Intuições que influenciaram a demonstração do teorema da incompletude de Gödel

Intuitions that influenced the demonstration of Gödel's incompleteness theorem

Rosemeire de Fatima Batistela[1]

Resumo: Este texto apresenta resultados de uma pesquisa teórica em desenvolvimento a qual se dedica a realizar uma análise fenomenológica da produção do conhecimento matemático com foco no teorema da incompletude de Gödel. Para tanto expomos o conceito de intuição de essência em Husserl e buscamos apresentar algumas utilizações dessas intuições nas tomadas de decisão, ferramental utilizado, abordagem e perspectivas adotadas por Gödel. Ei-las, mas não somente estas: a visão de Gödel sobre como expressar a metamatemática; o entendimento de que provas finitárias podem ser realizadas por meio do modelo transfinito; a conclusão de que a prova da consistência dos axiomas de Peano deveria ser obtida pela reflexão sobre combinações concretas finitas de símbolos.

Palavras-chave: Intuição. Formalização. Teorema da Incompletude. Fenomenologia.

Abstract: This text presents the results of a theoretical research project in progress, which aims to perform a phenomenological analysis of the production of mathematical knowledge, focusing on Gödel's incompleteness theorem. To this end, we present the concept of intuition of essence in Husserl and seek to present some uses of these intuitions in decision-making, the tools used, the approach and perspectives adopted by Gödel. Here they are, but not limited to: Gödel's vision on how to express metamathematics; the understanding that finitary proofs can be performed through the transfinite model; the conclusion that the proof of the consistency of Peano's axioms should be obtained by reflection on concrete finite combinations of symbols.

Keywords: Intuition. Formalization. Incompleteness Theorem. Phenomenology.

1 Apresentação

> Porque o mais surpreendente é que mesmo depois
> de saber de tudo, o mistério continua intacto.
> Embora eu saiba que de uma planta brota uma flor continuo
> surpreendida com os caminhos secretos da Natureza".
> (Clarice Lispector - A descoberta do mundo)

Este texto apresenta uma pesquisa teórica em desenvolvimento a qual busca realizar uma análise fenomenológica da produção do conhecimento matemático abordando a dialética intuição e formalização junto ao teorema da incompletude de Gödel. Esta pesquisa pode ser assim intitulada: “Da intuição à formalização: um estudo sobre a produção do conhecimento matemático focado no teorema da incompletude de Gödel”. A epígrafe nos ajuda a dizer que, mesmo sabendo que no teorema da incompletude de Gödel ideias se presentificam buscaremos saber quais, como elas foram e podem ser associadas à argumentação formalizada.

No tom da epígrafe anunciamo-nos numa atitude admirativa sobre os caminhos da atividade da pessoa humana na produção do conhecimento matemático. A acepção atitude admirativa é tomada de Bornhein (2003), o sentido é o de abertura para a realidade que o transcende, ato admirativo compreendido por nós como um abrir-se, revelando-se num sentimento de disponibilidade de tomar consciência do objeto admirado, de entregar-se às

[1] Universidade Estadual de Feira de Santana. • Salvador, Bahia – Brasil • ✉ rosebatistela@uefs.br • ORCID https://orcid.org/0000-0003-2779-7251

ISSN 2764-3158

experiências com tal objeto.

Tomamos o título do estudo a que nos propusemos, qual seja, “Da intuição à formalização”, Batistela, Paulo, Bicudo (2023), damos voltas em torno do título e vamos explicitando o que estamos entendendo. Em ingenuidade esse título pode ser interpretado como sendo dois lugares e havendo um movimento que leva de um lugar ao outro, mas não. Há uma circularidade em que intuição não existe sem formalização e vice-versa. Perguntamo-nos se com isso teríamos execrado a possibilidade de esse título indicar que há dois pontos na constituição do conhecimento matemático, como duas estações de trem, quais sejam, a intuição e a formalização.

Em nosso entendimento é imprescindível discutir intuição de essências para a compreensão da formalização, uma vez que entendemos, apoiados em Husserl, que em última instância a Matemática está baseada na intuição. Não se trata à maneira do Intuicionismo em que intuição se refere a uma sequência dada intuitivamente[2], tampouco, conforme Bourbaki que afirma “a matemática nunca foi reduzida a um jogo puramente mecânico de fórmulas isoladas; mais do que nunca a intuição domina na gênese das descobertas” (Bourbaki, 1950, p. 227, tradução nossa). A intuição na filosofia husserliana diz que as possibilidades últimas do conhecimento estão depositadas na intuição.

