Formas de generalização no processo formativo de professores envolvendo elementos do conhecimento algébrico nos anos iniciais

Forms of generalization in the teacher training process that include elements of algebraic knowledge in early school years of school

Vanessa Dias Moretti[1]
Iraji de Oliveira Romeiro[2]

Resumo: O presente artigo tem por objetivo apresentar as formas de generalização manifestadas pelos professores dos anos iniciais ao se envolverem com situações desencadeadoras de aprendizagem contendo elementos do conhecimento algébrico. Baseada no conceito de pensamento teórico e na Teoria da Objetivação, a investigação ocorreu por meio de um experimento formativo nos anos de 2018 e 2019 e contou com 18 professores que ensinam matemática nesta etapa de ensino. A análise revelou que situações que envolvem problemas que permitem a resolução por meio de contagem propiciam uma generalização aritmética, enquanto problemas em que a contagem não é suficiente para resolução favorecem a generalização algébrica. A pesquisa visa contribuir para a formação de professores e o desenvolvimento do pensamento algébrico.

Palavras-chave: Pensamento algébrico. Generalização. Formação de professores dos anos iniciais. Teoria da Objetivação. Pensamento teórico.

Abstract: The aim of this article is to present the forms of generalization manifested by first-year teachers when dealing with learning-triggering situations that include elements of algebraic knowledge. Based on the notion of theoretical thinking and the theory of objectification, the investigation was carried out through a formative experiment in 2018 and 2019, involving 18 teachers who teach mathematics at this level. The analysis showed that situations with problems that can be solved by counting provide arithmetic generalization, while problems where counting is not sufficient for the solution favor algebraic generalization. The research aims to contribute to teacher training and the development of algebraic thinking.

Keywords: Algebraic thinking. Generalization. Training of first years teachers. Objectification Theory. Theoretical thinking.

1 Introdução

O desenvolvimento do pensamento algébrico vem ganhando destaque na comunidade científica brasileira em pesquisas nos últimos anos, em especial, após a publicação da BNCC (Brasil, 2018), que indicou explicitamente a álgebra como objeto do conhecimento a ser desenvolvido desde os anos iniciais.

Compreendendo a importância da organização do ensino de maneira intencional e consciente para o desenvolvimento do pensamento algébrico, e frente a temática recente nos documentos oficiais, refletimos ser necessário uma formação de professores dos anos iniciais com vistas a favorecer práticas pedagógicas que possam potencializar o desenvolvimento desse modo especial de pensar nos estudantes dos anos iniciais.

Diante dessa necessidade, o Grupo de Estudos e Pesquisa em Processos Educativos e

[1] Universidade Federal de São Paulo – UNIFESP • São Paulo, São Paulo — Brasil • ✉ vanessa.moretti@unifesp.br • https://orcid.org/0000-0003-2435-5773.
[2] Secretaria Estadual de Educação de São Paulo – SEDUC/SP • Guarulhos, São Paulo — Brasil • ✉ irajioliveira@gmail.com • https://orcid.org/0000-0002-1633-9872.

ISSN 2764-3158

Perspectiva Histórico-Cultural (GEPPEDH-Mat)[3], desenvolveu uma pesquisa coletiva junto a professores que ensinam matemática nos anos iniciais do Ensino Fundamental, intitulada "O desenvolvimento do pensamento algébrico nos anos iniciais". A pesquisa coletiva ocorreu entre os anos de 2018 e 2019 com 18 professores que atuavam na rede municipal da cidade de Guarulhos/SP. Como desdobramento desse movimento coletivo, o presente artigo apresentará um recorte de uma pesquisa de doutorado (Romeiro, 2023) que teve como objetivo investigar as formas de generalização manifestadas por professores dos anos iniciais ao se envolverem com situações desencadeadoras de aprendizagem, na perspectiva da Atividade Orientadora de Ensino (Moura, Araújo & Serrão, 2018), contemplando elementos do conhecimento algébrico. Tal objetivo delineado na pesquisa se deu diante da importância que os documentos oficiais e pesquisas relacionadas ao tema (Brasil, 2018; Radford, 2018; Vale & Barbosa, 2019; Proença, 2019, entre outros) atribuem à generalização quando se trata do desenvolvimento do pensamento algébrico.

Compreendendo que a generalização está inserida no movimento do pensamento em geral, e do pensamento algébrico em particular, para o desenvolvimento da pesquisa nos pautamos no conceito de pensamento teórico a partir dos trabalhos de Davídov (1988) e na Teoria da Objetivação de Luis Radford (2021) no tocante às contribuições teóricas e metodológicas envolvendo a temática estudada.

A análise da realidade em movimento, que permite ao objeto mostrar o que é (Vigotski, 2007), deu-se pela análise multimodal baseada nos princípios da Teoria da Objetivação (Radford, 2015; Moretti & Radford, 2021), uma vez que compreendemos que os sujeitos manifestam o pensamento por meio de diversos meios semióticos.

Para os fins desse artigo, focaremos na apresentação do processo de generalização no movimento do pensamento dos professores buscando identificar em suas manifestações o tipo de generalização envolvendo o conhecimento algébrico. Assim, o texto parte de uma discussão da fundamentação teórica que busca apresentar as contribuições da Teoria da Objetivação (Radford, 2021) e do conceito de pensamento teórico na perspectiva da Teoria Desenvovimental (Davídov, 1988), e como essa base teórica contribui para nossa compreensão sobre o pensamento algébrico e a generalização. Logo em seguida, apresentaremos o movimento metodológico da pesquisa, baseada na análise multimodal semiótica da TO e na sequência a realidade apreendida, de modo a alcançar o foco deste artigo. Por fim, nas considerações finais, buscaremos evidenciar as contribuições da pesquisa para a educação matemática envolvendo a formação de professores e o pensamento algébrico.

