

Combinatória, Probabilidade e suas articulações no currículo apresentado aos professores dos Anos Finais

Combinatorics, Probability and their articulations in the presented to teachers Middle School curriculum

Ewellen Tenório de Lima¹

Resumo: Apresenta-se um recorte de uma tese de doutorado referente à análise de livros didáticos, visando discutir, à luz da Teoria dos Campos Conceituais, como esse material apresenta o trabalho com a Combinatória e com a Probabilidade nos Anos Finais. A partir de análises quantitativas e qualitativas realizadas nos capítulos dos livros didáticos na íntegra, percebeu-se que, em todas as coleções, assim como no currículo prescrito, a Probabilidade ganha maior ênfase do que a Combinatória, sendo contemplada com uma maior quantidade de problemas e variedade de situações. Contudo, é dado maior destaque à quantificação de probabilidades e a uma concepção clássica de Probabilidade. Já no que diz respeito às articulações entre Combinatória e Probabilidade, identificou-se que 25,6% dos problemas possuem potencial para articulação, seja referente a contextos ou representações em comum, o que possibilita ao professor uma base para adaptar/propor situações que visem o desenvolvimento dos raciocínios combinatório e probabilístico em sala de aula.

Palavras-chave: Raciocínio Combinatório. Raciocínio Probabilístico. Ensino Fundamental. Currículo Apresentado. Livros Didáticos.

Abstract: Is presented an excerpt from a thesis referring to the analysis of textbooks, aiming to discuss, in the light of the Theory of Conceptual Fields, how these materials address Combinatorics and Probability in Middle School. Through quantitative and qualitative analysis of the chapters in the textbooks. it was noticed that in all collections analysed, as well as in the prescribed curriculum, Probability receives more emphasis than Combinatorics, being covered with a greater number of problems and a variety of situations. However, more room is given to the quantification of probabilities and to a classical conception of Probability. Regarding the articulation between Combinatorics and Probability, it was identified that 25.6% of the problems have the potential for articulation, whether referring to common contexts or representations, which provides to the teacher a basis for adapting/proposing situations in the classroom that aim the development of combinatorial and probabilistic reasonings.

Keywords: Combinatorial Reasoning. Probabilistic Reasoning. Middle School. Presented Curriculum. Textbooks.

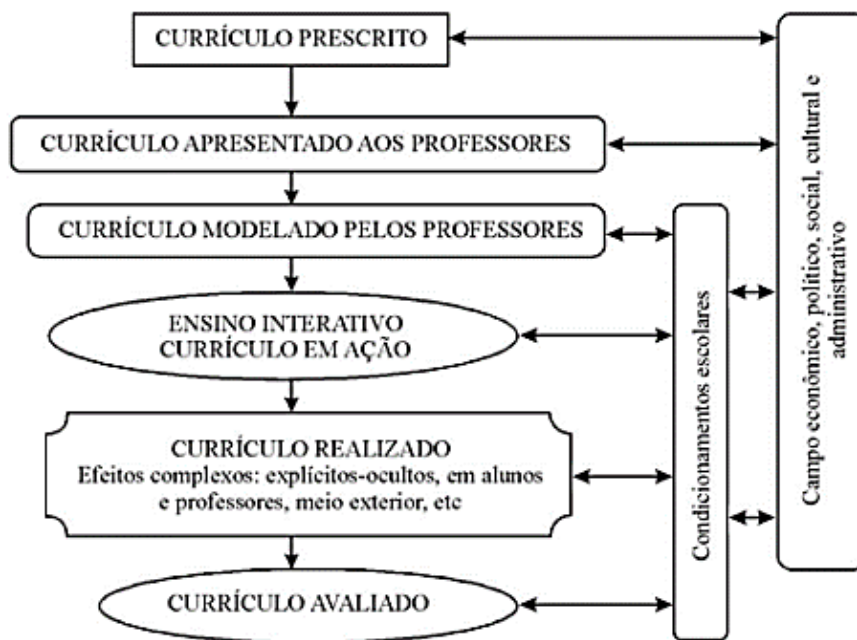
1 Introdução

O presente trabalho diz respeito a um recorte de um estudo de tese de doutorado que teve por objetivo geral *investigar Combinatória, Probabilidade e suas articulações em currículos prescritos e apresentados aos Anos Finais do Ensino Fundamental, visando a construção de uma proposta que favoreça o ensino de ambas as temáticas*. Especificamente, são aqui discutidos os resultados referentes à etapa da pesquisa que consistiu na análise de livros didáticos dos Anos Finais, isto é, a análise do currículo apresentado aos professores de tal etapa da escolarização.

¹ Universidade Federal de Pernambuco • Caruaru, Pernambuco — Brasil • ✉ ewellen.lima@ufpe.br • **ORCID** <https://orcid.org/0000-0002-3654-0370>

À luz de Sacristán (2000), que afirma que o currículo se constrói e ganha sentido a partir de sucessivos processos de transformação relacionados a instâncias curriculares distintas, o estudo de tese em questão analisou diretamente currículos *prescritos* e *apresentados aos professores*. O autor destaca, ainda, as instâncias dos currículos *moldados ou modelados pelo professor* (adaptações realizadas pelos docentes em seus planejamentos), *em ação* (o que se dá na prática), *realizado* (efeitos da prática) e *avaliado* (currículo priorizado, inclusive, em função de pressões externas). Estas instâncias sofrem, ainda, influência direta das duas primeiras mencionadas, conforme ilustrado na Figura 1.

