

## Lançamento de dados: estabelecendo conexões entre probabilidade clássica e frequencial com estudantes do 7º ano do Ensino Fundamental

### Dice rolling: establishing connections between classical and frequency probability with 7<sup>th</sup> year elementary school students

Elisabete Rambo Braga<sup>1</sup>  
Clarissa Coragem Ballejo<sup>2</sup>  
Magnus Cesar Ody<sup>3</sup>

**Resumo:** Este estudo qualitativo investigou o desenvolvimento do letramento probabilístico em estudantes do 7º ano do Ensino Fundamental, por meio de uma sequência de ensino. Fundamentou-se a sequência na perspectiva cognitiva do letramento probabilístico proposto por Iddo Gal, a partir de dimensões que caracterizam um modelo de ensino eficaz de probabilidade. A partir do lançamento de diferentes dados, os estudantes exploraram a dualidade clássico-frequentista, refletindo sobre suas conexões. A análise dos dados revelou que a maior parte desses discentes reconheceu que os eventos eram aleatórios e equiprováveis, mediante o emprego de linguagem adequada. Considera-se que a formalização de conceitos probabilísticos necessita ser desenvolvida a partir de experiências variadas que propiciem a abordagem dos diferentes significados de probabilidade.

**Palavras-chave:** Probabilidade Clássica. Probabilidade Frequentista. Letramento Probabilístico. Ensino Fundamental.

**Abstract:** This qualitative study investigated the development of probability literacy in students in the 7<sup>th</sup> year of Elementary School, through a teaching sequence. This sequence was based on the cognitive perspective of probability literacy proposed by Iddo Gal, based on dimensions that characterize an effective probability teaching model. From the release of different data, students explored the classical-frequentist duality, reflecting on its connections. Data analysis revealed that most of these students recognized that the events were random and equiprobable, through the use of appropriate language. It is considered that the formalization of probability concepts needs to be developed based on varied experiences that provide an approach to the different meanings of probability.

**Keywords:** Classical Probability. Frequentist Probability. Probability Literacy. Elementary School.

## 1 Introdução

A probabilidade vem conquistando espaço e reconhecimento nos documentos curriculares da área da Matemática em diferentes países. Em via de regra, o ensino desse tópico tem sido integrado aos currículos a partir dos primeiros anos escolares (Ballejo, Braga, Gea, 2021). No Brasil, em 1997, o estudo da probabilidade passou a ser recomendado no Ensino Fundamental, mediante as orientações propostas pelos Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN (Brasil, 1997). E, em 2018, a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) normatizou o seu ensino, desde o primeiro ano do Ensino Fundamental (Brasil, 2018).

<sup>1</sup> Pontifícia Universidade Católica do Rio Grande do Sul • Porto Alegre, Rio Grande do Sul – Brasil • ✉ [elisabete.braga@edu.pucrs.br](mailto:elisabete.braga@edu.pucrs.br) • ORCID <https://orcid.org/0000-0003-0807-8729>

<sup>2</sup> Porto Alegre, Rio Grande do Sul – Brasil • ✉ [clarissa.ballejo@acad.pucrs.br](mailto:clarissa.ballejo@acad.pucrs.br) • ORCID <https://orcid.org/0000-0003-4140-9550>

<sup>3</sup> Faculdades Integradas de Taquara • Parobé, Rio Grande do Sul – Brasil • ✉ [magnusody@faccat.br](mailto:magnusody@faccat.br) • ORCID <https://orcid.org/0000-0003-1379-6629>

Parte dos motivos que levam à valorização da probabilidade nos documentos legais passa pela natureza humana em participar de experiências cotidianas aleatórias que exigem a tomada de decisão (Batanero, 2016). O desenvolvimento da cidadania também considera a compreensão e o uso social de elementos probabilísticos que exigem noções de probabilidade, risco e incerteza (Gal, 2005), rompendo aspectos da cultura determinista dada em muitas circunstâncias no ensino da Matemática.

Fischbein (1975) corrobora esse entendimento ao afirmar que o ensino de probabilidade deve ser iniciado o mais cedo possível, dado que as crianças possuem ideias concretas e intuitivas sobre esse assunto. O mesmo autor acrescenta, ainda, que se o ensino de Matemática ficar restrito às situações determinísticas, os estudantes podem apresentar dificuldades futuras na compreensão de situações aleatórias.

No contexto educacional, Gal (2005) reitera ser essencial observar o mundo externo (as demandas do mundo real) no qual fazemos parte, com vistas a estruturar da melhor forma possível o ensino de probabilidade, para que sejam possíveis experiências educacionais curriculares na promoção da aprendizagem.

Nos anos finais do Ensino Fundamental, o documento indica que sejam propostas atividades que contemplem experimentos aleatórios e simulações, de modo a comparar a probabilidade teórica com a frequentista (Brasil, 2018). Além disso, é previsto que a enumeração dos elementos do espaço amostral esteja associada a problemas de contagem (Brasil, 2018).

Tendo em vista tal perspectiva, o presente estudo tem por objetivo responder a seguinte questão de pesquisa: *De que modo uma sequência de ensino que contempla um estudo conjunto das abordagens laplaciana e frequentista de probabilidade pode contribuir para a compreensão desses significados?*

## 2 Referencial Teórico

Os pressupostos teóricos da presente investigação estão organizados em dois tópicos, a saber: o letramento probabilístico, na perspectiva cognitiva, proposto por Gal (2005) e as dimensões que caracterizam um modelo de ensino eficaz de probabilidade, segundo as ideias de Vásquez, Alsina, Pincheira, Gea & Chandia (2019).