2 Formas de Generalização no pensamento matemático envolvendo elementos do conhecimento algébrico.

Diante da nossa compreensão de que a álgebra surge a partir da necessidade humana que está em constante movimento, sendo produzida e modificada a partir da realidade histórico e cultural de um povo, assim como os diversos conceitos matemáticos presentes na atualidade, embasamos nossa pesquisa na perspectiva histórico-cultural em geral, e no conceito de pensamento teórico e na Teoria da Objetivação em particular.

A Teoria da Objetivação (TO) se constitui como uma teoria contemporânea que estuda os processos de ensino e aprendizagem em sala de aula, e tem como elementos fundamentais o saber, o conhecimento e a aprendizagem (Radford, 2021). Em contraposição às teorias contemplativas ou cognitivistas do processo de aprendizagem, a TO defende que tal processo

[3] Linha de pesquisa Educação Matemática. Mais informações do grupo disponíveis no Diretório de Grupos de Pesquisa da CAPES, no endereço http://dgp.cnpq.br/dgp/espelhogrupo/35714.

ISSN 2764-3158

se dá a partir da atividade humana, na perspectiva de Leontiev (1978), o que chama de labor conjunto. O labor conjunto na TO, se difere de simples interações entre sujeitos, uma vez que inclui necessariamente, o trabalho conjunto entre professores e estudantes que vivem juntos, lado a lado, o processo de materialização do saber em forma de conhecimento de forma consciente com um objetivo comum. Além de conter o motivo, o objetivo e o objeto coincidentes, que é próprio da atividade humana (Leontiev, 1978), o labor conjunto, na perspectiva da TO, também insere a ética comunitária que envolve três aspectos: o respeito, o compromisso e o cuidado com o outro (Radford, 2021).

Nesta perspectiva teórica, não é possível que o pensamento se dê em uma mente isolada e de forma espontânea, pois, o pensamento é uma relação entre a prática social corpórea, o uso de signos, e a utilização de artefatos humanizados, que só se dão quando envolve a alteridade, isto é, a relação consigo e com o outro.

Davídov, nesta mesma linha defendida por Radford, diz que o pensamento "é o movimento de formas de atividade da sociedade historicamente constituídas e apropriadas por aqueles [os sujeitos da sociedade]" (Davýdov, 1982, p. 279, tradução nossa). Sendo assim, o pensamento envolve uma relação dialética entre o significado cultural e o sentido pessoal, e só ocorre na conexão entre os sujeitos e sua cultura, sendo a base de todo conhecimento humano, a atividade objetal-prática, produtiva: o trabalho".

Concluímos que tanto para Radford como para Davídov a atividade humana é o que possibilita a compreensão dos objetos presentes no mundo de forma consciente, podendo o sujeito atuar com ele no mundo em que vive. Porém, na TO é possível identificar de forma explícita o papel da atividade humana no processo de ensino e aprendizagem como unidade dialética, uma ação conjunta de professores e alunos, de modo a possibilitar a constituição do sujeito humano, ético, crítico, político, poético.

Em seus estudos, Davídov (1988) caracteriza dois tipos de pensamento que pode ser desenvolvido na prática pedagógica escolar: o pensamento empírico e o pensamento teórico. O pensamento empírico, no contexto da Teoria do Ensino Desenvolvimental, privilegia as qualidades aparentes do objeto por meio da classificação de características comuns entre eles, "[...] reconhece como comuns as qualidades parecidas em todos os objetos do mesmo tipo e classe" (Davídov, 1988, p. 100). A partir dessa classificação, induz-se um modo abstrato e geral de constituição do objeto, uma generalização empírica. A generalização empírica determina uma forma geral de solução de alguns tipos de situações particulares, apresentadas inicialmente por meio de modelos. Segundo Davídov (1988) este tipo de pensamento é limitado, pois, não analisa o objeto em sua plenitude e universalidade, não considera as tensões e contradições de produção histórica desse objeto, observando somente o processo lógico, pronto e acabado, como se o objeto sempre tivesse existido do modo no qual foi apresentado.

Já o pensamento teórico para o autor, é o "processo de idealização de um dos aspectos da atividade objetal-prática, a reprodução nela, das formas universais das coisas" (Davídov, 1988, p. 125). Este pensamento inclui as relações internas e externas do objeto do conhecimento, o seu processo de produção lógico-histórico, buscando revelar sua essência, que para o autor é "a conexão interna que, como fonte única, como base genética, determina todas as outras especificidades particulares do todo" (Davídov, 1988, 147). Esse tipo especial de pensamento segue dois percursos dialéticos: o de redução do concreto caótico ao abstrato e o de ascensão do abstrato ao concreto real. É no movimento de ascensão que está inserida a generalização teórica, o que possibilita revelar a essência do objeto e, a partir dela, resolver diversos problemas particulares de mesma essência. O movimento do pensamento teórico é mediado por elementos do próprio conceito de modo a compreendê-lo de forma consciente

ISSN 2764-3158

podendo usá-lo para entender a agir no mundo.

Na TO o encontro com o saber é o objetivo do processo de ensino e aprendizagem na atividade em movimento (Radford, 2021). Ao mesmo tempo que a atividade entra em movimento, o pensamento também entra em movimento. Sendo assim, defendemos que na busca do encontro com o saber de modo a desenvolver as máximas potencialidades humanas, o pensamento entra em movimento. Sendo a objetivação "processos sociais de, progressivamente tomar consciência dos sistemas histórico-culturais de pensar e fazer – algo que gradualmente percebemos e ao mesmo tempo dotamos de significado" (Radford, 2021, p. 109), compreendemos que o percurso do pensamento deve seguir o movimento do pensamento teórico.

No processo de objetivação, mediado pela atividade humana, é possível materializar o saber, que conforme Radford (2021), é potencialidade humana e o conhecimento o singular desenvolvido deste saber. Entendemos que o conhecimento, enquanto um singular desenvolvido do saber, possui uma essência interna, que pode ser revelada por meio da atividade, do labor conjunto, reproduzindo-a em outras situações que contenham a mesma essência. Conforme descrevemos, no processo de objetivação, o pensamento também entra em movimento, que, por sua vez, é mediado por elementos do conceito. Diante disso, consideramos que o encontro com o saber, apesar de não o refletir integralmente, é mediado pelos elementos que constituem o conceito deste saber.