Figura 1: Processo de desenvolvimento curricular



Fonte: Sacristán (2000, p. 105)

As instâncias enfocadas nesse trabalho, os currículos *prescrito* e *apresentado ao professor*, são, respectivamente, referentes: às orientações e regulações voltadas especialmente à escolarização obrigatória, se aproximando de uma ideia clássica de currículo como objeto orientador e de padronização de um sistema de ensino, exemplificados por documentos curriculares oficiais que determinam parâmetros, diretrizes ou bases para o ensino; e aos materiais didáticos que traduzem tais prescrições aos professores e estudantes, apresentando interpretações dessas orientações em formatos como apostilas e livros didáticos, por exemplo.

Em especial, a análise do currículo *apresentado ao professor*, a partir de livros didáticos, ganha relevância dado o importante papel exercido por esse material em sala de aula. Conforme destacado por Sacristán (2000),

Existe uma série de meios, [...], que costumam traduzir para os professores o significado e os conteúdos do currículo prescrito, realizando uma interpretação deste. As prescrições costumam ser muito genéricas e, nessa mesma medida, não são suficientes para orientar a atividade educativa nas aulas. [...] O papel mais decisivo neste sentido é desempenhado, por exemplo, pelos livros-texto (p. 104-105).

Destaca-se, ainda, que o livro didático possui amplo acesso por parte de professores e estudantes e apresenta propostas de abordagens dos conteúdos prescritos nos documentos oficiais para diferentes etapas da escolarização. Propõe, ainda, atividades a serem

desenvolvidas em sala de aula. O Programa Nacional do Livro Didático ressalta que:

o livro didático traz para o processo de ensino e aprendizagem mais um elemento, o seu autor, que passa a dialogar com o professor e com o estudante. Nesse diálogo, o livro é portador de escolhas sobre: o saber a ser estudado (a Matemática); os métodos adotados para que os estudantes consigam aprendê-lo mais eficazmente; a organização curricular ao longo dos anos de escolaridade (Brasil, 2019, p. 13).

É válido perceber, contudo, que as atividades propostas pelos livros didáticos não devem ser interpretadas como obrigatórias ou engessadas. Elas podem, e por vezes devem, ser moldadas pelo professor: adaptando-as a seus objetivos e às realidades vivenciadas em cada sala de aula.

Nesse sentido, na seção que segue, são brevemente discutidos os referenciais teóricos que subsidiaram as discussões conduzidas na análise de currículos *apresentados aos professores* dos Anos Finais, no que diz respeito à Combinatória, à Probabilidade e às possíveis articulações entre essas temáticas da Matemática.

2 Referenciais Teóricos

As discussões sobre Combinatória e Probabilidade levantadas ao longo da pesquisa de tese mencionada tomam por base a Teoria dos Campos Conceituais (Vergnaud, 1996). Consideram, assim, o tripé formado: pelas *situações* que atribuem sentido à Combinatória e à Probabilidade; pelos *invariantes* de tais situações, isto é, as propriedades que as caracterizam e diferenciam; e pelas *representações simbólicas* utilizadas para representar conceitos de tais temáticas, possuindo papel de extrema importância, ainda, na resolução de problemas.

Vergnaud (1996) destaca que “para estudar o funcionamento e o desenvolvimento de um conceito é necessário considerar estes três planos ao mesmo tempo” (p. 166). Nesse sentido, ao longo das análises, esse tripé é retomado ao se analisar o currículo apresentado no que diz respeito à Combinatória e à Probabilidade. É válido pontuar que Combinatória e Probabilidade fazem parte do campo conceitual das estruturas multiplicativas, definido por Vergnaud (1996) como o “conjunto das situações que exigem uma multiplicação, uma divisão ou uma combinação destas duas operações” (p. 167).

Especificamente ao analisar problemas combinatórios, a classificação dos mesmos por tipo foi realizada considerando-se as *situações combinatórias* apontadas por Borba (2010). A autora, baseando-se nos *invariantes* referentes à ordem e à escolha de elementos (e tendo em vista o esgotamento de possibilidades) unificou classificações anteriormente presentes na literatura e propôs quatro tipos de situações combinatórias: *produto de medidas*, *arranjo*, *combinação* e *permutação*. A autora defende, ainda, que para que haja um amplo desenvolvimento do raciocínio combinatório é importante que os estudantes tenham contato com as variadas situações combinatórias e representações simbólicas tais como a listagem, o Princípio Fundamental da Contagem, o diagrama de árvore e as fórmulas, ao longo da escolarização, ampliando e aprofundando seus conhecimentos. As situações combinatórias, suas características e exemplos de cada tipo são apresentados no Quadro 1.

