Em uma diagonal vai dar 1 e na outra $-\frac{3}{2}$.

(67) Pesquisadora: Só tomem cuidado que vocês estão estudando e tirando conclusões a partir de em um único exemplo, vocês podem tirar alguns indícios, porém cuidado para não afirmar como uma verdade absoluta. Será que com outra matriz essas características se manteriam?

Analisando as mediações da pesquisadora no diálogo apresentado, a primeira constatação a ser feita é que, devido à natureza da atividade, todas as perguntas feitas aos estudantes tinham por objetivo, ainda que implicitamente, gerar discussões que pudessem provocar contribuições de outros integrantes da equipe, além daquele que estava respondendo à questão. Deste modo, a tipologia (T5) permeia toda a mediação realizada. Um exemplo, bastante ilustrativo da intenção da pesquisadora de provocar discussões, é a manifestação (12).

Das 25 mediações da pesquisadora, 18 destinaram-se a auxiliar os estudantes a focarem em elementos-chaves que possibilitariam a dar resposta à questão norteadora proposta que objetivavam solucionar. Podemos perceber então a necessidade de recorrer constantemente a perguntas da tipologia (T8), em razão de os estudantes, com frequência, se dispersarem do objetivo principal, enveredando por discussões secundárias que, embora pudessem em alguns casos serem importantes, naquele momento não se vinculavam diretamente às reflexões visadas. A tipologia (T8) foi manifestada nas seguintes falas: (6), (10), (12), (15), (23), (26), (28), (30), (32), (36), (38), (40), (43), (53), (55), (57), (61) e (63).

A próxima tipologia mais prevalente nas mediações realizadas é a (T3), presente em 14 manifestações, que proporciona destacar relações entre ideias matemáticas e significados e estabelecer vinculações entre estas e suas diferentes representações. Esta tipologia está presente nas seguintes manifestações: (10), (12), (15), (17), (19), (21), (23), (28), (32), (40), (43), (45), (55) e (57). Por exemplo, em (15) a pesquisadora estimula os estudantes a perceberem, por meio da representação geométrica do resultado do emprego do comando “AplicarMatriz”, a qual ideia matemática este resultado está vinculado e, portanto, qual o seu significado matemático. Este tipo de mediação foi bastante valorizado pela pesquisadora, também em razão da natureza da atividade proposta, uma vez que no trabalho com eventos contextualizados, mais do que resultados e técnicas para obtê-los, o foco deve estar na compreensão dos significados matemáticos e no estabelecimento de relações.

Novamente alinhado aos objetivos de se trabalhar com eventos contextualizados, possibilitar aos estudantes articularem, elaborarem ou esclarecerem ideias por meio de questionamentos que os levem a explicar ao mediador o que estão pensando (T4) foi uma ação recorrente nas manifestações da pesquisadora. Esteve presente em 12 delas, a saber: (10), (12), (15), (17), (19), (21), (26), (32), (34), (36), (45) e (55). Podemos citar como exemplo, bastante ilustrativo de questionamentos desta natureza, a intervenção (26).

Ao oportunizar que os estudantes discutam acerca da Matemática, muitas vezes vem à tona dificuldades e imprecisões relacionadas às terminologias vinculadas aos conceitos. É necessário então a intervenção do mediador, objetivando estimular os estudantes a empregarem corretamente a linguagem matemática nas discussões que estão realizando (T2). Sete perguntas

com esta finalidade estão presentes no diálogo transcrito. São elas: (15), (17), (19), (21), (26), (34) e (45). Para ilustrar esse tipo de intervenção, podemos destacar a manifestação (34) na qual a pesquisadora questiona o que os estudantes querem dizer com “distorceram” para que estes busquem o termo matemático adequado para traduzir as conclusões que obtiveram.

Duas tipologias de questões com igual prevalência (três) nas mediações analisadas são (T1) e (T6) que dizem respeito à compilação de informações e ao estabelecimento de afirmações sobre fatos ou procedimentos conhecidos (T1) e ao relacionamento de ideias matemáticas (T6). Estão presentes, respectivamente, nas manifestações (28), (36) e (45); e (32), (51) e (57).

Por fim, perguntas objetivando oportunizar aos estudantes estender o que está sendo discutido em uma dada situação para outras, nas quais poderá recorrer a ideias similares (T7), são evidentes nas manifestações (51) e (63).

O Quadro 4 apresenta uma síntese das frequências das tipologias por questão.