Compreendendo que a álgebra é um saber produzido no percurso histórico e cultural humano, e que pode ser materializado na forma de conhecimento, defendemos, assim como Santos (2020) e como Moretti, Virgens e Romeiro (2021), que *o pensamento algébrico é o pensamento teórico mediado por conceito algébrico*. Sendo assim, o pensamento algébrico inclui a generalização teórica do conceito.

Pesquisas recentes sobre o tema (Lins & Gimenez, 1998; Radford, 2018; Jungbluth, Silveira & Grando, 2019; Barbosa, 2019; Proença, 2019, entre outros), revelam diferentes compreensões sobre a relação entre o pensamento algébrico e as diferentes formas de generalização, principalmente no que tange à generalização aritmética e a generalização algébrica envolvendo conhecimentos algébricos.

Na Teoria da Objetivação, a generalização algébrica, própria do movimento do pensamento algébrico, caracteriza-se pela indeterminação, pela analiticidade e pelos modos de representar ou simbolizar essas quantidades indeterminadas e suas operações, isto é, uma "maneira analítica na qual pensamos quando pensamos algebricamente" (Radford, 2018, p. 9). Para o autor, a indeterminação está relacionada às variáveis, termos desconhecidos, parâmetros, entre outros. A analiticidade é quando se lida com as quantidades indeterminadas como se fossem determinadas, isto é, opera-se com termos desconhecidos e suas operações, como se os termos fossem conhecidos. Os modos de representação idiossincráticos envolvem os meios semióticos de explicar e representar a generalização e o pensamento (Radford, 2018). Essa forma de representação pode ser tradicional, usando o simbolismo, ou não tradicional, usando outros meios semióticos como a linguagem natural.

Radford (2018) complementa que ao buscar o resultado de uma situação contendo elementos do conhecimento algébrico por meio de tentativa e erro ou por meio de indução, a generalização não é considerada algébrica, uma vez que a atenção e a atividade estão voltadas para "achar" um modo geral de resolver o problema ou "achar uma fórmula", e não deduzir, por meio da analiticidade o modo geral de resolvê-lo. O autor explica que, ao resolver o problema por tentativa e erro ou por indução, a generalização fica no campo da aritmética, isto é, uma generalização aritmética. Consideramos que ao se tratar do saber algébrico, esta forma

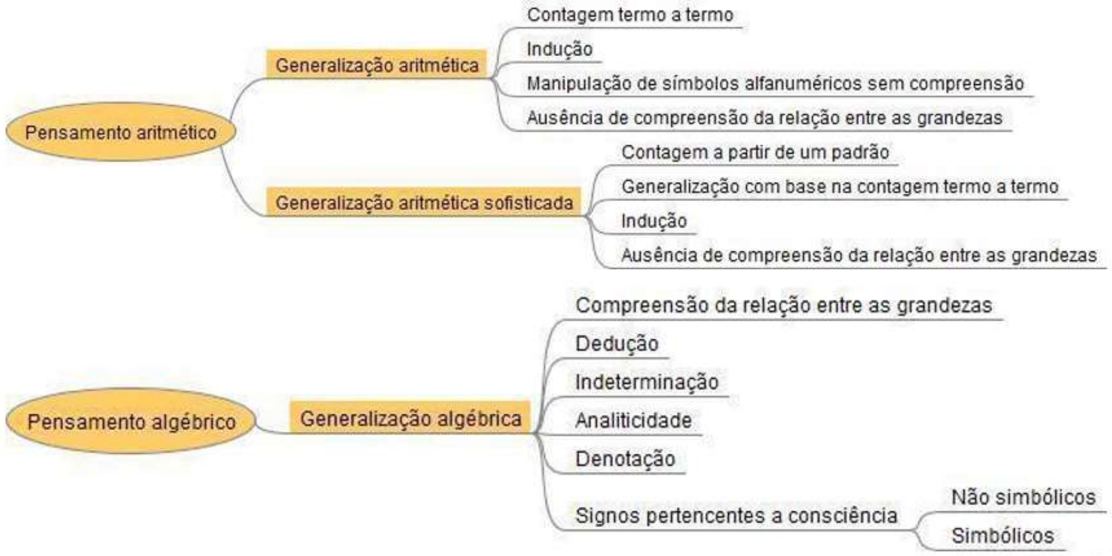
ISSN 2764-3158

de generalização pode ser classificada como uma generalização pertencente ao pensamento empírico e não ao pensamento algébrico.

Vergel, Radford e Rojas (2022) sinalizam que existe ainda um outro modo generalizar situações, principalmente abrangendo sequências, que chamam de "generalização aritmética sofisticada". Conforme os autores, essa forma de generalização parte de uma proto-analiticidade, quer dizer, um modo primário de analiticidade que não tem em seu processo a dedução para se chegar a uma generalização do objeto envolvendo os elementos do campo algébrico. Este tipo de generalização, apesar de se apresentar de modo sofisticado, fica no campo da aritmética, uma vez que ela parte de dados aritméticos por meio da contagem para estabelecer um modo geral de definir qualquer termo de uma sequência.

A figura 1 apresenta uma síntese da nossa compreensão envolvendo a relação entre o pensamento e o processo de generalização contendo elementos conceituais algébricos.

Figura 1: Relação entre pensamento e tipos de generalização envolvendo elementos conceituais algébricos



Fonte: Romeiro (2023, p. 95)

Complementarmente, Radford (2018) relaciona as diferentes formas de manifestação da generalização algébrica com o que ele chama de camadas de generalidade. Para o autor, existem três níveis de generalização no desenvolvimento do pensamento algébrico: generalização factual, generalização contextual e generalização simbólica, que são percebidas progressivamente pelos estudantes.