Quadro 1: Situações combinatórias

Situação	Conjuntos Envolvidos	Escolha	Ordem	Exemplo
Produto de Medidas	Dois ou mais conjuntos distintos	Um elemento de cada conjunto	Não determina possibilidades distintas	Para entrar no parque de diversões, João pode passar por quatro portões de entrada (A, B, C e D). Depois que João se divertir nos brinquedos do parque, ele poderá ir para casa passando por cinco saídas diferentes (E, F, G, H e I). De quantas maneiras diferentes ele poderá entrar e sair do parque?
Arranjo	Conjunto único	Alguns elementos do conjunto	Determina possibilidades distintas	Edinho tem alguns carrinhos e quer colocar placas neles. Ele quer usar quatro letras (X, Y, K e W) e vai escrever três letras em cada placa. Quantas são todas as possibilidades de placas que Edinho pode fazer, sem que as letras se repitam?
Combinação	Conjunto único	Alguns elementos do conjunto	Não determina possibilidades distintas	Márcia tem em casa quatro tipos de fruta (mamão, abacaxi, laranja e banana) e quer fazer uma salada usando três dessas frutas. De quantas maneiras diferentes ela pode combinar essas frutas?
Permutação	Conjunto único	Todos os elementos do conjunto	Determina possibilidades distintas	De quantas maneiras diferentes três pessoas (Maria, Luís e Carlos) podem posicionar-se numa fila do banco?

Fonte: Lima (2022, p. 44)

Por sua vez, para classificar os problemas probabilísticos, tomou-se por base a argumentação de Bryant e Nunes (2012). Esses autores defendem que a Probabilidade é um conceito cuja compreensão exige o desenvolvimento de quatro demandas cognitivas interrelacionadas, sendo estas: o entendimento da *aleatoriedade*; a elaboração/análise do *espaço amostral*; a *comparação* e *quantificação* de probabilidades, e a compreensão de *correlações*. Essa última demanda não apareceu nos currículos prescritos e apresentados analisados na pesquisa e será aqui suprimida. Já a *comparação* e a *quantificação* de probabilidades serão consideradas nesse trabalho como referentes a tipos de problemas diferentes, dada a natureza distinta dos problemas que envolvem cada uma dessas ações.

Acerca da primeira demanda cognitiva, Bryant e Nunes (2012) apontam que a *aleatoriedade* abrange a incerteza sobre resultados de eventos que ainda não ocorreram. Essa demanda diz respeito ao entendimento sobre eventos aleatórios, isto é, eventos que “as pessoas sabem que podem ocorrer, mas não têm certeza se e quando eles irão ocorrer” (Bryant & Nunes, 2012, p. 3, tradução livre). Já a segunda demanda cognitiva apontada está relacionada ao levantamento de possibilidades, isto é, de todos os resultados possíveis em uma dada situação probabilística. Os autores apontam que, no que se refere ao *espaço amostral*: “elaborá-lo é não apenas uma parte necessária do cálculo de probabilidades de um dado evento, mas também, um

elemento essencial na compreensão da natureza da Probabilidade” (Bryant & Nunes, 2012, p. 3, tradução livre).

Por fim, a demanda referente à *comparação* e à *quantificação* de probabilidades está relacionada às capacidades: de identificar qual evento tem maior ou menor probabilidade de ocorrência (seja em um espaço amostral único ou em espaços amostrais distintos); e de expressar a probabilidade de ocorrência de um evento como uma quantidade, utilizando uma razão, uma fração, um percentual ou um decimal, por exemplo. Nesses casos, é importante perceber que empregar um raciocínio proporcional é essencial, pois “o cálculo da probabilidade de ocorrência de um evento ou de uma classe de eventos deve se basear na quantidade total do espaço amostral e não apenas na quantidade de eventos que nós queremos prever” (Bryant & Nunes, 2012, p. 46, tradução livre).

Nesse sentido, também se defende a importância de um trabalho progressivo e contínuo com as demandas cognitivas da Probabilidade, tendo em vista o amplo desenvolvimento do raciocínio probabilístico, dado que o trabalho com conceitos probabilísticos ao longo dos diferentes anos da escolarização oferece ao estudante a oportunidade de desenvolver seus raciocínios probabilísticos atrelados, inclusive, a contextos cotidianos e adequados a suas vivências (Fischbein, 1975; Campos & Carvalho, 2016). Dessa forma, é essencial que o livro didático proporcione esse contato com diferentes situações probabilísticas em diferentes volumes.

Na seção a seguir, é apresentado o percurso metodológico que embasou a elaboração das análises apresentadas no presente artigo.

3 Metodologia

Os dados aqui discutidos dizem respeito à análise de três coleções de livros didáticos, aprovadas pelo PNLD 2020 (Brasil, 2019): Realidade e Tecnologia; Compreensão e Prática; e Teláris. Estas coleções foram selecionadas em função de sua ampla distribuição nacional². Foram analisados os quatro volumes voltados aos Anos Finais em cada uma dessas coleções, totalizando, assim, 12 livros didáticos.

Inicialmente foi feito o levantamento, a partir dos índices de cada volume, dos capítulos que trabalhavam conceitos relacionados à Combinatória e à Probabilidade. Assim, os capítulos em questão foram analisados para que cada atividade proposta fosse classificada em função da temática abordada, dos tipos de problemas (situações ou demandas envolvidas), das representações simbólicas (apresentadas e solicitadas) e, também, da existência, ou não, de potencial para articulação entre as duas temáticas foco do presente trabalho.

Destaca-se que os resultados apresentados na seção a seguir estão relacionados, ainda, ao que foi observado em etapas anteriores da pesquisa de tese em questão quanto ao currículo prescrito referente à Combinatória e à Probabilidade, respectivamente apresentados no 5º Fórum Nacional de Currículos de Matemática e no VIII Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática (Lima, 2021a; Lima & Borba, 2021), e ao que foi analisado no PNLD 2017 (Brasil, 2016), cujos resultados foram publicados previamente no Boletim de Educação Matemática – BOLEMA (Lima & Borba, 2022).