A tarefa desta pesquisa é realizar um esforço de articulação de nossas compreensões preenchendo os atos que se dão na intuição e na formalização. Perguntamo-nos: como se dá o processo de resolução de um problema ou de construção de uma teoria matemática?

Esboçamos uma resposta que neste momento nos permite seguirmos adiante com a discussão: na produção do conhecimento matemático na perspectiva husserliana, a experiência intuitiva é envolvida pelo processo de análise das estruturas apreendidas e descritas em suas características essenciais, expondo propriedades fundamentais e relações estruturais identificadas, seguida de inferência de categorias, visando tornar explícitas as estruturas subjacentes à própria experiência intuitiva. O passo seguinte diz da sistematização e formalização dos conceitos e categorias relevantes em um sistema conceitual, expressando-os em linguagem matemática rigorosa, que pode ser uma teoria já existente, pode envolver a criação de outra teoria ou ainda construir uma que contenha parte de alguma já existente e rejeite as partes que se mostraram inadequadas.

Neste texto apresentamos aspectos que visam esclarecer sumariamente sobre o processo de produção de objetos matemáticos, no entendimento que a demonstração do teorema da incompletude é a formalização e nossa investigação busca pelas intuições que entendemos com esta se relacionar na articulação do empenho. A formalização diz do âmbito da produção matemática em que ocorre a criação dos objetos matemáticos. Neste âmbito ocorre algo mais do que a reunião de intuições, na constituição do objeto matemático entrelaçam-se propriedades que ajudam a constituir a realidade do objeto.

Nos termos de Bortolete (2024)

> A formalização decorre da intuição e validamos essas formas por meio da análise de suas relações, a apofântica. Para Husserl, o “recurso à clareza intuitiva (evidência, isto é, intuição) (...) exprime (...) o recuo àquilo que há de último em todo conhecimento,

[2] O intuicionismo defende que toda a Matemática deve ser fundada na noção de seqüência" dada intuitivamente" (como uma seqüência de atos), que tem um primeiro elemento, um segundo elemento etc. De acordo com os princípios intuicionistas, a seqüência dos números naturais, 1, 2, 3, ..., é o modelo matemático de tal seqüência e somente se podem aceitar como matematicamente válidos os conceitos que se podem elaborar sobre essa seqüência mediante métodos construtivos.” (Wilder, 1965, p. 211-212).

ISSN 2764-3158

> exatamente [do modo] como se fala de evidência nos axiomas lógicos e aritméticos mais primitivos" (Husserl, 2006, p. 180 *apud* Bortolete, 2024, p. 171).

Esta pesquisa se mostra importante pois, ao estudarmos a produção matemática realizando uma análise fenomenológica do teorema da incompletude seguindo o modo de fazer costumeiro de Husserl estamos realizando um exame do que os matemáticos fazem. Isso é diferente do que os matemáticos dizem que fazem ou que os filósofos entendem que os matemáticos deveriam fazer. Haveremos de poder tecer considerações que emergem deste exame, as quais contribuam com compreensões sobre produção e constituição do conhecimento matemático.

No próximo item apresentamos nossa elaboração sobre o conceito de intuição de essências para Husserl e os desdobramentos deste na produção do conhecimento matemático.

2 Sobre a intuição de essências na fenomenologia husserliana na produção do conhecimento matemático

Na perspectiva de Barco (2013), a filosofia husserliana é composta por duas suposições fundamentais: uma, que a compreensão do mundo e, portanto, a constituição de todo conhecimento prático ou simbólico formal devem à experiência consciente sua origem, e outra, que o conhecimento construído pode ter sua construção descrita, numa espécie de escavação arqueológica conceitual, que quando empreendida pode levar à origem do sentido. A atividade de desvelar, descrever e interpretar os conceitos visando compreender como eles foram se constituindo "conduzirá a uma origem definível em uma intuição nítida" (Barco, 2013, p. 4). Segundo este autor "descrições de vários conceitos acabariam se encontrando e com o tempo os fenomenólogos poderiam formar uma espécie de árvore genealógica do conhecimento humano onde mesmo os conceitos mais especializados seriam traçados a algum ramo originado de uma intuição.

A crise dos fundamentos das ciências formais, reconhecida por Husserl, poderia ser resolvida por este método de busca da origem. Em *A origem da Geometria*, Husserl (1974), podemos compreender que a intuição de essência é central na proposta de fundamentar as demais geometrias na Geometria Euclidiana. Nos termos de Husserl em *Ideias I*:

> Os conceitos geométricos são "conceitos ideais", eles exprimem algo que não se pode "ver"; sua "origem" e, com isso, também seu conteúdo é essencialmente diferente da origem e do conteúdo dos conceitos de descrição, como conceitos que exprimem imediatamente essências tiradas da simples intuição e não "ideais" (Husserl, 2006, p. 160).