A generalização factual, segundo Radford (2018), é quando a compreensão da forma geral de um conceito, no caso dos seus estudos, a forma geral de um padrão é representada por meio de fatos, de exemplos particulares, tendo como meio semiótico a linguagem natural, gestos, ritmos ou outros recursos, de modo que "a fórmula é expressa através de instâncias particulares da variável" (Radford, 2018, p. 14). A generalização contextual, se dá em um novo percurso do movimento do pensamento algébrico, e tende a desvencilhar-se do caráter particular manifestada na generalização factual, seguindo para uma representação semiótica mais geral (Moretti, Virgens & Romeiro, 2021), isto é, "a fórmula é expressa em um nível mais geral; as variáveis e sua relação tornam-se explícitas e são referidas por meio de elementos contextuais - divisões linguísticas espaciais" (Radford, 2018, p. 22-23). Já a generalização simbólica utiliza meios semióticos simbólicos, principalmente os literais, para representar o modo geral de formação de uma sequência. Este modo de pensar e generalizar, se apresenta num campo do pensamento algébrico bastante sofisticado, de modo que situações particulares não são mais necessárias, tanto para compreender como para explicar a sequência e seu padrão, isto é, este nível de generalização "muda a forma de pensar e ser do sujeito, dentro do contexto do pensamento algébrico" (Moretti, Virgens & Romeiro, 2021, p. 1468).

Foi diante dessa compreensão de generalização envolvendo o conhecimento algébrico, que pautamos nosso olhar para análise da realidade produzida junto aos professores no processo formativo. No próximo item, apresentaremos o percurso metodológico da pesquisa.

3 O movimento da pesquisa: o percurso metodológico

A partir dos aspectos teóricos que deram suporte à pesquisa desenvolvida, identificamos não ser possível verificar e explicar o fenômeno por meio de ações pontuais ou utilitaristas da ciência, mas sim, por meio da práxis humana, e em particular, da práxis docente, que inclui a relação dialética entre a teoria e a prática materializadas no fazer docente. Sendo assim, escolhemos o método histórico-dialético em uma perspectiva semiótica multimodal da atividade humana, que busca compreender o pensamento e as relações humanas, no movimento, na atividade, na coletividade, nas diversas formas de manifestação semiótica. Para produção dos dados e posterior análise crítica, elaboramos de modo conjunto com os pesquisadores do GEPPEDH-Mat um experimento formativo (Davídov, 1988) que buscou colocar os professores em atividade de ensino e de aprendizagem de modo a identificar as formas de generalização manifestadas por eles envolvendo os elementos conceituais algébricos.

A parte experimental da pesquisa ocorreu no segundo semestre de 2018 e no segundo semestre de 2019, contando com 20 encontros presenciais no momento de hora-atividade[4] dos professores. Além dos encontros presenciais, também foram propostas duas leituras a serem realizadas em local de livre escolha dos professores e posteriormente discutidas nos encontros presenciais. Participaram deste momento 18 professores da rede pública municipal da cidade de Guarulhos que ministravam aulas para os anos iniciais do Ensino Fundamental à época, e consequentemente, ensinavam matemática. Dentre os professores, alguns eram chamados de especialistas, pois ministravam disciplinas específicas como Educação Física e Artes. A maior parte dos professores tinham licenciatura em pedagogia e somente uma professora, que não participou de todo experimento, tinha formação específica na licenciatura em matemática. Todos assinaram o Termo de Livre e Esclarecido, bem como autorizaram o uso de imagens e depoimentos. Os nomes apresentados neste artigo são fictícios garantindo o anonimato dos professores participantes.

Os professores foram separados intencionalmente pelos pesquisadores em quatro grupos que se mantiveram até o final do experimento. Para que fosse possível analisar os diversos meios semióticos em uma perspectiva multimodal (Radford, 2015; Moretti & Radford, 2021), os encontros foram filmados usando cinco câmeras, sendo uma para cada grupo e uma para percepção geral, e quatro gravadores, um para cada grupo. Também foram fotografadas as produções dos professores realizadas na lousa ou em momentos que os pesquisadores julgavam importante. Além disso, eram disponibilizadas aos professores, folhas para registro individual e também registros coletivos. Todos os dados foram são armazenados digitalmente em pastas organizadas por data e tipo de arquivo. Para uma melhor compreensão dos dados, o áudio e o vídeo foram sincronizados.

Os dados sincronizados foram analisados pelo pesquisador em três momentos, conforme indicado por Radford (2015). Inicialmente foram separados e transcritos os "segmentos salientes", isto é, as passagens que parecem conter evidências de aprendizagem, de objetivação

[4] Hora Atividade é um espaço de formação em serviço dos professores da Rede Municipal de Guarulhos.

(Radford, 2015, p. 561, tradução nossa). Após esta separação e transcrição inicial, estes segmentos foram analisados à luz da teoria, considerando todos os modos de manifestação semiótica que, por fim, foram inseridos no contexto da transcrição, revelando o fenômeno estudado, isto é, as formas de generalização manifestadas pelos professores, em movimento. Sendo assim, a análise dos dados produzidos não foi realizada de maneira isolada, observando um ou outro aspecto dos dados, mas sim, todos os aspectos foram interrelacionados de modo a possibilitar revelar um modo de pensar ou o processo de objetivação. É neste sentido, que a TO se apresenta como um método multimodal de produção e análise de dados.

Para organização das ações em um cenário coletivo entre os pesquisadores participantes e professores em formação, foram elaboradas cinco situações desencadeadoras de aprendizagem - SDA (Moura *et al*., 2010) envolvendo elementos conceituais do pensamento algébrico, sendo eles: a aritmética generalizada e as variáveis, envolvendo o campo de variação, incógnitas e as relações funcionais. A segunda parte do experimento demandou também dos professores a análise das potencialidades e fragilidades de alguns materiais didáticos utilizados no cotidiano escolar para desenvolvimento do pensamento algébrico nos estudantes. Ao final, os professores foram convidados a elaborar uma proposta de ação pedagógica junto aos estudantes.