² Conforme dados do Fundo Nacional de Desenvolvimento da Educação, disponíveis em: <https://www.fnnde.gov.br/index.php/programas/programas-do-livro/pnld/dados-estatisticos>

4 Análise e discussão dos dados

Nas três coleções analisadas foram identificados, ao todo, 687 problemas combinatórios ou probabilísticos. Estes encontram-se distribuídos de acordo com o apresentado na Tabela 1.

Tabela 1: Distribuição dos problemas analisados

Coleção	Problemas combinatórios	Problemas probabilísticos	Total
A – Realidade & Tecnologia	9	126	135
B – Compreensão e Prática	40	161	201
C – Teláris	58	293	351
Total	107	580	687

Fonte: Dados da Pesquisa

Destaca-se que não há uma distribuição equitativa de problemas das duas temáticas analisadas: enquanto foram identificados apenas 107 problemas combinatórios, os probabilísticos totalizaram 580 problemas. Esse maior espaço dado à Probabilidade nas três coleções analisadas corrobora um maior destaque dado a essa temática no currículo prescrito, no qual são apontadas habilidades a serem trabalhadas em todos os anos dos Anos Finais (Lima & Borba, 2021), o que não ocorre com a Combinatória, que aparece explicitamente apenas nas prescrições do 8º ano (Lima, 2021a).

Nesse sentido, é importante perceber que a distribuição dos problemas analisados também não é homogênea por coleção/ano, como explicitado nas Tabelas 2 e 3.

Tabela 2: Distribuição dos problemas combinatórios (por coleção/ano)

Coleção	6º	7º	8º	9º
A – Realidade & Tecnologia	3	2	3	1
B – Compreensão e Prática	16	-	24	-
C – Teláris	6	5	21	26
Total	25	7	48	27

Fonte: Dados da Pesquisa

Como esperado em função do currículo prescrito, os problemas combinatórios concentraram-se no 8º ano. Destaca-se que há uma quantidade muito menor de problemas, em todas as coleções, nos volumes referentes aos demais anos dos Anos Finais.

Tabela 3: Distribuição dos problemas probabilísticos (por coleção/ano)

Coleção	6º	7º	8º	9º
A – Realidade & Tecnologia	30	36	27	33
B – Compreensão e Prática	27	43	42	49
C – Teláris	36	134	68	55
Total	93	213	137	137

Fonte: Dados da Pesquisa

Por sua vez, os problemas de Probabilidade estão presentes em todos os anos em cada uma das coleções analisadas. Há um número maior de problemas nos volumes voltados ao 7º ano, no entanto há um número expressivo de problemas em todos os volumes analisados, o que reforça um trabalho contínuo voltado a essa temática, oportunizando aos estudantes a revisão e aprofundamento do estudo de elementos de Probabilidade ao longo dos anos de sua escolarização.

É de suma importância analisar, também, a distribuição dos problemas identificados por tipo de situação combinatória abordada, bem como por demanda cognitiva da Probabilidade solicitada nos mesmos. Como mencionado anteriormente, é essencial que essa variedade de tipos de problemas se faça presente em sala de aula tendo em vista o pleno desenvolvimento dos raciocínios combinatório e probabilístico nessa etapa da escolarização, visto que esta embasa o trabalho a ser sistematizado e ampliado no Ensino Médio. Nesse sentido, as Tabelas 4 e 5 apresentam a distribuição dos problemas analisados, por tipo de situação e de demanda.

Tabela 4: Distribuição dos problemas combinatórios (por tipo)

Coleção	Produto de Medidas	Arranjo	Combinação	Permutação	Situação não determinada
A – Realidade & Tecnologia	9	-	-	-	-
B – Compreensão e Prática	27	6	-	6	1
C – Teláris	25	20	6	7	-
Total	61	26	6	13	1

Fonte: Dados da Pesquisa

Identificou-se uma maior abordagem de problemas de produtos de medidas (65,3%). Estudos anteriores, como os de Pessoa (2009) e o de Barreto e Borba (2010), apontam este problema como o mais simples e o mais abordado dentre os combinatórios. Destaca-se que este foi, ainda, o único tipo de situação combinatória presente em todas as coleções analisadas. Por sua vez, os problemas de combinação são aqueles com os quais estudantes de diferentes etapas da escolarização apresentam maiores dificuldades, conforme apontado por vários estudos ao longo dos anos (Pessoa, 2009, Lima, 2010, Azevedo, 2013, Lima, 2018) e, potencializando a ampliação dessa dificuldade, esta situação combinatória apareceu em apenas uma das coleções analisadas, representando apenas 6,4% dos problemas combinatórios identificados. O problema classificado como *situação não determinada* refere-se à solicitação de elaboração e resolução de um problema combinatório, não havendo, portanto, indicação de uma situação específica a

ser abordada.