### 2.1 O letramento probabilístico na perspectiva cognitiva

A probabilidade integra a Matemática à Estatística. Tem como princípio modelar fenômenos não determinísticos (Viali, 2008), não representando uma característica tangível dos acontecimentos, mas uma percepção que pode ser expressa por uma notação matemática (Gal, 2005). A probabilidade concerne à “quantificação da possibilidade de ocorrência de eventos e deve ser interpretada como uma medida” (Alsina & Vásquez, 2016, p. 46).

Posto isso, seu aprendizado é essencial para preparar os estudantes em relação às exigências da atualidade, no que se refere ao desenvolvimento do pensamento crítico. Tal capacidade proporciona a compreensão e a comunicação de diferentes tipos de informação presentes em fenômenos aleatórios encontrados em diversas situações cotidianas. Em síntese, concerne à promoção do desenvolvimento do letramento probabilístico (Vásquez, 2018).

Define-se letramento probabilístico como sendo a capacidade de acessar, interpretar e comunicar ideias probabilísticas, a fim de que o cidadão participe, com competência, das tarefas que abrangem incerteza e risco no mundo real (Gal, 2012). Na concepção de Gal (2005) o letramento probabilístico é compreendido mediante duas dimensões denominadas elementos do

conhecimento e de disposição. Na primeira, o autor expõe cinco elementos do conhecimento que são necessários para a construção do letramento probabilístico, a saber: grandes ideias, cálculo de probabilidade, linguagem, contexto e questões críticas. A dimensão de disposição/comportamental abrange a postura crítica, às crenças pessoais e atitudes, aos hábitos e sentimentos pessoais no tocante à incerteza e ao risco inseridos num contexto probabilístico.

De acordo com Gal (2005), estas duas dimensões (do conhecimento e de disposição) são fundamentais para que o cidadão, independentemente da profissão exercida, interprete e resolva situações probabilísticas reais, nos âmbitos da saúde, financeiro, ambiental, entre outros domínios. A fim de que haja uma aprendizagem efetiva, é indispensável a articulação entre essas dimensões. O foco instrucional de apenas um ou dois elementos não é suficiente para que o indivíduo desenvolva um comportamento letrado em probabilidade (Gal, 2005).

As grandes ideias abarcam as noções de variação, aleatoriedade, independência, previsibilidade/incerteza. No processo de escolarização, tais fundamentos devem ser compreendidos pelos discentes, não ficando restrito ao uso de símbolos matemáticos ou termos estatísticos.

O cálculo de probabilidade é outra habilidade pertencente aos elementos do conhecimento. Para Gal (2005), os estudantes precisam se familiarizar com os diferentes significados para expressar adequadamente uma estimativa (a partir da sua abordagem). Na sequência, são detalhadas cada uma dessas abordagens.

- *Abordagem intuitiva*: utiliza-se uma terminologia coloquial que expressa o grau de crenças acerca da incerteza associada a essa situação.
- *Abordagem clássica*: a probabilidade é definida como uma fração cujo numerador é o número de casos favoráveis e o denominador é o número de casos possíveis. Esse significado é encontrado em situações particulares e baseia-se em eventos equiprováveis (Batanero, 2005). Devido a sua simplicidade, essa abordagem é predominante no ambiente escolar. É pertinente destacar que a definição laplaciana não pode ser aplicada em experimentos com um número infinito de possibilidades ou em um espaço amostral finito e não simétrico (Vásquez, *et al.*, 2019).
- *Abordagem frequencial*: por meio de muitas repetições de um experimento aleatório, sob condições idênticas, se define a probabilidade como um valor hipotético no qual a frequência relativa tende a se estabilizar (Batanero, 2005). Recomenda-se que, na educação básica, esse enfoque seja explorado, mediante simulações, de modo a estabelecer comparações com o significado Laplaciano. Vale ressaltar que, essa abordagem possui algumas limitações, pois não fornece um valor exato da probabilidade de ocorrência de um determinado evento e, por vezes, é impraticável repetir um mesmo experimento um grande número de vezes, é difícil definir quantas vezes deve ser repetido o experimento e, por fim, não é possível valer-se da abordagem frequentista em eventos com apenas uma única ocorrência (Batanero, 2005).
- *Abordagem subjetiva*: se fundamenta na confiança de uma pessoa sobre a verdade de uma determinada proposição (Vásquez *et al.*, 2019). É marcada pelo julgamento pessoal e pelas informações sobre experiências relacionadas a um determinado resultado.
- *Abordagem axiomática*: vinculada a uma teoria caracterizada pelo rigor matemático. Ressalta-se que apenas algumas particularidades podem ser desenvolvidas na Educação

Básica (Vásquez *et al.*, 2019).

A linguagem consiste no emprego de termos e métodos apropriados na comunicação de ideias sobre o acaso. Gal (2005) ressalta a necessidade de o estudante ter familiaridade e saber argumentar, fazendo uso adequado da linguagem probabilística. Outro elemento cognitivo é o contexto. Esse elemento é caracterizado pela atribuição de significado dos processos probabilísticos no mundo. A compreensão do papel do acaso, da aleatoriedade e da probabilidade e o reconhecimento destes em situações nas quais essas ideias se manifestam no cotidiano é essencial no desenvolvimento da capacidade crítica sobre a realidade e no exercício da cidadania.