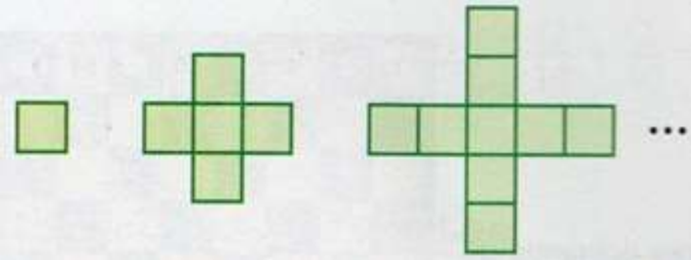
Na análise da realidade apreendida no experimento formativo, em uma perspectiva semiótica, o olhar da pesquisadora na pesquisa voltou-se para a identificação e explicação das formas de generalização manifestadas quando os professores são confrontados por situações envolvendo o conhecimento algébrico, vislumbrando o desenvolvimento do pensamento algébrico. No próximo item apresentaremos um recorte da análise de tais manifestações identificadas no processo formativo dos professores que ensinam matemática nos anos iniciais.

4 Formas de generalização manifestadas por professores envolvendo elementos do conhecimento algébrico nos anos iniciais.

A análise dos dados na pesquisa foi estruturada em quatro partes que refletem a organização do experimento. Na referência aos dados, seguiremos os diálogos usando o número sequencial crescente, a transcrição da fala dos professores e alguns comentários interpretativos da pesquisadora.

Para fins deste artigo, vamos apresentar trechos da realidade apreendida inserida no momento denominado: "Formas de generalização em situações envolvendo sequências", por meio da situação desencadeadora de aprendizagem "A fantástica aventura de Leo". Essa SDA foi trabalhada em dois encontros e continha uma história virtual com três questões com complexidade progressiva tendo como elementos conceituais essenciais a relação entre as grandezas, a variável e a relação funcional. Essa SDA apresentava uma sequência figural recursiva, conforme a figura abaixo:

Figura 2: Sequência figural recursiva apresentada na SDA "A Fantástica Aventura de Leo"



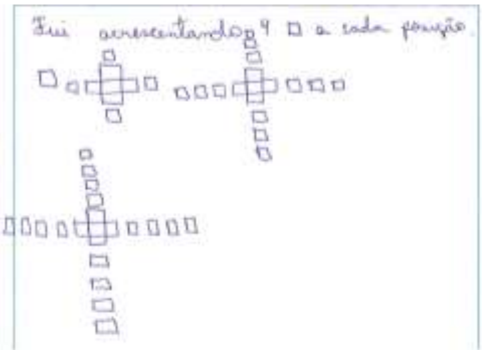
Fonte: Arquivo dos pesquisadores do GRUPO (Romeiro, 2023, p.120)

ISSN 2764-3158

A história virtual contava a história de 5 meninos que se perderam em uma terra esquisita chamada "Papelândia" e para sair de lá era necessário digitar um código no elevador. O código dizia que a cada 5 posições saia uma pessoa de Papelândia. Porém, todas pessoas que entrassem juntas teriam que sair ao mesmo tempo, uma vez que o elevador se abriria somente uma vez.

A primeira questão versou em encontrar quantos quadradinhos[5] que havia no 5º termo da sequência. Foi disponibilizado aos professores cubinhos do material dourado que poderiam servir como instrumento concreto auxiliar. Os professores iniciaram a resolução da SDA observando os dados concretos e sensoriais da sequência, sendo que alguns utilizaram o material concreto para apoiar na continuação dos próximos termos. Todos os professores, resolveram a primeira questão por meio da contagem termo a termo e generalizaram aritmeticamente o padrão da sequência, isto é, que a cada termo se acrescentava 4 quadradinhos, conforme registro da professora Eloísa.

Figura 3: Resolução da primeira questão da SDA pela professora Eloísa



Fonte: Eloísa, 5, RI

O modo de generalizar apresentado pela professora Eloísa e demais professores, mostra que o padrão foi encontrado, porém, a dedução da estrutura não foi revelada no pensamento dos professores, não revelando a analiticidade, uma das características da generalização algébrica.

A segunda questão versava em encontrar a quantidade de quadradinhos necessárias para que todos os meninos saíssem de Papelândia. Essa questão tinha duas relações diferentes de grandezas: posição em relação à quantidade de pessoas e quantidade de quadradinhos em relação a posição. Essa questão envolveu um novo modo de pensar a sequência, uma vez que a resposta não era rápida de ser encontrada.

Um dos professores disse que se continuasse acrescentando quadradinhos até chegar à posição necessária, se chegaria na resposta. Porém, a professora Débora disse "mas a gente vai ficar o resto da vida acrescentando cubinhos? Tem que ter uma lógica" (Débora, Encontro 5, Grupo 4, Vídeo: 15'26"-15'44"). Diante da fala da professora Débora, os professores começaram um novo movimento do pensamento buscando um modo geral de compreender e responder a questão. Este movimento conjunto foi bastante demorado. O material concreto foi fortemente usado, tanto para provar hipóteses levantadas pelos professores, como para compreensão da estrutura da sequência.

Durante a utilização do material concreto, os professores perceberam que não era necessário acrescentar um cubinho a cada lado do cubinho central, já que o aumento se repetia a cada lado do cubinho referente a 1ª posição. Sendo assim, para saber a quantidade de quadradinhos de cada posição, era necessário saber a quantidade de quadradinhos de um dos

[5] No texto usaremos o termo *quadradinho* para se referir a figura plana representada na folha da SDA, e o termo *cubinho* para designar o material concreto ofertado e manipulado pelos professores.

ISSN 2764-3158

lados do quadradinho central e multiplicar essa quantidade por 4, mantendo o padrão da sequência. Esse modo de compreensão da estrutura da sequência auxiliou os professores a lidar com a sequência de uma nova forma. De acordo com a história virtual, a cada pessoa era necessário acrescentar 5 posições. Desta maneira os professores foram organizando os cubinhos em grupos para encontrar a resposta ao problema.