Tabela 5: Distribuição dos problemas probabilísticos (por tipo)

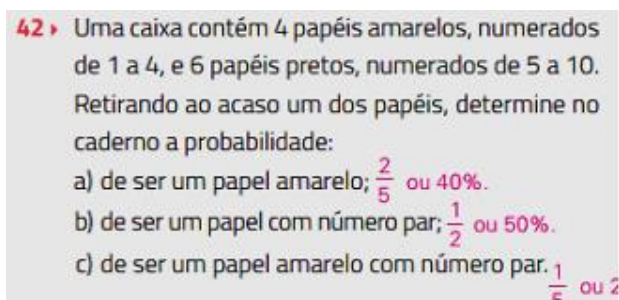
Coleção	Aleatoriedade	Espaço Amostral	Comparação de Probabilidades	Quantificação de Probabilidades	Situação não determinada
A – Realidade & Tecnologia	17	16	14	77	2
B – Compreensão e Prática	26	13	21	98	3
C – Teláris	16	45	12	220	-
Total	59	74	47	395	5

Fonte: Dados da Pesquisa

No caso dos problemas probabilísticos analisados, destaca-se a presença de todos os tipos de problemas em cada uma das coleções. Há uma maior presença de problemas de quantificação de probabilidades, correspondendo a cerca de 68,1% dos problemas probabilísticos analisados. É importante perceber, no entanto, que outras demandas são intrínsecas ao correto cálculo de probabilidades: é necessário entender o caráter aleatório de uma situação e entender o espaço amostral envolvido na questão para calcular probabilidades, por exemplo. Assim, ainda que seja importante dar espaço ao trabalho com cada uma das demandas cognitivas da Probabilidade nessa etapa da escolarização, é natural que a quantificação seja o foco neste momento, pois permite o trabalho com frações, decimais e percentuais para expressar o grau de possibilidade de ocorrência de um evento aleatório – estudos anteriores, como o de Santana (2016) evidenciam que noções mais básicas se fazem presentes em livros didáticos dos Anos Iniciais. Esse foco na quantificação está em consonância, ainda, com as prescrições para os Anos Finais (Lima & Borba, 2021). Os problemas probabilísticos considerados como *situação não determinada* referem-se a questões conceituais ou de respostas pessoais, que solicitavam, por exemplo, que o estudante mencionasse aplicações da Probabilidade em seu cotidiano.

Ainda, destaca-se que 86,4% dos problemas probabilísticos em questão se referem a uma concepção clássica de Probabilidade (Figura 2), na qual a razão entre o número de casos favoráveis e o número de casos possíveis (espaço amostral) deve ser considerado pelos estudantes. 11,6% dos problemas se referem a uma concepção frequentista (Figura 3), possibilitando a experimentação para levantar a frequência de ocorrência de eventos e 2% não estão atrelados a uma concepção de Probabilidade específica.

Figura 2: Exemplo de abordagem de concepção clássica de Probabilidade



Fonte: Coleção C, 8º ano (p. 226)

Figura 3: Exemplo de abordagem de concepção frequentista de Probabilidade

Lançar uma moeda

De acordo com a definição teórica de probabilidade, quando você lança uma moeda, por exemplo, a probabilidade de sortear cara é de $\frac{1}{2}$ ou 50% ou 0,5. Assim, seria possível pensar que, se a lançarmos 20 vezes, vamos obter cara 10 vezes, pois $0,5 \times 20 = 10$. Mas quando se realiza um experimento para testar essa hipótese, isso pode não ocorrer.

- 1º Suponha que uma moeda vai ser lançada 20 vezes. Quantas vezes você espera obter cara? E coroa?
- 2º Agora, pegue uma moeda e, com os colegas, lancem essa moeda 20 vezes e registrem os resultados em uma tabela no caderno. Em seguida, escrevam o total de vezes que cada face apareceu. O resultado é igual ao que você estimou na atividade 1? *Respostas pessoais.*
- 3º Lancem a moeda 100 vezes e registrem os resultados no caderno. O número de vezes que apareceu cara está mais próximo da metade do total de lançamentos do que na atividade 2? *Resposta pessoal.*
- 4º Suponha que vocês vão lançar a moeda 1000 vezes.
 - a) Vocês esperam obter cara em 500 vezes? Expliquem sua resposta.
 - b) Se aparecer cara nas 1000 vezes, então o que se pode dizer a respeito dessa moeda?

4. a) Conforme aumentamos o número de lançamentos, a tendência é que o número de vezes que aparece uma face vá se aproximando cada vez mais da probabilidade teórica.
Pode ser que a moeda seja defeituosa, "viciada".

Fonte: Coleção C, 7º ano (p. 270)

É válido ressaltar, ainda, que as *representações simbólicas* (apresentadas pelos autores e solicitadas aos estudantes na resolução dos problemas propostos) também foram analisadas.

No que diz respeito aos problemas combinatórios, constatou-se que em cerca de 48% dos problemas os autores apresentam apenas enunciado. Por sua vez, o desenho, a árvore de possibilidades e o Princípio Fundamental da Contagem (PFC) se destacam como as representações mais apresentadas, estando presentes em 29%, 14% e 12% dos problemas analisados, respectivamente. Já quanto às representações solicitadas aos estudantes, em mais de 81% dos problemas não há solicitação do uso de representação simbólica específica. A listagem foi solicitada em pouco mais de 11% dos problemas, seguida da árvore de possibilidades (4%), quadro de possibilidades (2%), desenho (1%) e do PFC (1%).