As questões críticas correspondem ao quinto elemento cognitivo. Essas abrangem a elaboração de questionamentos frente a uma situação que envolva informações probabilísticas de modo a permitir uma avaliação crítica.

É pertinente evidenciar que, em função do espaço limitado, este estudo focou-se apenas na perspectiva cognitiva do letramento probabilístico de Gal (2005).

## 2.2 As dimensões que caracterizam um modelo de ensino eficaz de probabilidade

Alsina (2012) alerta para o fato de que a escola se propõe a ensinar muitos conteúdos na área da Matemática. No entanto, é comum que os estudantes encontrem obstáculos para aplicar e relacionar esses conteúdos em seus cotidianos. Niss (2003) aprofunda esse entendimento, ao afirmar que o ensino na Matemática está centrado na aquisição de técnicas, cálculos e símbolos e não na aplicação dos conceitos matemáticos. Em contraposição a essa realidade, pesquisadores em Educação Matemática têm direcionado suas pesquisas aos processos matemáticos envolvidos no desenvolvimento de conceitos.

Neste cenário, inserem-se as pesquisas voltadas à análise do conhecimento profissional docente necessário para o ensino de Matemática, mais especificamente de probabilidade, foco deste estudo. Indubitavelmente, o professor necessita ter conhecimento tanto do conteúdo quanto da forma de abordá-lo com seus estudantes.

Para o ensino de probabilidade, dá-se atenção ao modelo proposto por Vásquez *et al.* (2019), no qual são identificadas cinco dimensões:

- *Tarefas probabilísticas* que sejam desafiadoras na construção de novos conhecimentos de probabilidade. Estas devem incentivar o desenvolvimento do raciocínio probabilístico por meio da exploração e reflexão no que concerne à noção de incerteza. Sendo assim, tais atividades necessitam promover o trabalho com os diferentes significados de probabilidade, relacionando essas concepções.
- *Raciocínio probabilístico* com a finalidade de formular, interpretar, obter e validar enunciados e afirmações cuja incerteza se mostra presente. Este aspecto contempla a identificação de situações probabilísticas, caracterizando e analisando concepções e crenças equivocadas.
- *Conexões probabilísticas* relativas a ideias, conceitos, definições, propriedades e procedimentos associados ao acaso e à probabilidade relacionados a outros conteúdos matemáticos. Tais vinculações devem considerar os níveis escolares predecessores e subsequentes.
- *Comunicação probabilística*, por meio da interação, negociação e diálogo na aula, buscando promover a aprendizagem de conteúdos em probabilidade.
- *Linguagem probabilística*, concernente ao acaso e à probabilidade, caracterizada pelas linguagens verbal, numérica, simbólica, tabular e gráfica, usadas na promoção de uma

compreensão apropriada.

Entende-se que as dimensões acima descritas compreendem um parâmetro consistente e potencialmente eficaz para auxiliar os docentes no processo de planejamento de suas aulas para o desenvolvimento do trabalho pedagógico com a probabilidade.

### 3 Abordagem metodológica

O presente estudo é caracterizado como qualitativo. A investigação do fenômeno ocorreu em seu contexto, de modo que os conhecimentos e as práticas dos partícipes foram levados em consideração. Além disso, os dados coletados estão descritos de forma detalhada (Bogdan & Biklen, 1994).

Em consonância com o letramento probabilístico proposto por Gal (2005) e com modelo de ensino apresentado por Vásquez *et al.* (2019), estruturou-se uma sequência de ensino que abordou, de forma conjunta, os significados clássico e frequentista de probabilidade. Entende-se por sequência de ensino um “conjunto de atividades ordenadas, estruturadas e articuladas para a realização de certos objetivos educacionais” (Zabala, 1998, p. 14).

Tal sequência de ensino foi aplicada por um dos autores deste artigo, em uma escola da rede privada da cidade de Porto Alegre, no estado do Rio Grande do Sul. Os participantes dessa pesquisa fazem parte do “Clube de Matemática”, um grupo de estudos que caracteriza uma atividade extraclasse oferecida quinzenalmente, de acordo com o nível de ensino, assim distribuídos: 6º e 7º anos e 8º e 9º anos. O clube tem uma professora de Matemática como responsável e fazem parte dele discentes que, de forma voluntária, objetivam aprofundar seus conhecimentos nessa área do conhecimento.

Na ocasião do desenvolvimento do conjunto de atividades, estavam presentes 18 estudantes do 7º ano, com idades variando entre 12 e 13 anos. Os registros escritos desses discentes e o diário de campo escrito pelo pesquisador foram os instrumentos utilizados para a análise de dados.

A prática descrita na sequência foi realizada no primeiro trimestre letivo do ano de 2024, em dois períodos de aula consecutivos, totalizando cem minutos. No decorrer da atividade, os discentes trabalharam em duplas, contudo cada um realizou individualmente seu registro. Vale ressaltar que o referido estabelecimento de ensino prevê o ensino de probabilidade desde o 1º ano do Ensino Fundamental, sendo que, em sua matriz curricular, o significado clássico deve ser desenvolvido no 5º ano, seguindo a BNCC (2018).

Tendo em vista esse contexto, na próxima seção, são apresentadas as etapas da sequência de ensino, acompanhadas dos questionamentos propostos no material escrito, assim como a análise das respostas dadas a essas questões pelos discentes.