Quadro 1: Forma de generalização envolvendo a aritmética sofisticada

Enunciado	*Segmento Saliente 1*	Comentários interpretativos
1	*Katia*: Aqui dá quanto? 	Referindo-se a quantidade de cubinhos de um dos lados do cubinho referente a 1ª posição.
2	*Eloísa:* Mas por que esses daqui têm 5 e esse só tem 4?	Questionando o primeiro bloquinho formado por 4 cubinhos e os demais formados por 5 cubinhos.
3	*Paula:* Porque aqui é a primeira posição.	Apontando para o cubinho referente a 1ª posição.
4	*Katia:* Então vai ser 24 [...]  [...] vezes 4 mais 1 [...]  [...] que dá? 97 [...]. Então, na verdade a gente respondeu a 2 aqui. Para os 5 saírem juntos, eles vão sair na 25ª posição, não é isso? Então é 24 x 4 + 1.	Ao final da conclusão, os professores concordaram que a quantidade de quadradinhos a ser considerada era 24, e que deveriam realizar a multiplicação por todos os lados do quadradinho central, adicionando o quadradinho central ao final: (24x4+1) = 97.

Fonte: Encontro 5, Grupo 4, Vídeo (36' - 36'48")

Este segmento saliente mostrou que os professores conseguiram responder a segunda questão, porém, parece que ainda não compreenderam a relação funcional da sequência: posição em função da quantidade de meninos, havendo indícios de proto-analiticidade, aproximando a uma generalização aritmética sofisticada, uma vez que eles compreenderam a estrutura espacial (multiplicar os blocos formados para cada posição por 4), porém, não compreenderam a estrutura numérica geral, utilizando como base para a generalização a contagem aritmética de blocos de cubinhos.

ISSN 2764-3158

Tanto a primeira como a segunda questão, a generalização manifestada pelos professores ficou no campo da aritmética, uma vez que a atenção dos professores ficou para os dados concretos e a contagem aritmética, mesmo que partindo de uma posição já determinada, ou fazendo blocos de cubinhos para cada criança a sair do elevador.

De modo a propiciar um novo movimento do pensamento, a terceira questão da SDA, solicitava que os professores deixassem uma mensagem contendo o segredo do elevador para a saída de qualquer quantidade de pessoas que fossem à Papelândia. Para responder essa questão, os professores tiveram que iniciar o movimento do pensamento sem o auxílio da contagem, uma vez que esta não era suficiente para responder à questão. Para desvencilhar dos bloquinhos de cubinhos feitos pelos professores na 2ª questão, o pesquisador/formador propôs que eles pensassem a quantidade de quadradinhos a ser digitada para a 23ª posição.

Quadro 2: Diálogo sobre a resolução para a 23ª posição

Enunciado	Segmento saliente 2	Comentários interpretativos
5	*Irineu:* eu fiz aqui ó, pra achar na 23ª: (23 – 1) x 4 + 1. 	Mostrando sua folha com os registros para os professores. As professoras observaram atentamente os argumentos da sua elaboração para resolução do problema.
6	*Katia:* Deu quanto?	
7	*Irineu:* 89.	
8	*Eloísa*: Aqui você está na 20ª e ele falou ali 23ª. Coloca mais 3 [cubinhos]. 	Diálogo com a professora Paula observando os cubinhos do material concreto organizados para a 20ª posição, realizando a contagem termo a termo.
9	*Paula:* Conta aí.	A professora Katia inicia a contagem dos cubinhos termo a termo. Base do pensamento aritmético perpassando pela generalização aritmética. Os professores Irineu e Eloísa observam a contagem. 

ISSN 2764-3158

10	*Katia:* Tem 23. Então tem que fazer 23 x 4 [...].	Neste momento a professora Eloísa a interrompe.
11	*Eloísa:* [...] aqui tem 22.	A fala da professora na quantidade de cubinhos referente a 23ª posição foi bastante firma. Isso nos dá indícios de uma compreensão da professora das duas estruturas da sequência: espacial e numérica.
12	*Katia:* Então é 22 x 4 que dá 88, mais 1, que dá 89.	
13	*Eloísa:* É.	
14	*Irineu:* Sempre tem que fazer o número de posição menos 1.	

Fonte: Encontro 7, Grupo 4, Vídeo (18'20" – 19'33")

As linhas 10 e 12 mostram indícios que os professores, em especial a professora Eloísa, compreenderam as três características pertencentes ao movimento do pensamento algébrico, sendo possível calcular qualquer termo da sequência. Como a manifestação do modo de pensar está relacionado a termos particulares, neste caso 23º termo, podemos entender que o movimento do pensamento algébrico incluiu uma *generalização algébrica factual*.

A partir dessa compreensão do grupo, o professor Irineu definiu a relação entre as grandezas posição e quantidade de quadradinhos na 14ª linha. A expressão "sempre" indica uma generalização que serve para qualquer termo da sequência, envolvendo a analiticidade, uma vez que ele está lidando com o termo desconhecido como se fosse conhecido. Além disso, esse modo de manifestar a compreensão da sequência se aproxima de uma *generalização algébrica contextual*, uma vez que a particularidade vai dando espaço a um modo mais geral de representar a sequência.

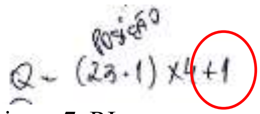
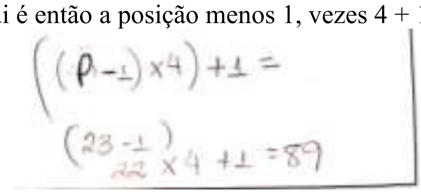
Após esse entendimento sobre a sequência, os professores continuam o diálogo a fim de escrever a mensagem para deixar para os próximos visitantes, isto é, registrar o modo geral de representação da sequência.