A conexão da Geometria Euclidiana, "uma ciência de 'puras idealidades'", com a experiência sensível, evidenciada pela ampla aplicação dessa ciência no "mundo da experiência sensível" (Husserl, 1970, p. 24) oferece o valor cognitivo à Geometria Euclidiana, uma vez que "assegura que todos os andares superiores do edifício simbólico-formal (como a geometria analítica e a geometria diferencial) têm origem em uma intuição de essência" (Barco, 2013, p. 05).

Continuando a apresentação, trazendo outros autores: na visão de Emmanuel Levinas, um estudioso da fenomenologia husserliana, a crise dos fundamentos das ciências formais denunciada por Husserl na obra *A crise das ciências europeias contemporâneas* era entendida como uma crise de metodologia que resultava em uma crise de inovação no discurso filosófico científico, assim Husserl, critica o naturalismo, que reduzia os fenômenos à esfera material e objetiva, negligenciando a subjetividade e a experiência consciente e propõe como alternativa

ISSN 2764-3158

a Fenomenologia que busca dar fundamento para as ciências por meio do voltar às coisas mesmas, que é "voltar dos discursos e opiniões às coisas mesmas, interrogá-las na doação originária de si e pôr de lado todos os preconceitos estranhos a elas." Husserl (2006, p. 61) Diz respeito à volta da investigação das idealidades, excluídas da esfera estritamente empírica e positiva da ciência.

Argumentando ainda sobre a importância da intuição de essências na fenomenologia husserliana, Grzibowski (2016) expõe que para Levinas a fenomenologia é um intuicionismo, buscando com isso a compreensão sobre o quanto a intuição doadora e originária influencia a atividade de conhecer. Ele ainda explicita que com a intuição, Husserl quer dar fundamento aos conceitos, e que a intuição será o fundamento para a Fenomenologia. A Fenomenologia, que é um caminho que oferece novas possibilidades de ver o mundo, permite abertura para novidades e indica probabilidades para criação.

Podemos compreender que a Fenomenologia começa na intuição. Com a intuição Husserl evidencia que seu intento será ir além das simples verbalizações científicas e filosóficas, porque acredita que ela dará novas possibilidades de ver o mundo, ou seja, como as coisas se dão na sua origem. "Não queremos em absoluto, contentar-nos com 'simples palavras', ou seja, com uma compreensão verbal meramente simbólica" (Barco, 2013, p. 5). O intuito husserliano é, no entanto, ultrapassar a esfera do mundo natural e assim indicar probabilidade para criação e abrir-se para as novidades.

No entendimento de Fontana (2007), é a fenomenologia husserliana que "recupera o conceito de intuição retirando dele toda carga psicológica e mística, que devido a interpretações filosóficas e psicológicas, a tratava com ingenuidade e preconceito". Antes abordado na filosofia de Kant, "o conceito de intuição como conhecimento evidente e racional capaz de alcançar o plano ontológico de todo fenômeno" é assim estabelecido na filosofia fenomenológica, pois em Kant o conceito estava "preso aos objetos dados materialmente ou mesmo idealmente na mente psíquica". Husserl formula "um conceito capaz de vislumbrar além da materialidade individual do objeto, e no limite, além de qualquer forma conhecida de objetividade [...] e atinge a essência mesma da objetividade, as coisas mesmas. Tal intuição das essências (*Wesensschau*) é antes a descrição das estruturas do aparecer de qualquer fenômeno." (Fontana, 2007, p. 168).

As intuições são tanto as sensoriais como as essenciais e elas manifestam-se para nós como fonte de onde todo conhecimento provém. Husserl (2006) apresenta que a constituição do conhecimento sempre é para um sujeito e esta tem início na experiência deste sujeito com algo, ou seja, é sempre o conhecimento de algo por alguém. Os atos de consciência do sujeito são os mediadores dessa constituição e por serem do sujeito ocorrem na subjetividade. Importante destacar que estes atos passam à intersubjetividade e se mantém na objetividade. Bicudo (2010) busca esclarecer que "as raízes da objetividade se encontram nos atos da consciência, naqueles da "intuição sensorial" dada na experiência vivida diretamente com as ocorrências individuais e, também, na "intuição de essência" sendo esta entendida como o ver claro, ou a evidência permitida pela abstração intencional" (Bicudo, 2010, p. 37).