Quadro 4: Frequências das tipologias por questão

	T1	T2	T3	T4	T5	T6	T7	T8	Frequência
6					X				1
10				X	X			X	3
12			X	X	X			X	4
15		X	X	X	X			X	5
17		X	X	X	X				4
19		X	X	X	X				4
21		X	X	X	X				4
23			X		X			X	3
26		X		X	X			X	4
28	X		X		X			X	4
30					X			X	2
32			X	X	X	X		X	5
34		X		X	X				3
36	X			X	X			X	4
38					X			X	2
40			X		X			X	3
43			X		X			X	3
45	X	X	X	X	X				5
51					X	X	X		3
53					X			X	2
55			X	X	X			X	4
57			X		X	X		X	4
61					X			X	2
63					X		X	X	3
67					X				1

Fonte: Os autores

Analisando o Quadro 4, podemos depreender que a maioria das mediações docentes contempla questões de mais de uma tipologia proposta por Boaler e Broader (2004), apresentadas no Quadro 1. Ou seja, ao fazer um questionamento ao estudante, se este é planejado, com clara intencionalidade pedagógica, no sentido de estimulá-lo e de fazer com que supere algum entrave, mas ao mesmo tempo colocá-lo diante de um conflito cognitivo fundamental para propulsionar a sua aprendizagem, esta mediação não pode ser ingênua e as questões não devem exigir apenas uma resposta imediata, o que requer ao formulá-las, articular as diferentes tipologias e, conseqüentemente, os distintos objetivos a elas vinculados. Para que tudo isso seja possível é primordial que o professor tenha pleno conhecimento acerca do objeto matemático com o qual está trabalhando e de quais são seus objetivos ao solicitar que os estudantes respondam às suas perguntas.

5 Considerações finais

A pesquisa relatada nesse artigo, bem como outras investigações que temos realizado acerca da mediação do professor e, especificamente, das perguntas que direciona aos estudantes quando estes realizam uma determinada atividade, têm evidenciado a importância do cuidado na elaboração dessas perguntas, para que essas cumpram efetivamente seus papéis de instrumentos auxiliares para a aprendizagem.

As potencialidades dessas questões formuladas pelo professor poderão ser maximizadas se, ao elaborar uma determinada atividade, o docente refletir atentamente sobre as possíveis dificuldades que os alunos poderão enfrentar e sobre que perguntas faria – e com quais objetivos – diante desses entraves no intuito de provocar nos estudantes um conflito cognitivo adequado cujo enfrentamento possivelmente o levará a uma aprendizagem. Obviamente, durante a realização da atividade, o professor deverá estar atento para que, se for o caso, possa propor outras perguntas não planejadas que, como respostas ao cenário vivenciado pelos estudantes naquele momento, possam também desafiá-los cognitivamente.

Consideramos importante o professor conhecer os diferentes tipos de perguntas que podem ser formuladas aos estudantes e entrar em contato com pesquisas, como esta apresentada nesse artigo, tendo este objeto como foco de análise. É necessário que se conscientize da influência, positiva ou negativa, de suas perguntas na aprendizagem e no desempenho dos estudantes e do quanto esse conhecimento pode impactar em sua prática.

Agradecimento

Queremos deixar aqui registrado nosso sincero agradecimento ao Professor Dr. Gabriel Loureiro de Lima por suas relevantes contribuições no desenvolvimento e análise para a produção desse artigo.

Referências

- Bianchini, B. L., Gomes, E. & Lima, G. L. (2022). Uma abordagem contextualizada da matemática na engenharia: as potencialidades das perguntas dos professores. *Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia*, edição especial, 1-28.
- Brasil. Ministério da Educação. (2019). Resolução CNE/CES n. 2/2019, de 23 de abril de 2019. Institui as Diretrizes Curriculares Nacionais (DCN) do Curso de Graduação em Engenharia.
- Brodie, K., Shahan, E., & Boaler, J. (2004, July). Teaching mathematics and social justice: Multidimensionality and responsibility. In international congress of mathematics education



- (ICME10), Copenhagen, Denmark. CAMARENA, P. La matemática social en el desarrollo integral del alumno. *Revista Innovación Educativa*, v. 14, n. 65, p. 143-149, maio/ago. 2014.
- Camarena, P. (2014). La matemática social en el desarrollo integral del alumno. *Innovación educativa (México, DF)*, 14(65), 143-149.
- Camarena, P. (2017). Didáctica de la matemática en contexto. *Educação Matemática Pesquisa*, 19 (2), 1-26. <https://doi.org/10.23925/19833156.2017v19i2p1-26>
- Camarena, P. (2021). *Teoría de la Matemática em el Contexto de las Ciencias*. Santiago del Estero: EDUNSE.
- Ferruzzi, E. C., & de Almeida, L. M. W. (2013). Modelagem Matemática no ensino de Matemática para engenharia. *Revista Brasileira de Ensino de Ciência e Tecnologia*, 6(1).
- Feuerstein, R., Feuerstein, R. S., & Falik, L. H. (2014). *Além da inteligência: aprendizagem mediada e a capacidade de mudança do cérebro*. Petrópolis, RJ: Vozes.
- Meier, M., & Garcia, S. (2008). *Mediação da aprendizagem: contribuições de Feuerstein e de Vygotsky*. Edição do autor.
- Philot, J. M. (2022). Evento contextualizado: uma proposta de ensino e de aprendizagem de autovalor e autovetor no curso de Engenharia de Controle e Automação e áreas afins.