No caso dos problemas probabilísticos, em 45% dos problemas analisados os autores apresentam apenas enunciado. Destaca-se que 38% apresentam uso de desenhos ou ilustrações e em 9% há apresentação de razão, sendo estas as representações apresentadas mais frequentes. Quanto às representações solicitadas, há explicitação de representação específica a ser utilizada em apenas 17% dos problemas, estando divididas em: razão (6%), porcentagem (5%), listagem (3%), tabela (2%) e decimal (1%).

É importante reforçar a importância de que os estudantes possam vir a conhecer representações simbólicas diversas, munindo-se de um repertório que os auxilia, inclusive a resolver problemas combinatórios e probabilísticos (Montenegro, 2018). Ademais, as representações em comum, ainda que apareçam em pequena quantidade de casos (sejam elas apresentadas ou solicitadas), dizem respeito a um importante meio de articulação entre essas temáticas da Matemática (Lima, 2018), como analisado a seguir.

A Tabela 6 são apresentados os dados referentes aos problemas com potencial para articulação entre Combinatória e Probabilidade nas coleções analisadas.

Tabela 6: Distribuição dos problemas com potencial para articulação entre Combinatória e Probabilidade (por natureza da articulação)

Coleção	Apenas representação	Apenas contexto	Representação e contexto	Total (por coleção)
A – Realidade & Tecnologia	6	9	29	44
B – Compreensão e	15	22	24	61

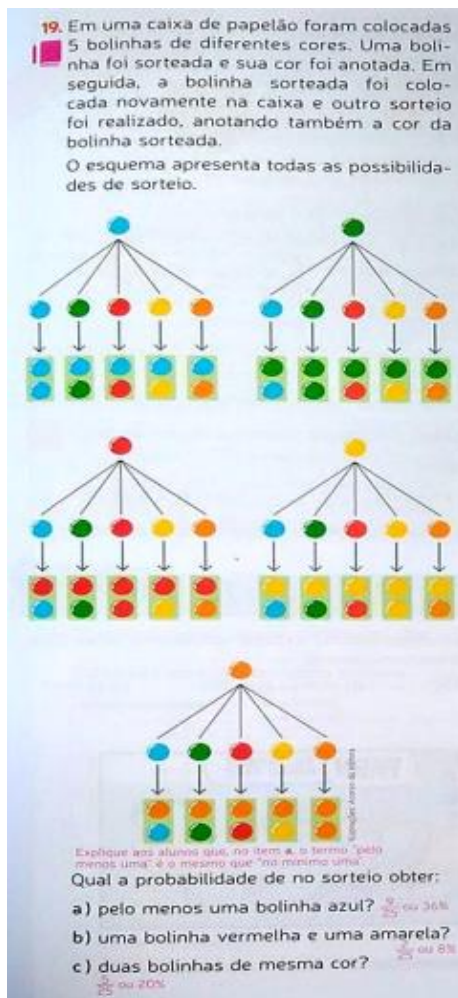
Prática				
C – Teláris	9	48	14	71
Total (por natureza)	30	79	67	176

Fonte: Dados da Pesquisa

Esse total de 176 problemas com potencial para articulação representa 25,6% dos problemas analisados.

Foram considerados com *potencial de articulação via representação* (17,1%) aqueles problemas que compartilham representações simbólicas tais como árvore de possibilidades, Princípio Fundamental da Contagem e listagem (Figura 4). Por sua vez, problemas considerados com *potencial de articulação via contexto* (44,9%) se referem a situações clássicas combinatórias ou probabilísticas, como escolha de peças de roupa ou lançamento de moedas, por exemplo (Figura 5). Ainda, há casos nos quais esses tipos de potenciais articulações se encontram: tanto os contextos, quanto as representações utilizadas/solicitadas são *comuns* a tais temáticas da Matemática (38%) (Figura 6).

Figura 4: Problema probabilístico (quantificação de probabilidades) com apresentação de representação tipicamente combinatória (árvore de possibilidades)



Fonte: Coleção A, 7º ano (p. 141)

Figura 5: Situação combinatória (produto de medidas) com contexto tipicamente probabilístico (lançamento de moedas)

113 ▶ Ao lançarmos uma moeda, temos 2 possibilidades de resultado: cara (Ca) ou coroa (Co).



Ca Co

Ao lançarmos 2 moedas diferentes, temos 4 possibilidades de resultado: (Ca, Ca); (Ca, Co); (Co, Ca) e (Co, Co).

a) Quais e quantas são as possibilidades ao lançarmos 3 moedas diferentes?

b) Quantas são as possibilidades ao lançarmos 4 moedas diferentes? **16 possibilidades. ($2^4 = 16$)**

c) E ao lançarmos 10 moedas diferentes? **1 024 possibilidades. ($2^{10} = 1 024$)**

Fonte: Coleção C, 6º ano (p. 64)

Figura 6: Situação combinatória (produto de medidas) com aprofundamento probabilístico (quantificação de probabilidades) com solicitação de construção de quadro de possibilidades

3 Júlia separou de dois naipes de um baralho apenas cartas de A até 7 e sorteu uma carta de cada naipe. Em seguida, pediu que João tentasse adivinhar quais cartas ela tinha selecionado.

a) Copie o quadro abaixo referente ao espaço amostral e complete-o em seu caderno.