### 4 Descrição e análise das atividades

A sequência de ensino contemplou as orientações sugeridas por Vásquez *et al.* (2019) no que se refere ao emprego de tarefas desafiadoras, dado que foi proposta uma atividade que abrangeu o trabalho conjunto com os significados clássico e frequentista de probabilidade, promovendo a comparação dessas duas abordagens. Na perspectiva de Gal (2005), as abordagens clássica e frequentista devem ser enfatizadas, pelos professores, em seus aspectos formais, dado que essas estabelecem os fundamentos para a aprendizagem de tópicos mais avançados.

A proposta foi dividida em três etapas, sendo que a primeira versou sobre a probabilidade clássica; a segunda abordou a probabilidade frequencial e, na terceira etapa,

estabeleceu-se relações entre elas.

#### 4.1 Abordagem clássica de probabilidade

Como primeira atividade, solicitou-se que cada estudante escolhesse um dado entre os poliedros regulares, apresentados na Figura 1. Considera-se que a ideia de explorar, no referido nível de ensino, o uso de diferentes tipos de dados, constitui-se em uma proposta diferenciada, uma vez que a maioria dos participantes desta pesquisa conhecia, apenas, o hexaedro regular.

**Figura 1:** Dados disponibilizados aos estudantes



**Fonte:** os autores

Inicialmente, a pesquisadora mostrou os dados para a turma, identificando, juntamente com os estudantes, o número de faces associado à nomenclatura - tetraedro regular, hexaedro regular, octaedro regular, dodecaedro regular e icosaedro regular.

No material escrito, solicitou-se que cada discente escolhesse um dado e identificasse o escolhido, respondendo todas as questões com base nessa escolha. Entre as cinco opções de dados, um estudante escolheu o tetraedro regular, quatro escolheram o hexaedro regular, oito o octaedro regular, cinco o dodecaedro regular e cinco o icosaedro regular.

Os estudantes, organizados em duplas, foram orientados a escolher um tipo de dado diferente do seu colega. Tal instrução objetivou o estabelecimento de comparações entre as respostas dadas, a partir do dado escolhido, identificando semelhanças e diferenças, promovendo a comunicação sobre conceitos referentes à probabilidade, como aleatoriedade, independência, variação, espaço amostral, entre outros, conforme preconizam Vásquez *et al.* (2019). Gal (2005) considera as três primeiras concepções como fundamentais para a compreensão de probabilidade e os estudantes necessitam compreender a natureza dessas ideias de modo intuitivo.

A comunicação probabilística, apontada por Vásquez *et al.* (2019), foi contemplada mediante o diálogo estabelecido entre a pesquisadora e a turma, entre os pares, além do emprego da linguagem escrita. Sobre esse aspecto, Gal (2005) assevera que devem ser propostas atividades que promovam a descrição oral e escrita do pensamento e da compreensão dos estudantes sobre probabilidades e certezas e o acompanhamento de como os colegas constroem e registram seus relatos.

O primeiro questionamento escrito consistiu na identificação da preferência por algum número específico ao lançar o dado, acompanhada de uma justificativa para tal escolha. Essa questão objetivou a reflexão acerca da aleatoriedade e a identificação da equiprobabilidade em cada evento associado ao lançamento de dados. Entre os participantes, oito escolheram um número de sua preferência e dez afirmaram não ter predileção. A Tabela 1 mostra as justificativas apresentadas como também sua frequência absoluta.

**Tabela 1:** Distribuição das justificativas para a preferência ou não de um número

<b>Justificativa para a preferência ou não de um número</b>	<b>Quantidade</b>
A - Não tinham preferência por um número, pois todos os valores dos dados têm a mesma chance de serem sorteados.	5
B - Não tinham preferência por um número, porém a justificativa apresentou-se incoerente com o questionamento.	2
C - Não tinham preferência por um número, não apresentando justificativa.	4
D - Apresentaram um número de sua preferência, mediante o emprego do termo “sorte”.	4
E - Apresentaram um número de sua preferência, alegando que era o maior valor do dado escolhido e, portanto, com maior chance de ser sorteado	2
F - Apresentaram um número de sua preferência, alegando gostar do mesmo.	1
<b>Total</b>	<b>18</b>

**Fonte:** Dados da pesquisa

A maioria dos participantes reconheceu que a situação era probabilística, sendo que cinco identificaram que se tratava de eventos equiprováveis. Batanero (2001) atenta para o fato de que a equiprobabilidade não deve ser utilizada para definir aleatoriedade, dado que existem situações probabilísticas que não são equiprováveis. Circunstâncias essas que devem ser observadas pelo professor em seu planejamento, no intuito de abordar tais aspectos nas aulas de Matemática.

O segundo questionamento também teve como objetivo promover a reflexão acerca da equiprobabilidade dos eventos no lançamento dos dados. Ao serem questionados sobre a existência de um número com maior chance de sair no lançamento do dado escolhido, as respostas dos estudantes foram categorizadas segundo mostra a Tabela 2. É pertinente ressaltar que o número de justificativas é maior que a quantidade de respondentes porque três apresentaram mais de um argumento para a referida questão.