Nos termos de Ales Bello (1986), a característica principal da ciência, qualquer que seja ela, é "uma unidade arquitetônica formada por um elo sistemático entre proposições (*Sätze*) e justificações (*Begründungen*) ... segundo a ordem natural das coisas e justificativas, segundo a estrutura cognitiva do campo de investigação" (Ales Bello, 1986, p. 122). Em *Ideias I*, no parágrafo primeiro, Husserl (2006) se expressa sobre as intuições sensíveis. O exposto abaixo visa esclarecer:

> A toda ciência corresponde um domínio de objetos como domínio de suas

ISSN 2764-3158

> investigações, e a todos os seus conhecimentos, isto é, aqui a todos os seus enunciados corretos correspondem, como fontes originárias da fundação que atesta a legitimidade deles, certas intuições nas quais há doação dos próprios objetos desse domínio ou, ao menos parcialmente, doação originária deles. A intuição doadora na primeira esfera "natural" de conhecimento e de todas as suas ciências é a experiência natural, e a experiência originariamente doadora é a percepção, a palavra entendida em seu sentido habitual. Ter um real originariamente dado, "adverti-lo" ou "percebê-lo" em intuição pura e simples é a mesma coisa. Temos experiência originária das coisas físicas na "percepção externa", não mais, porém, na recordação ou na expectativa antecipatória; temos experiência originária de nós mesmos e de nossos estados de consciência na chamada percepção interna ou de si, mas não dos outros e de seus vividos na "empatia". "Observamos o que é vivido pelos outros" fundados na percepção de suas exteriorizações corporais. Essa observação por empatia é, por certo, um ato intuinte, doador, porém não mais originariamente doador. O outro e Sua vida anímica são trazidos à consciência como estando "eles mesmos ali", e junto com o corpo, mas, diferentemente deste, não como originariamente dados (Husserl, 2006, p. 2).

Tratando de apresentar agora sobre as intuições de essência, “aquela que faz ver a verdade última dos fenômenos” (Fontana, 2007, p. 170). Destacamos que “elas são tratadas de um modo intuitivo e de forma alguma isso contradiz o caráter científico da fenomenologia transcendental, ao contrário, ela é a visão intelectual (*Einsicht*) perfeitamente clara das estruturas possibilitadoras de mundo.” como nos esclarece Fontana (2007, p. 170). O resgate do conceito de intuição pela fenomenologia husserliana é possível pelo método descritivo da fenomenologia, que coloca a intuição como fundamento da evidência originária.

Para Husserl (2006, p. 33-34) “o mundo é o conjunto completo dos objetos da experiência possível e do conhecimento possível da experiência, dos objetos passíveis de serem conhecidos com base em experiências atuais do pensamento teórico correto.” A Matemática é, para ele, uma ciência que constrói seus objetos, ou seja, os conceitos e estruturas baseando-se na intuição e por meio de um processo de apreensão intuitiva das essências. Os objetos matemáticos possuem a propriedade de serem potencialmente intuíveis por uma subjetividade.

Os matemáticos por meio de uma atenção reflexiva podem acessar as essências dos objetos e não por meio de operações com símbolos. Assim, Husserl entende que a Matemática é construída por um processo que envolve a intuição e a formalização. A formalização é compreendida como um procedimento metodológico essencial para alcançar clareza e rigor na análise fenomenológica e na lógica e segue procedimentos matemático-formais. Husserl se recusa a considerar a Matemática formal como um jogo de símbolos, “assim embora o matemático possa não estar interessado na questão da verdade possível para as formas da teoria e na questão da verdade possível para a “multiplicidade”, o lógico deve necessariamente se referir a um domínio de objetos e possíveis teorias.” (Ales Bello, 1986, p. 78).

Tratando-se de um matemático em atividade, Husserl concebe que os objetos matemáticos se enraízam na experiência humana e que estes não podem ser “encontrados” sem que seja por meio da intuição de essência. Dessa forma ele opõe-se ao platonismo que entende que objetos existem no mundo independentemente de uma consciência e, temporiza-se, de certa maneira, com o empirismo que entende que estes objetos se encontram ao acesso da percepção sensorial. A intuição de essência é uma percepção análoga à percepção sensorial. A percepção sensorial direciona-se aos objetos transcendentes, enquanto a intuição de essência direciona-se à realidade ideal e puramente transcendental.