Espaço amostral						
A, A	2, A	3, A	4, A	5, A	6, A	7, A
A, 2	2, 2	3, 2	4, 2	5, 2	6, 2	7, 2
A, 3	2, 3	3, 3	4, 3	5, 3	6, 3	7, 3
A, 4	2, 4	3, 4	4, 4	5, 4	6, 4	7, 4
A, 5	2, 5	3, 5	4, 5	5, 5	6, 5	7, 5
A, 6	2, 6	3, 6	4, 6	5, 6	6, 6	7, 6
A, 7	2, 7	3, 7	4, 7	5, 7	6, 7	7, 7

Os alunos devem perceber que se Júlia contar qual é o valor de uma das cartas, a probabilidade de João acertar é de $\frac{1}{7}$.

b) Qual é a probabilidade de João acertar as duas cartas? $\frac{1}{49}$

c) Qual é a probabilidade de Júlia ter retirado duas cartas de mesmo valor? $\frac{7}{49}$

d) Que dica Júlia poderia dar a João para que a probabilidade de ele acertar fosse de $\frac{1}{7}$? Converse com o professor e os colegas.

Fonte: Coleção B, 8º ano (p. 122)

A presença de problemas de tal natureza nos livros didáticos analisados é bastante positiva dado o amplo acesso desse material didático por parte de professores e estudantes. O professor possui, ainda, a possibilidade de adaptar e ampliar tais problemas, potencializando o trabalho conjunto com essas temáticas em sala de aula, objetivando o desenvolvimento dos raciocínios combinatório e probabilístico de seus estudantes. A presença de articulações da Probabilidade com outras áreas da Matemática em livros didáticos têm sido foco de pesquisas como a de Verbisck (2022), que voltou o olhar para a Probabilidade e a Estatística nos Anos Finais do Ensino Fundamental.

Na presente pesquisa, defende-se a articulação entre Combinatória e Probabilidade, tendo em vista que essas temáticas possuem origens comuns, pautadas nos jogos de azar e nas experimentações (Batanero, Godino & Navarro-Pelayo, 1996), bem como são importantes ferramentas matemáticas à compreensão de situações não determinísticas, isto é, aleatórias.

Enquanto a Combinatória nos mune de conhecimento e técnicas para levantar todas as

possibilidades de organização de elementos de conjuntos em um dado contexto e seguindo certas regras, a Probabilidade permite analisar qual dessas possibilidades é a mais (ou menos) provável de ocorrer. Essas temáticas da Matemática possuem campos de pesquisas amplos e aplicações de maneira independente, inclusive em outras áreas da Matemática, como a Estatística. Contudo, perceber suas aproximações e que a Combinatória é, notavelmente, uma importante ferramenta à Probabilidade, dado que “a análise do espaço amostral requer raciocínio combinatório” (Bryant & Nunes, 2012, p. 8, tradução livre), permite que essa articulação seja um possível caminho a ser seguido em sala de aula, valorizando ambas as temáticas.

Considerações Finais

Em suma, a partir da análise de livros didáticos, referindo-se ao currículo apresentado aos professores enquanto uma etapa de um estudo de tese de doutorado, foi possível perceber que não há uma distribuição equilibrada de problemas combinatórios e probabilísticos nas coleções analisadas, em seus volumes e nem por tipo de problema, sejam situações combinatórias ou demandas cognitivas da Probabilidade. Tal distribuição não homogênea nos livros analisados espelha os resultados observados a partir do que foi analisado no currículo prescrito, em etapas anteriores da pesquisa (Lima, 2021a, Lima & Borba, 2021), que evidenciam um maior espaço dado à Probabilidade, bem como uma tendência a restringir o trabalho com a Combinatória ao 8º ano.

Ao analisar os livros didáticos em questão, identificou-se, ainda, evidências de relações entre a Combinatória e a Probabilidade e a potencial proposição de problemas que exploram articulações entre elas a partir das representações simbólicas apresentadas e/ou solicitadas (articulação cujo incentivo pode ser identificado no currículo prescrito). Outro potencial de articulação identificado nos livros didáticos se dá a partir do aprofundamento de contextos combinatórios/probabilísticos – uma possibilidade rica que não é mencionada explicitamente no currículo prescrito, mas que possui possibilidades práticas amplas em sala de aula, a partir da resolução de problemas.

É importante mencionar, ainda, que este segundo tipo de articulação, consiste em um meio de articulação sistemático, valorizando ambas as temáticas e, assim, a proposição de problemas de tal natureza no currículo apresentado parece possuir um caráter mais intencional de relacionar os raciocínios combinatório e probabilístico. Esta relação e articulação intencional foi foco da última etapa do estudo de tese, cujo estudos pilotos foram publicados em Lima (2021b) e em Lima e Borba (2022) e tiveram por objetivo propor um conjunto de situações-problema, tendo-se em vista a exploração de diferentes situações combinatórias e probabilísticas articuladas entre si. O material elaborado tem por objetivo poder auxiliar o professor no trabalho com o aleatório em sala de aula, explorando suas variadas facetas e incentivando o desenvolvimento dos raciocínios combinatório e probabilístico de estudantes de diferentes etapas da escolarização.