**Tabela 2:** Distribuição das respostas quanto à equiprobabilidade dos eventos

<b>Justificativa para a existência ou não de um número com maior chance de sair no lançamento de um dado</b>	<b>Quantidade</b>
A - Afirmaram que todos os números têm a mesma chance de serem sorteados.	7
B - Apresentaram o valor da probabilidade clássica.	5
C - Reconheceram que os tamanhos das faces dos dados eram iguais e, conseqüentemente, as chances eram as mesmas.	4
D - Afirmaram que nenhum número se repete no dado.	3
E - Associaram a ideia de sorte a equiprobabilidade dos eventos	1
F - Assinalaram que a única possibilidade sair um determinado número seria por meio da manipulação do lançamento.	1
<b>Total</b>	<b>21</b>

**Fonte:** Dados da pesquisa

Cabe destacar que sete estudantes, mesmo reconhecendo que todos os números tinham a mesma chance de serem sorteados, apresentaram preferência por algum número (Tabela 1). A Figura 2 exemplifica tal constatação.

Figura 2: Justificativa de um estudante

- 2) Você teria preferência por algum número ao lançar este dado? Justifique. Sim, o número 7, pois é o meu número da sorte.
- 3) Há algum número com maior chance de sair no lançamento deste dado? Justifique. Não, porque tem 12 lados, então há  $1/12$  de chance de cada número sair.

Fonte: Dados da pesquisa

Sobre esse aspecto, Borovcnik (2016) ressalta que o conceito de aleatoriedade pode estar vinculado à ideia de imprevisibilidade, não havendo espaço para o pensamento não determinístico. Nesses casos, pode haver uma predisposição para empregar argumentos alternativos, tais como: sorte ou azar, interferência divina, entre outros.

Ainda no que diz respeito ao significado clássico de probabilidade, fez-se dois questionamentos. Primeiramente, perguntou-se aos estudantes qual a chance de obter a face com o número 1 voltado para cima no lançamento do dado escolhido. E, na sequência, sob as mesmas condições, qual a chance de sair o número 21? Em relação à primeira questão, 14 estudantes responderam corretamente e quatro responderam erroneamente, sendo que dois desses discentes apresentaram inconsistência no cálculo de divisão. No tocante ao número 21, todos os estudantes identificaram que a probabilidade é nula, independentemente do tipo de dado.

Atribui-se os resultados positivos dessas duas últimas questões ao fato de que o cálculo da probabilidade clássica é recomendado desde o 4º ano do Ensino Fundamental. Sobre isso, Gal (2005) atenta para o fato de que, nos livros didáticos, a visão clássica de probabilidade é priorizada.

Para finalizar esta etapa do estudo da abordagem clássica da probabilidade, solicitou-se aos estudantes que completassem uma tabela com as seguintes informações: “Possíveis resultados que podem ser sorteados” (de acordo com o dado escolhido), “Probabilidade” e Resultados esperados em 120 lançamentos do dado”.

A respeito dos registros feitos, constatou-se que, em relação à primeira coluna, todos os estudantes completaram-na de forma correta. Sobre a probabilidade/chance, apurou-se que apenas um único estudante cometeu equívoco, uma vez que relacionou, erroneamente, os numeradores das frações aos valores das faces do dado, tal como pode ser observado na Figura 3.

**Figura 3:** Tabela para estudo da abordagem clássica de probabilidade feita por um estudante

Possíveis valores que podem ser sorteados	Probabilidade (chance)	Resultados esperados em 120 lançamentos do dado (frequência de ocorrência)
1	1/20	6/120
2	2/20	6/120
3	3/20	REPETE TV 20
4	4/20	
5	5/20	
6	6/20	
7	7/20	
8	8/20	
9	9/20	
10	10/20	
11	11/20	
12	12/20	
13	13/20	
14	14/20	
15	15/20	
16	16/20	
17	17/20	
18	18/20	
19	19/20	
20	20/20	
Total:		

Fonte: Dados da pesquisa

Sobre a tabela exemplificada na Figura 3, verificou-se que a maioria da turma - 11 respostas - completou a coluna da probabilidade de maneira correta, optando por registrar usando a notação fracionária. Três estudantes escreveram sob a forma de porcentagem, dois se expressaram com a notação de chance, ao escreverem “1 em 6” e “1 em 12”, e um único discente fez suas anotações em fração e porcentagem.

Em relação à última coluna da tabela, a qual solicitava os resultados esperados em 120 lançamentos, dos 18 estudantes, 15 responderam de maneira correta, de acordo com o dado escolhido. Cabe destacar que três registros utilizaram, de forma equivocada, a notação fracionária, conforme mostra a Figura 3. A respeito disso, entende-se que, embora a ideia esteja de acordo com as circunstâncias, a forma como foi escrita não está correta. Considera-se que isso possa ter ocorrido devido ao fato de que as escolas possam estar focando o ensino de probabilidade mais na abordagem clássica e, portanto, os estudantes acabam por ficarem condicionados a somente este modo de construção de raciocínio ao se tratar de probabilidade.

Batanero e Díaz (2007) apontam a necessidade de oportunizar aos discentes propostas que contemplem o trabalho com os diferentes significados de probabilidade, dado que essas perspectivas estão interligadas, tanto dialeticamente, como na experiência cotidiana. Nesse cenário, enfatiza-se a relevância de o estudo deste tema não ficar restrito a apenas um único significado. Sendo assim, a segunda etapa da sequência de ensino, teve por escopo proporcionar aos estudantes uma atividade de cunho experimental de modo a explorar o significado frequentista de probabilidade.