No que diz respeito à ciência Matemática, Barco (2013) explicita que o próprio Husserl afirma

> Só podemos evitar que a matemática se perca "em um simbolismo excessivo" se "a ideia desta matemática for construída [...] de dentro do complexo total da ideia de lógica" (Husserl, 1969, p. 86). Só assim podemos construir uma "matemática formal que não flutua no ar, mas que se ergue de suas fundações e é inseparável delas" (Husserl, 1969, p. 87 *apud* Barco, 2013, p. 6).

A intuição ocorre numa visão clara e imediata, quando algo se ilumina e se vê com clareza como é essa conexão, dá se uma compreensão mais profunda das estruturas subjacentes que dão significado à experiência, (Bicudo, 2010). Em (Husserl, 1980, p. 106) podemos entender que a intuição de essência é ela mesma "visão evidente" a priori. Importante sublinhar que, para ser concretizada, ela pode passar por processos cognitivos anteriores. O ponto crucial é compreender que a intuição em si não deve ser confundida com as etapas prévias necessárias para seu reconhecimento.

A intuição é subjetiva e origina nas vivências conscientes de cada indivíduo, porém as experiências intuitivas podem ser compartilhadas e assim passam a fazer parte da intersubjetividade. Este tempo vivido e dedicado a resolver o problema envolve a intuição e se move em direção à formalização. O indivíduo envolvido na atividade busca a tradução do que foi visto de modo claro e imediato, em termos matemáticos, e dedica-se à verificação rigorosa dessa formulação por meio de argumentação lógica e demonstração matemática. Esta dedicação se dá na historicidade, na comunidade matemática em que a intersubjetivação, a comunicação e o apuramento da linguagem estão em jogo e podem ter durações de tempo diferentes.

Na sequência expomos algumas evidências claras que ocorreram a Gödel e que chegaram até nós por comentadores de suas obras.

3 O que Gödel viu que o influenciou a demonstrar seu teorema da incompletude da maneira como o fez?

Neste item apresentaremos pontos em que a visão filosófica de Gödel influenciou as escolhas realizadas na demonstração do teorema da incompletude. Traremos aqui passagens em que Gödel se expressou por meio de cartas com outros matemáticos ou respostas que foram encontradas entre seus papéis após sua morte.

A demonstração do teorema da incompletude de Gödel foi inusitada na forma como foi realizada e a mensagem que estabeleceu provocou um revés na comunidade de matemáticos. Nos perguntamos: que motivações pessoais, que ideias singulares foram essas, que ferramental foi utilizado na demonstração realizada por este autor?

O que segue abaixo busca apresentar evidências claras que influenciaram a forma de enfrentamento teórico do problema. Sobre intuições outras, nos perguntamos que concepções estavam presentes para Gödel que não estavam claras aos demais matemáticos da época. Iniciamos falando sobre seu teorema da completude da lógica de predicados que foi demonstrado dois anos antes do teorema da incompletude da aritmética de Peano. Numa carta a Hao Wang de 7 de dezembro de 1967, explicando porque Thoralf Albert Skolem (1887-1963) não havia construído a prova da completude do cálculo de predicados da Lógica, ele expõe que os lógicos da época compartilhavam de um preconceito que produzia uma falta de atitude epistemológica em relação à metamatemática e ao raciocínio não finitário, ao passo em que ele próprio possuía uma concepção objetivista da Matemática, da metamatemática e do raciocínio transfinito, o que inclusive foi fundamental para a demonstração posterior do teorema da incompletude. Assim se expressa Gödel, posteriormente, sobre sua prova da incompletude:

> Como, de facto, alguém poderia pensar em expressar a metamatemática nos próprios

ISSN 2764-3158

> sistemas matemáticos, se estes últimos são considerados como consistindo em símbolos sem sentido que adquirem algum substituto de significado apenas através da metamatemática? Ou como poderíamos fornecer uma prova de consistência para a hipótese do contínuo por meio do meu modelo transfinito Δ se as provas de consistência têm que ser finitárias?[3] (Feferman, Dawson Jr., Goldfarb, Parsons & Solovay, 1995, p. 397-398).

Gödel também expôs que a sua posição realista em relação aos conjuntos e ao transfinito faz parte de seu sistema de crenças desde 1925. A visão dos lógicos que considerava os sistemas matemáticos consistindo em símbolos sem sentido teria impedido os outros lógicos de pensar em expressar a metamatemática nos próprios sistemas matemáticos, o que ele o fez espelhando a metamatemática na aritmética. A solicitação de que as provas deveriam ser finitárias teria desviado a atenção de que estas provas poderiam ser realizadas por meio do modelo transfinito, que ele propôs.