Por fim, são apontadas algumas possibilidades de estudos futuros, que venham a contribuir com um aprofundamento acerca do tema foco do presente trabalho. Destaca-se que estudos podem se dedicar a observar as demais demandas curriculares – currículo moldado, em ação, realizado e avaliado (Sacristán, 2000) – instâncias nas quais atuam também os agentes professores e estudantes, inclusive via estudos interventivos e de sondagem (com professores ou estudantes dos variados níveis de ensino). Voltar o olhar para o estudante em interação com os problemas possibilita, também, analisar os esquemas e invariantes operatórios (conceitos-em-ação e teoremas-em-ação) mobilizados, importantes elementos de um dos principais referenciais teóricos aqui adotados (Vergnaud, 1996), bem como a realização de estudos de

caráter formativo junto a professores de diferentes etapas da escolarização no que diz respeito ao ensino de Combinatória e de Probabilidade.

Referências

- Azevedo, J. (2013). *Alunos de Anos Iniciais construindo árvores de possibilidades: é melhor no papel ou no computador?* 2013. 126f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica). Universidade Federal de Pernambuco. Recife, PE.
- Barreto, F & Borba, R. (2010). Como o raciocínio combinatório tem sido apresentado em livros didáticos de Anos Iniciais. In: *Anais do 10º Encontro Nacional de Educação Matemática* (pp. 1-10). Salvador, BA.
- Batanero, C.; Godino, J. & Navarro-Pelayo, V. (1996). *Razonamiento combinatorio*. Madrid: Síntesis.
- Borba, R. (2010). O raciocínio combinatório na Educação Básica. In: *Anais do 10º Encontro Nacional de Educação Matemática*. (pp. 1-12). Salvador, BA.
- Brasil. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. (2019). *Programa Nacional do Livro Didático*. Brasília, DF.
- Bryant, P. & Nunes, T. (2012). *Children's understanding of probability: a literature review*. Londres: Nuffield Foundation.
- Campos, T.; Carvalho, J. I. (2016). Probabilidade nos anos iniciais da Educação Básica: contribuições de um programa de ensino. *Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana* – Em Teia, 7(1). Recife, PE.
- Fischbein, E. (1975). *The intuitive sources of probabilistic thinking in children*. Dordrecht.
- Lima, E. & Borba, R. (2021). Probabilidade nos Anos Finais: o currículo prescrito pré e pós BNCC. In: *Anais do 8º Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática* (pp. 602-615). Uberlândia, MG.
- Lima, E. & Borba, R. (2022). Combinatória, Probabilidade e suas articulações em livros didáticos de Matemática dos Anos Finais do Ensino Fundamental. *Bolema – Boletim de Educação Matemática*, 36(72), 164-192.
- Lima, E. & Borba, R. (2022). Problemas de combinação nos Anos Finais: o que é prescrito, o que é apresentado e o que se pode fazer articulado à Probabilidade? In: *Anais do 14º Encontro Nacional de Educação Matemática* (pp. 1-10). Brasília, DF.
- Lima, E. (2018). *Raciocínios combinatório e probabilístico na EJA: investigando relações*. 2018. 141f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica). Universidade Federal de Pernambuco. Recife, PE.
- Lima, E. (2021a). Combinatória nos Anos Finais: o currículo prescrito pré e pós BNCC. In: *Anais do 5º Fórum Nacional sobre currículos de Matemática* (pp. 1-11). Canoas-RS.
- Lima, E. (2021b). Combinatória, Probabilidade e suas articulações no currículo dos Anos Finais: o que se pode fazer? In: *Anais do 25º Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-Graduação em Educação Matemática* (pp. 1-12). Campina Grande, PB.
- Lima, E. (2022). *Combinatória, Probabilidade e suas articulações no currículo dos Anos Finais do Ensino Fundamental: o que é prescrito, o que é apresentado e o que se pode fazer?* 2022. 186f. Tese (Doutorado em Educação Matemática e Tecnológica). Universidade Federal de Pernambuco. Recife, PE.



- Lima, R. C. (2010). *O raciocínio combinatório de alunos da Educação de Jovens e Adultos: do início da escolarização até o Ensino Médio*. 2010. 151f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática e Tecnológica). Universidade Federal de Pernambuco. Recife, PE.
- Montenegro, J. (2018). *Identificação, Conversão e Tratamento de registros de representações semióticas auxiliando a aprendizagem de situações combinatórias*. 2018. 247f. Tese (Doutorado em Educação Matemática e Tecnológica). Universidade Federal de Pernambuco. Recife, PE.
- Pessoa, C. (2009). *Quem dança com quem: o desenvolvimento do raciocínio combinatório do 2º ano do Ensino Fundamental ao 3º ano do Ensino Médio*. 2009. 267f. Tese (Doutorado em Educação). Universidade Federal de Pernambuco. Recife, PE.
- Sacristán, J. G. (2000). *O currículo: uma reflexão sobre a prática*. Porto Alegre: Artmed.
- Santana, M. R. (2016). Noções básicas de Probabilidade: o que os livros sugerem, o que os professores conhecem. In: *Anais do XII Encontro Nacional de Educação Matemática* (pp. 1-12). São Paulo, SP.
- Verbisck, J. (2021). Um estudo praxeológico quanto aos conhecimentos estatísticos relacionados e priorizados em uma proposta de ensino de Probabilidade em uma coleção de livros didáticos dos Anos Finais do Ensino Fundamental. In: *Anais do 8º Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática* (pp. 2957-2970). Uberlândia, MG.
- Vergnaud, G. (1996). *A Teoria dos Campos Conceptuais* (pp. 155-191). In: Brum, J. (org.). *Didática das Matemáticas*. Lisboa: Horizontes Pedagógicos.