#### 4.2 Abordagem frequentista de probabilidade

A probabilidade frequencial foi definida, em 1713, por Bernoulli como sendo “o valor

no qual a série de frequências relativas acumuladas do evento se estabiliza” (Coutinho; Figueiredo, 2020, p. 3). Vale destacar que, por se tratar de uma primeira prática voltada ao trabalho com a abordagem frequentista, optou-se por realizar um experimento com um pequeno número de lançamentos. Nesse sentido, Batanero, Henry e Parzysz (2005) atentam para o fato de que é difícil definir quantas repetições de um mesmo experimento são necessárias para se obter uma boa estimativa para a probabilidade de um evento.

Batanero (2019) enfatiza a necessidade de se realizar experimentos que abarquem a ideia da probabilidade frequencial em detrimento da laplaciana, comumente mais explorada, posto que a primeira possui mais aplicações. Sendo assim, nesta segunda etapa de atividades, solicitou-se que cada estudante lançasse o seu dado escolhido 120 vezes e completasse uma tabela com os “Resultados possíveis”, os “Registros dos lançamentos” e o “Total obtido em 120 lançamentos”, conforme exemplifica a Figura 4.

**Figura 4:** Tabela para estudo da abordagem frequentista de probabilidade feita por um estudante

Possíveis valores que podem ser sorteados	Registro do sorteio	Total obtido em 120 lançamentos
1	□□□□	17
2	□□□	12
3	□□□□□	18
4	□□□□	16
5	□□□	15
6	□□□	15
7	□□□	14
8	□□□	13

Fonte: Dados da pesquisa

Num primeiro instante, os discentes acreditaram ser muito cansativa a realização dessa tarefa. Nesse momento, a pesquisadora perguntou à turma o porquê de serem solicitados 120 lançamentos. Rapidamente, os discentes identificaram que 120 é divisível por quatro, seis, oito, doze e vinte e que esses valores correspondem à quantidade de faces de cada um dos dados disponibilizados.

Depois que os estudantes compreenderam a necessidade de lançar o dado 120 vezes, a tarefa foi realizada sem dificuldades. Ainda assim, é válido comentar que três discentes completaram a terceira coluna da tabela utilizando frações.

Novamente, aqui abordou-se a ideia de evento aleatório, além de explorar a independência entre lançamentos sucessivos. Tal entendimento é considerado essencial para garantir que, em experimentos repetidos, um evento seja considerado aleatório (Batanero, 2001). A Figura 4, por exemplo, apresenta o registro dos lançamentos de um dos participantes que escolheu o dado no formato de octaedro regular.

Henry (2010) aponta que há uma tendência a introduzir a noção de probabilidade sob uma abordagem dual, contemplando os significados clássico e frequentista. Em sua concepção, as atividades educativas tradicionais que recorrem, essencialmente, à contagem de casos propiciam uma visão limitada da probabilidade para lidar com situações aleatórias. Contudo, ao explorar somente a abordagem frequentista, limita-se a observação das frequências de

resultados em situações semelhantes, como por exemplo lançamento de dados, moedas, sorteio em urnas, não abrangendo toda a complexidade de fenômenos aleatórios.

Reforça-se a necessidade de construir o conceito de probabilidade, por meio da prática de vários geradores aleatórios, da inserção de vocabulário específico e da resolução de problemas simples (Henry, 2010). Tendo em vista tal compreensão, a última parte da sequência de ensino contemplou a exploração de probabilidade numa perspectiva dual.

### 4.3 Conexões entre as abordagens clássica e frequentista de probabilidade

Batanero (2005) e Vásquez *et al.* (2019) acentuam a necessidade de oportunizar aos estudantes momentos de explorações, análises, elaboração de conjecturas e estabelecimento de generalizações. Tendo em vista tal colocação, a terceira etapa objetivou a comparação entre os resultados obtidos nas abordagens clássica e frequentista.

Para tanto, solicitou-se aos estudantes que preenchessem uma última tabela com informações das etapas anteriores: “Possíveis valores que podem ser sorteados”, “Resultados esperados em 120 lançamentos de um dado” e “Total obtido em 120 lançamentos”, conforme exemplifica a Figura 5.

**Figura 5:** Tabela para estudo comparativo entre abordagem clássica e frequentista feita por um estudante

Possíveis valores que podem ser sorteados	Resultados esperados em 120 lançamentos de um dado	Total obtido em 120 lançamentos
1	10	12
2	10	12
3	10	9
4	10	12
5	10	9
6	10	10
7	10	9
8	10	7
9	10	9
10	10	9
11	10	12
12	10	10

**Fonte:** Dados da pesquisa

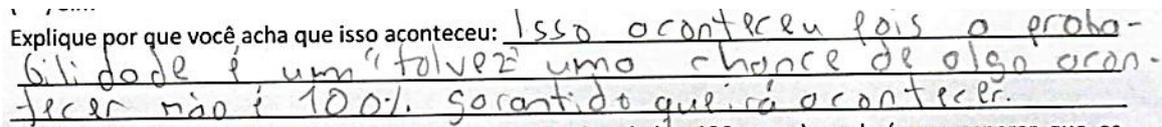
Para concluir esta atividade fez-se dois questionamentos finais. O primeiro deles perguntou se os resultados esperados em 120 lançamentos foram todos iguais aos obtidos nesses lançamentos. Do total de respondentes, 17 afirmaram negativamente e um alegou que sim, ainda que, em seus registros, não houvesse valores iguais.