Sobre a posição realista de Gödel, melhor dizendo o realismo conceitual, é de amplo conhecimento o entendimento de Gödel de que a existência de sentenças indemonstráveis na Matemática - uma vez que esta é uma construção - revela a existência de um construtor que conhece todas as propriedades e o comportamento do que foi construído por ele. Davis (2005) explicita que a visão filosófica de Gödel sobre o Programa de Hilbert e a sua atitude em relação a uma postura realista em relação aos conjuntos foram determinantes na abordagem do problema que culminou no teorema da incompletude. Importante ter em conta que as ideias e crenças de Gödel eram complexas e foram evidenciadas na abordagem matizada que ele teve na prova da incompletude. Estas não causavam estranheza, pois a prova da incompletude e os estudos da hipótese do contínuo (Todo conjunto infinito ou números são contáveis ou têm a cardinalidade do continuum) eram terrenos não pavimentados, de modo que ele desenvolvia as ferramentas técnicas para sustentar o que precisava.

No ano de 1929 Gödel defendeu o doutorado demonstrando o teorema da completude da lógica de predicados, era um problema aberto da Matemática que vinha sendo trabalhado por Skolem, o qual tinha sido apresentado no livro *Grundzüge der theoretischen Logik* (Princípios de Lógica Matemática), (Hilbert & Ackermann, 1928). Este fato sugere que Gödel, assim se colocando para resolver tal problema, se propõe a contribuir com o Programa de Hilbert, o qual considerava razoável provar a consistência das formalizações da matemática clássica por meios finitários. Gödel demonstrou que no cálculo de predicados, havendo duas sentenças A e ~A, somente uma delas pode ser derivada das regras, se os axiomas e regras de inferência fossem precisos.

A respeito da mudança que ocorre com a posição de Gödel em relação ao Programa de Hilbert, Davis (2005) afirma

> Assim, ao longo dos anos Gödel passou de uma posição inicial de aliar-se com o programa de Hilbert, a manter a esperança de que seu próprio trabalho não tivesse destruído, para perceber com algum pesar que a esperança se foi, para finalmente falar do projeto com algo parecido com desdém (Davis, 2005, p. 233).

Dois anos depois da prova da completude do cálculo de predicados, Gödel demonstrou o teorema da incompletude da aritmética de Peano. No verão de 1930 ele teria começado a

[3] How indeed could one think of expressing metamathematics in the mathematical systems themselves, if the latter are considered to consist of meaningless symbols which acquire some substitute of meaning only through metamathematics? Or how could one give a consistency proof for the continuum hypothesis by means of my transfinite model Δ if consistency proofs have to be finitary? (Feferman, Dawson Jr., Goldfarb, Parsons & Solovay, 1995, p. 397-398).

ISSN 2764-3158

estudar o problema da consistência da análise clássica. Ele, num rascunho de uma carta não enviada, que seria uma resposta a Yossef Balas de uma carta data de 27 de maio de 1970, em Feferman *et al*. (1995), explicitou que foi levado ao teorema da incompletude quando estava buscando uma prova de consistência relativa da aritmética de segunda ordem (que ele chamou de "análise") na aritmética de primeira ordem. Para ele, um modelo aritmético de análise é uma relação aritmética de pertinência que satisfaz o axioma da compreensão, que é: $(\exists n)\ (x)\ x \in n \equiv \phi\ (x)$

> Se o último "φ (x)" é substituído por "φ (x) é demonstrável", a relação de pertinência pode ser facilmente definida. No entanto (e este é o ponto decisivo) decorre da solução correta dos paradoxos da semântica de que a "verdade" das proposições de uma linguagem não pode ser expressa na mesma linguagem, enquanto a demonstrabilidade (sendo uma relação aritmética) pode. Portanto, verdadeiro não é logicamente equivalente a provável (Davis, 2005, p. 231, tradução nossa).[4]

O próprio Gödel relata que tão logo começou a aprofundar-se no problema ficou intrigado com o motivo que influenciava David Hilbert (1862-1943) a tentar demonstrar a consistência diretamente por meios finitários. Ele anteviu dois problemas distintos e teria que provar a consistência da teoria dos números através da teoria finitária dos números e o outro, provar a consistência da análise através da teoria dos números.