Quadro 3: Formas de generalização manifestadas por professores

Enunciado	*Segmento saliente 3*	Comentários interpretativos
15	*Carla*: Vamos supor, pra 20ª posição, sair 4 pessoas, como a primeira posição é 1, [...], não vai somar [com] o 20, vai fazer 1 depois.	Quando a professora diz que vai fazer 1 depois, ela está se referindo que inicialmente ele é subtraído para depois ser somado.
16	*Katia:* Vinte menos 1.	A professora Katia sussurra.
17	*Carla:* Vai fazer vezes [4], depois soma com esse (mostrando o 1 inicial), que vai dar a quantidade de quadrados. 	O círculo em torno do 1 foi para evidenciar que aquele 1 é referente ao quadradinho da posição 1. Ele está fora dos parênteses mostrando que primeiro deve-se fazer a multiplicação da posição menos um (posição anterior) pelo padrão, para depois somar com o quadradinho inicial.

ISSN 2764-3158

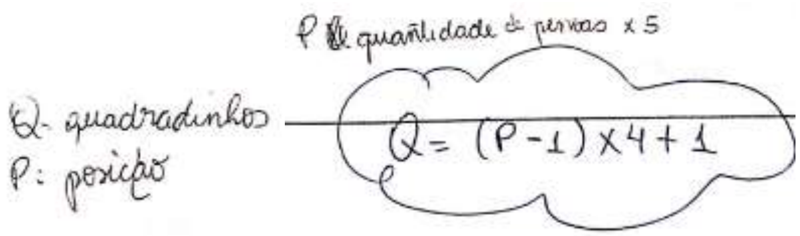
Sociedade Brasileira de Educação Matemática

18	*Irineu:* Por isso que eu falo, tem que colocar a posição menos 1 e depois você soma o 1 de novo, pra pessoa sempre saber que tem que tirar o 1, se não colocar que é pra tirar o 1, a pessoa esquece. Por exemplo, desse jeito assim, a pessoa acaba esquecendo [de retirar 1]. É a 20ª posição, vou colocar o 20, e acaba se embananando.	O professor Irineu foi mostrando cada termo que fez na sua folha. Quando o professor diz "desse jeito assim", ele faz referência ao registro direto que a professora Carla fez, sem escrever (20-1): posição menos 1.
23	*Katia*: Ela [Carla] fez igualzinho. Ela queria saber a 20ª, ela diminuiu 1, fez igualzinho: menos 1, vezes 4, mais 1. Só inverteu.	Expressão oral que demonstra o pensamento algébrico incluindo a generalização algébrica contextual.
24	*Eloísa*: Esse mais 1 você jogou pra trás, ela jogou pra frente [...].  Carla, 7, RI  Irineu, 7, RI	Apresentando a diferença dos registros dos professores, porém, mostrando que ambas as formas dizem sobre a mesma coisa.
25	*Carla:* Aqui é então a posição menos 1, vezes 4 + 1.  Carla, 7, RI	Durante a apresentação da fala, a professora Carla se apoia nos registros simbólicos anotados na folha de registros individual.

Fonte: Romeiro (2023, p. 194-195)

Neste episódio conseguimos identificar o movimento do pensamento algébrico e da generalização algébrica já em outro nível de complexidade. A generalização contextual vai dando espaço a um modo mais geral, em que os signos vão superando os aspectos verbais, não sendo necessário o aporte do material concreto, deduzindo o seguinte registro para representar a sequência:

Figura 4 - Registro usando a notação simbólica alfanumérica para representar a relação entre as grandezas



Fonte: Irineu, 7, RI.

O registro aponta as duas relações funcionais envolvidas na SDA: posição em função do número de pessoas (P é a quantidade de pessoas x 5), e a quantidade de quadradinhos em função da posição Q = (P – 1) x 4 + 1. As três características da generalização algébrica estão presentes durante o diálogo entre os professores, bem como, o registro do modo geral da sequência. A generalização neste momento é mais complexa e já não necessita dos meios semióticos concretos (linguagem oral, por exemplo) para explicar ou representar a sequência. O movimento do pensamento manifestado pelo registro apresentado pelos professores, perpassa por uma *generalização algébrica simbólica*.

ISSN 2764-3158

5 Considerações finais

A presente pesquisa surgiu a partir da emergência em estudos sobre o pensamento algébrico com foco nos anos iniciais, principalmente no âmbito nacional a partir da publicação da BNCC (BRASIL, 2018) que insere a álgebra de maneira explícita como uma das unidades temáticas do currículo dos anos iniciais da disciplina de Matemática. É neste contexto que buscamos identificar as formas de generalização manifestadas por professores dos anos iniciais ao se envolverem com situações desencadeadoras de aprendizagem, contemplando elementos do conhecimento algébrico, uma vez que a generalização se apresenta como um elemento importante no trabalho com o pensamento algébrico.

A pesquisa se apoiou na Teoria da Objetivação que pressupõe um labor conjunto na relação dialética entre professores e estudantes para alcançar um objetivo comum. Além disso, também nos apoiamos no conceito de pensamento teórico, entendendo que na materialização do saber em forma de conhecimento, o pensamento entra em movimento e nesse sentido, no movimento do pensamento teórico.

No contexto do conhecimento algébrico, Radford (2018) diz que a generalização algébrica inserida no processo de objetivação do saber algébrico caracteriza-se pela indeterminação, pela analiticidade e pelos modos de representar ou simbolizar essas quantidades indeterminadas e suas operações, uma "maneira analítica na qual pensamos quando pensamos algebricamente" (Radford, 2018, p. 9). A generalização algébrica, nesta perspectiva teórica, é alcançada por meio de deduções provenientes da analiticidade, na qual os objetivos desconhecidos são tratados como se fossem conhecidos. Radford (2018) apresenta três camadas de generalização no processo de objetivação do saber algébrico: factual, contextual e simbólica.

Como recorte desse artigo, apresentamos os dados da realidade apreendida junto aos professores de anos iniciais do Ensino Fundamental por meio de um experimento formativo em que os professores se depararam com a história virtual e os problemas contidos na SDA "A fantástica aventura de Leo". Na análise na perspectiva multimodal, isto é, uma análise que considera todas as manifestações semióticas, retiradas de vídeos, áudios, fotos e registros escritos, foi possível identificar que os professores buscaram resolver as questões com posições definidas (próximas posições) por meio da contagem, que, conforme apontado por Radford (2018) está no campo do pensamento aritmético englobando uma generalização aritmética ou aritmética sofisticada. Já questões envolvendo um modo de compreender e registrar mais geral da sequência, o movimento do pensamento seguiu em direção ao pensamento teórico, que insere a generalização algébrica nas suas diversas camadas, que evidencia a estrutura numérica e espacial, por meio da analiticidade.