Pediou-se que justificassem tal resposta no intuito de incentivar e promover conexões probabilísticas que, de acordo com Vásquez *et al.* (2019), envolvem procedimentos relacionados ao acaso e à probabilidade. Do ponto de vista didático, Batanero *et al.* (2005) asseveram sobre a necessidade de que os estudantes, primeiramente, trabalhem com situações concretas, descrevendo-as com vocabulário próprio. Na visão desses autores, essa descrição compreende alguma abstração e simplificação da realidade, dado que são feitas escolhas em relação ao que é relevante na situação-problema apresentada.

Três estudantes escreveram que “a probabilidade não é exata”, dando a ideia de que a probabilidade clássica e a frequentista nem sempre serão iguais, sem entrar no mérito do

número de repetições realizadas. Nessa mesma perspectiva, outros três discentes registraram que “a probabilidade não é 100%, não é uma certeza, é apenas uma chance”, conforme ilustra a Figura 6; três afirmaram que “é apenas probabilidade”; um apontou que a “chance de ser igual não garante que será igual” e um escreveu que a “probabilidade muda na prática”.

**Figura 6:** Registro de estudante comparando probabilidade clássica e frequentista



Fonte: Dados da pesquisa

Quatro estudantes utilizaram a ideia de aleatoriedade para justificar essa diferença de resultados. Sobre esse aspecto, Gal (2005) destaca que descrever um resultado esperado a longo prazo em repetidos lançamentos é um feito notável, ainda que não tenhamos a capacidade de saber, com certeza, o que acontecerá em cada lançamento individual. Esse mesmo questionamento foi respondido de maneira equivocada por um discente e outro não respondeu.

É pertinente ressaltar que tal questionamento proporcionou uma reflexão inicial acerca da dualidade clássico-frequentista. Na primeira abordagem o valor obtido é resultante de um cálculo a priori, sob determinadas condições, enquanto na segunda é uma estimativa a posteriori, a partir de métodos experimentais. Também, vale destacar que seria necessário um número maior de lançamentos para o cálculo da probabilidade frequentista, porém, como esta é uma primeira atividade, não foi considerado oportuno o emprego de tecnologias digitais que possibilitam a simulação desse tipo de experimento para, conseqüentemente, obter uma melhor estimativa da probabilidade procurada.

Por fim, questionou-se, então, se o experimento fosse repetido, poderíamos esperar que os resultados obtidos fossem os mesmos. O termo aleatoriedade esteve presente em 13 respostas; dois registros fornecem indícios de que os estudantes compreenderam a ideia de aleatoriedade ao afirmarem que “Muito provável que saiam outros resultados” e “Até poderia acontecer, mas seria difícil” e em três foi empregado o argumento que era um “jogo de sorte”. Para Azcárate, Cardeñoso e Porlán Ariza (1998), a compreensão de aleatoriedade é algo complexo e concepções incorretas podem estabelecer obstáculos no seu entendimento.

## 5 Considerações finais

A presente investigação teve por objetivo identificar as contribuições oriundas da aplicação de uma sequência de ensino voltada ao estudo conjunto das abordagens clássica e frequentista e pautada nas orientações de Vásquez *et al.* (2019). Num contexto de lançamento de dados de diferentes formatos, estudantes do 7º ano do Ensino Fundamental exploraram a dualidade clássico-frequentista, fundamentada nos cinco elementos do conhecimento, conforme preconiza Gal (2005).

Constatou-se que a referida sequência possibilitou a reflexão dos participantes desta pesquisa, acerca das ideias de aleatoriedade e variação, assim como, a noção de equiprobabilidade. Vale destacar que a maior parte desses discentes conseguiu reconhecer que os eventos eram aleatórios e equiprováveis. Para Gal (2005), os aprendizes devem compreender tais ideias de modo intuitivo, fato que pôde ser observado em seus registros.

Em relação ao cálculo de probabilidade, é pertinente sublinhar que, nas atividades, solicitou-se a comparação do valor da probabilidade laplaciana com os resultados obtidos em 120 lançamentos. A quantidade de 120 lançamentos não possibilitou a validação feita no cálculo

a priori da probabilidade clássica, mas proporcionou o entendimento de que os lançamentos são eventos aleatórios e que o quantitativo de 120 não possibilita que haja compatibilidade entre os resultados. Considera-se positiva tais compreensões, visto que essa foi uma primeira experiência com essa abordagem.

As linguagens oral e escrita foram contempladas durante todo o desenvolvimento da sequência, promovendo, assim, a familiaridade com os termos e, conseqüentemente, o aprimoramento da comunicação sobre probabilidade. A sequência de ensino possibilitou associar as abordagens clássica e frequentista, por meio da análise de um experimento e do cálculo da probabilidade laplaciana. Desse modo, os discentes tornaram-se ativos no trabalho com os elementos do conhecimento proposto por Gal (2005). Ao perpassar por todas as etapas da sequência, os estudantes precisaram interpretar e comparar resultados, para, então, argumentar sobre os questionamentos apresentados. Nesse sentido, as questões críticas correspondem à capacidade de responder as indagações sobre probabilidade.