A demonstração da completude da lógica de predicados estabeleceu que os axiomas e regras de inferência deste sistema eram suficientes para decidir todas as questões formalmente expressas neste sistema. A demonstração do teorema da incompletude estabelece que os axiomas e regras de inferência do sistema formal da aritmética não eram suficientes para decidir todas as questões formalmente expressas neste sistema. Na apresentação do resultado da incompletude Gödel expõe:

> É razoável por isso supor que estes axiomas e regras de inferência sejam também suficientes para decidir todas as questões em matemática que podem ser formalmente expressas nesses sistemas. No que se vai seguir mostrar-se-á que não é assim, mas antes que, em ambos os sistemas citados, existem problemas relativamente simples dos números inteiros que não podem ser decididos com base nos axiomas. Esta situação não depende da natureza especial dos sistemas construídos, mas aplica-se a uma vasta classe de sistemas formais (Gödel, 1977, p. 245).

Consideramos importante destrinchar como a demonstração da incompletude lhe ocorreu, uma vez que ele tinha efetuado a prova da completude e poderia estar vislumbrando a possibilidade, assim como todos os demais matemáticos à época, que seria apenas uma questão de tempo para sustentar que toda proposição bem formulada era demonstrável. O que Gödel teria vislumbrado que o fez pensar que seria impossível elaborar uma prova de consistência?

Gödel entende que elaborar uma prova da consistência dos axiomas significava conseguir isso apenas pela reflexão sobre combinações concretas finitas de símbolos, sem introduzir elementos mais abstratos, isso o fez desviar-se desse impedimento antevisto e estruturar a demonstração assim como o fez, partindo da hipótese de que a aritmética era consistente e levando às últimas consequências, que se apresenta na demonstração na parte em que Gödel constrói uma sentença verdadeira que não pode ser demonstrada como verdadeira e

---

[4] "For an arithmetic model of analysis is nothing else but an arithmetical ∈-relation satisfying the comprehension axiom: $(\exists n)\ (x)\ x \in n \equiv \varphi(x)$. Now if in the latter "φ(x)" is replaced by "φ(x) is provable", such an ∈-relation can easily be defined. However (and this is the decisive point) it follows from the correct solution of the semantic paradoxes that the "truth" of the propositions of a language cannot be expressed in the same language, while provability (being an arithmetical relation) can. Hence true $\not\equiv$ provable." (Davis, 2005, p. 231).

ISSN 2764-3158

nem ser refutada, se a aritmética é consistente.

Do exposto acima, entendemos que a visão de Gödel sobre como expressar a metamatemática foi fundamental na articulação que ele efetuou utilizando a numeração para mapear a metamatemática na aritmética e vice-versa. A vivência com a realização da prova da completude da lógica de predicados permitiu o entendimento de que provas finitárias poderiam ser realizadas por meio do modelo transfinito e que a prova da consistência dos axiomas de Peano solicitava que fosse demonstrado, apenas pela reflexão sobre combinações concretas finitas de símbolos, sem introduzir elementos mais abstratos. Por sua vez, essa compreensão da dificuldade da demonstração da consistência, por estes meios, o fez supor que a aritmética seria consistente e construir uma sentença indecidível. A existência de uma sentença indecidível, conforme ele afirma no início da demonstração, ele anteviu, diferentemente de todos os matemáticos contemporâneos a ele, que seria muito difícil conseguir provar todas as questões formalmente expressas nos sistemas formais somente por meio de axiomas e regras de inferência.

Estas concepções inspiraram Gödel na perspectiva de enfrentamento e na estratégia adotada, conforme anunciamos no início desta seção, serão ampliadas trazendo as intuições percebidas na demonstração - tais como, a intuição da numeração, dos números de Gödel, do uso dos números primos, o mapeamento das fórmulas, a visão das fórmulas como números, entre outras - e como compreendemos que os raciocínios lógico e matemático estão presentificados na demonstração do teorema da incompletude.

4 Considerações finais

Neste texto focamos em apresentar o que se mostrou relevante em termos de ideias que conduziram Gödel à abordagem utilizada por ele na demonstração. Esta pesquisa está em desenvolvimento e na versão final deverá abarcar as intuições que influenciaram Gödel no estabelecimento e na demonstração do teorema da incompletude, ou seja, intuições presentes na demonstração, que estão presentes na estrutura modelada para alcançar as conclusões e os raciocínios envolvidos em toda argumentação.