A realidade apreendida mostrou que o processo de objetivação que permite o encontro progressivo do saber algébrico transformado em um objeto presente na consciência, isto é, na forma de conhecimento algébrico, se dá durante o percurso do pensamento algébrico, e a generalização algébrica como construto fundamental para constituição deste modo especial de pensar. Deste modo, a objetivação, "leva a uma nova forma de perceber, falar e conceitualmente abordar os conceitos matemáticos" (Radford, 2021, p. 136). Concluímos que o percurso do pensamento algébrico se dá durante o processo de objetivação quanto envolve o saber algébrico, considerando que a objetivação abarca o processo de compreensão do saber em movimento a partir da atividade humana inserida em um contexto histórico-cultural.

Por fim, compreendemos que a pesquisa desenvolvida traz contribuições para a estruturação da formação de professores que ensinam matemática envolvendo o conhecimento algébrico nas diversas etapas da educação básica, como sujeitos histórico-culturais,

ISSN 2764-3158

vislumbrando a formação humana nas suas máximas potencialidades em uma perspectiva de educação humanizadora, na qual visa a formação para além dos conceitos, isto é, para a transformação de sujeitos humanos.

6 Referências

BRASIL. MEC. (2018). *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília.

DAVÝDOV, V. (1982). *Tipos de Generalización en la Enseñanza*. Ciudad de La Habana: Editorial Pueblo y Educación.

DAVÍDOV, V. (1988). *La Enseñanza Escolar y el Desarrollo Psiquico*: Investigación psicológica y experimental. Moscu: Editorial Progresso.

JUNGBLUTH, A.; SILVEIRA, E. & GRANDO, R. C. (2019). O estudo de sequências na Educação Algébrica nos Anos Iniciais do Ensino Fundamental. *Educação Matemática Pesquisa, v. 21, n. 3*. São Paulo.

LEONTIEV, A. (1978). *O desenvolvimento do psiquismo.* Lisboa: Horizonte.

LINS, R. C.; GIMENEZ, J. (1998). *Perspectivas em Aritmética e Álgebra para o Século XXI*. 2. ed. Campinas: Papirus.

MORETTI, V. D. & RADFORD, L. (2021). Contribuições da Teoria da Objetivação para a Análise multimodal de vídeos na Pesquisa sobre formação de Professores que ensinam matemática. *VIII SIPEM – Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática*. SBEM.

MORETTI, V. D.; VIRGENS, W. P. & ROMEIRO, I. O. (2021). Generalização Teórica e o Desenvolvimento do Pensamento Algébrico: contribuições para a formação de professores dos Anos Iniciais. set-dez. *Bolema*. Rio Claro, SP.

MOURA, M. O; ARAÚJO, E. S; MORETTI, V. D.; PANOSSIAN, M. L. & RIBEIRO, F. D. (2010). Atividade Orientadora de Ensino: unidade entre ensino e aprendizagem. *Revista Diálogo Educacional. v. 10, n. 29*, p. 81-109, jan/abr. Curitiba.

MOURA, M. O.; ARAUJO, E. S. & SERRÃO, M. I. B. (2018). Atividade orientadora de ensino: fundamentos. *Linhas Críticas, v. 24*. Brasília.

PROENÇA, M. C. (2019). Generalização de padrões algébricos no ensino via resolução de problemas: compreensão de licenciandos em Matemática. *Educação Matemática Pesquisa, v.21, n.3*, pp. 419-437. São Paulo.

RADFORD, L. (2015). Methodological Aspects of the Theory of Objectification. In: *Perspectivas da Educação Matemática, v. 8, n.18*. pp. 547-567. Mato Grosso do Sul. https://periodicos.ufms.br/index.php/pedmat/article/view/1463/970

RADFORD, L. (2018). The emergence of symbolic algebraic thinking in primary school. In KIERAN, Carolyn. (Ed.) *Teaching and learning algebraic thinking with 5- to 12-year-olds: The global evolution of an emerging field of research and practice.* p. 2-25. New York: Springer.

RADFORD, L. (2021). *Teoria da Objetivação: Uma perspectiva vygotskiana sobre conhecer e vir a ser no ensino e aprendizagem da matemática*. Tradução de Bernadete B Morey e Shirley T. Gobara. São Paulo: Editora Livraria da Física.

ROMEIRO, I.O. (2023). *Formas de generalização no processo formativo de professores envolvendo elementos do conhecimento algébrico nos anos iniciais*. Tese (Doutorado em

Educação). Universidade Federal de São Paulo. Guarulhos, SP.

SANTOS, F. C. F. (2020). *Desenvolvimento do pensamento algébrico de professores dos anos iniciais em atividade de ensino: o pensamento teórico mediado por conceitos algébricos*. Dissertação (Mestrado em Educação). Universidade Federal de São Paulo. Guarulhos, SP.

VALE, I. & BARBOSA, A. (2019). Pensamento algébrico: contributo da visualização na construção da generalização. *Educação Matemática Pesquisa, v.21, n.3*, p. 398-418. São Paulo. http://dx.doi.org/10.23925/1983-3156.2019vol21i3p398-418

VERGEL, R. C.; RADFORD, L. & ROJAS. P. J. G. (2022). Zona conceptual de formas de pensamiento aritmético "sofisticado" y proto-formas de pensamiento algebraico: una contribución a la noción de zona de emergencia del pensamiento algebraico. *Bolema*, *v.36, n.74*, p.1174-1192, dez. Rio Claro (SP). https://doi.org/10.1590/1980-4415v36n74a11.

VYGOTSKY, L. S. (2007). *A formação social da mente*. 7ª ed. São Paulo: Martins Fontes.

ISSN 2764-3158