Considera-se que a formalização de conceitos probabilísticos necessita ser desenvolvida mediante experiências variadas, ao longo da escolarização, propiciando as abordagens dos diferentes significados de probabilidade. Além disso, tais vivências devem contemplar os elementos do conhecimento e de disposição de modo integrado, dado que o foco instrucional que abarque um ou dois elementos não é considerado satisfatório para desenvolver um comportamento probabilisticamente letrado (Gal, 2005).

Tendo em vista que a equiprobabilidade é um obstáculo para a compreensão da probabilidade, quando restringe-se a prática educativa para situações equiprováveis, sugere-se para estudos futuros, o desenvolvimento de pesquisas que explorem os significados de probabilidade em contextos não equiprováveis.

## Referências

- Alsina, Á. (2012). Más allá de los contenidos, los procesos matemáticos en educación infantil. *Edma 0-6: Educación Matemática en la Infancia*, 1(1), 1-14.
- Alsina, A. & Vásquez, O. C. (2016). De la competencia matemática a la alfabetización probabilística en el aula: elementos para su caracterización y desarrollo. *UNIÓN – Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 12(48), 41-58.
- Azcárate, P., Cardeñoso, J. M. & Porlán Ariza, R. (1998). Concepciones de futuros profesores de primaria sobre la noción de aleatoriedad. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*, 16(1), 85-97.
- Ballejo, C. C., Braga, E. R. & Gea, M. M. (2021). Probabilidade nos primeiros anos escolares: um estudo comparativo dos currículos propostos pela Espanha e pelo Brasil a partir do NCTM. In: *Anais do 5º Fórum Nacional sobre currículos de Matemática: Práticas Educativas em Pesquisa e Educação Matemática* (pp. 1-13). Canoas, RS.
- Batanero, C. (2001). *Didáctica de la Estadística*. Granada: Departamento de Didáctica de la Matemática.
- Batanero, C. (2005). Significados de la probabilidad en la educación secundaria. *Relime*, 8(3), 247-263.
- Batanero, C., M. Henry & B. Parzys (2005), The nature of chance and probability, In: Graham A. Jones (Ed.). *Exploring Probability in School: Challenges for Teaching and Learning* (pp. 16-42), New York Springer,.
- Batanero, C. & Diaz, C. (2007). Probabilidad, grado de creencia y proceso de aprendizaje. *XIII*

*Jornadas Nacionales de Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas*. Granada, España.

- Batanero, C. (2019). Treinta años de investigación en educación estocástica: Reflexiones y desafíos. En J.M. Contreras, M. M. Gea, M. M. López-Martín & E. Molina-Portillo (Eds.), *Actas del Tercer Congreso Internacional Virtual de Educación Estadística* (pp. 1-15). Granada: Grupo FQM-126.
- Batanero, C. (2016). Posibilidades y Retos de la enseñanza de la probabilidad en la educación primaria. *Actas del 6 Congreso Uruguayo de Educación Matemática*. Montevideo, Uruguay.
- Bogdan, R. C. & Biklen, S. K. (1994). *Investigação qualitativa em Educação: uma introdução à teoria e aos métodos*. Porto.
- Borovcnik, M. (2016). Probabilistic thinking and probability literacy in the context of risk. *Educação Matemática Pesquisa*, 18(3), 1491-1516.
- Brasil. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental (1997). *Parâmetros Curriculares Nacionais*. Brasília, DF.
- Brasil. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental (2018). *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília, DF.
- Coutinho, C. Q. S. & Figueiredo, A. de C. (2020). Simulação computacional: aspectos do ensino da probabilidade frequentista. *Zetetike*, 28, e020017.
- Fischbein, E. (1975). *The intuitive sources of probability thinking in children*. Dordrecht: Reidel.
- Gal, I. (2005). Towards "probability literacy" for all citizens: building blocks and instructional dilemmas. In: G. A. Jones (Ed.), *Exploring Probability in school: Challenges for teaching and learning*. (p. 39-63). New York: Springer.
- Gal, I. (2012). Developing probability literacy: needs and pressures stemming from frameworks of adult competencies and mathematics curricula. In: *Proceedings of the 12<sup>th</sup> international congress on mathematical education*. Seoul: Springer Open.
- Henry, M. (2010). Évolution de l'enseignement secondaire français en statistique et probabilités. *Statistique et Enseignement*, 1(1), 35-45.
- Niss, M. (2003). Mathematical competencies and the learning of mathematics: The Danish KOM project. In: *Proceedings of the 3<sup>rd</sup> Mediterranean conference on mathematical education* (pp. 115-124).
- Vásquez, C. (2018). Surgimiento del lenguaje probabilístico en el aula de educación primaria. *REnCiMa*, 9(2), 374-389.
- Vásquez, C., Alsina, A., Pincheira, N., Gea, M.M. & Chandia, E. (2019). Una primera aproximación a la caracterización de un modelo para una enseñanza eficaz de la probabilidad a partir de las primeras edades. En J. M. Contreras, M. M. Gea, M. M. López-Martín y E. Molina-Portillo (Eds.), *Actas del Tercer Congreso Internacional Virtual de Educación Estadística* (pp. 1-10). Granada: Grupo FQM-126.
- Viali, L. (2008). O ensino de Estatística e Probabilidade nos cursos de Licenciatura em Matemática. *Anais do XVIII Simpósio Nacional de Probabilidade e Estatística*. Estância de São Pedro, SP.



Zabala, A. (1998). *A prática educativa: como ensinar*. Porto Alegre: Artmed.