A construção do conhecimento matemático é assunto que permeia as discussões das diferentes correntes filosóficas da Matemática, desde Platão (428/427 – 348/347 a.C.) até os dias atuais. De acordo com Meneghetti (2009, p. 01) “exceto em Kant, o saber matemático ou foi considerado como objeto puro da razão, ou como objeto exclusivo da experiência ou da intuição.” Esta autora explica que duas correntes filosóficas se evidenciam neste período de Platão ao século XVIII, o empirismo e o racionalismo as quais se viam como opostas e excludentes, enquanto a primeira entendia que a base do conhecimento se apoia unicamente na experiência, para a segunda se assentava na razão. Nesse artigo, (Meneghetti, 2009) abrange o período desde Platão até o início do século XVIII, não inclui Husserl em suas discussões, porém, ela ressalta que

> No processo de constituição do conhecimento matemático não é possível atribuir maior valor ao aspecto intuitivo ou ao lógico, ou mesmo concebê-los como excludentes, portanto, defendemos que o intuitivo apóia-se no lógico e vice-versa, em níveis cada vez mais elaborados, num processo gradual e dinâmico, tomando a forma de uma espiral, sendo que, o equilíbrio entre esses aspectos deve estar presente em cada um dos níveis dessa espiral (Meneghetti, 2009, p. 01).

O entendimento de Meneghetti sobre a inseparabilidade dos conhecimentos intuitivo e lógico se alinha ao que entendemos com Husserl sobre intuição e formalização na produção e

ISSN 2764-3158

constituição do conhecimento matemático, embora o termo intuitivo utilizado por Meneghetti (2009) não seja no sentido de intuição da fenomenologia husserliana.

De outro ponto de vista, mas ainda sobre a produção do conhecimento matemático, Santos & Carvalho (2023) destacam a respeito da valorização dos aspectos analíticos e do menosprezo aos fatores subjetivos na comunidade matemática, neste caso se referem à demonstração do último teorema de Fermat:

> Torna-se claro a importância da face extralógica da matemática na experiência matemática. [...] Porém, deve-se ter em mente que as descobertas matemáticas são múltiplas, tem-se diversos e únicos modos de se compreender o mundo e a matemática (Monteiro dos Santos & Carvalho, 2023, p. 19).

Ainda que estejamos nos referindo à produção matemática, é importante destacar que, sobre qualquer que seja a teoria, no ensino desta é fundamental que haja preocupação do equilíbrio entre os aspectos intuitivos e lógicos, face lógica e extralógica e intuitivos e formais, nos termos de Meneghetti (2009), Santos & Carvalho (2023) e Batistela (2020, 2022b), respectivamente.

No estudo apresentado em Batistela (2022a) tomamos o teorema da incompletude em retrospecto e destacamos passagens da demonstração em que razões e motivações são comentadas por autores diversos. Assim o fizemos no entendimento que na produção do conhecimento matemático intuição e formalização se presentificam e que ao focarmos nestas passagens teríamos material que nos permitisse acessar aspectos do processo. Pudemos entender que Gödel possuía profundo conhecimento dos problemas centrais da Matemática vigentes à época, tinha domínio do ferramental da Lógica Matemática que permitiram exame detalhado do problema da consistência dividindo-o em duas partes e driblando obstáculos antevistos.

Gödel teve algumas evidências claras que foram determinantes na abordagem e na estrutura da demonstração. O *know-how* deste autor advindo do processo de elaboração da demonstração do teorema da completude, recém realizada por ele teria lhe permitido ter clareza de que o sistema formal da aritmética certamente não era completo, que a demonstração que o sistema não poderia provar todas as verdades presentes nos axiomas e preservadas pelas regras da lógica seria muito difícil. Junte-se a isso a clareza que ele teve sobre a impossibilidade de expressar a verdade de uma proposição de uma linguagem na mesma linguagem e a possibilidade de expressar naquela linguagem que uma proposição era provável na linguagem, caso a verdade fosse estabelecida como uma relação aritmética. E, por fim, o entendimento que o axioma da compreensão era nevrálgico para o problema da consistência dos axiomas da Análise.

Nesta ocasião, estas evidências claras são apresentadas como intuições que ocorreram a Gödel e que influenciaram seu fazer matemático. Além destas, neste trabalho apresentamos que a visão de Gödel sobre como expressar a metamatemática foi fundamental; que os entendimentos dele de que provas finitárias poderiam ser realizadas por meio do modelo transfinito e que a prova da consistência dos axiomas de Peano deveria ser obtida pela reflexão sobre combinações concretas finitas de símbolos foram determinantes na abordagem e na estruturação da argumentação.

As evidências trazidas acima ocorreram a Gödel e iluminaram com clareza caminhos possíveis e caminhos mais difíceis antevistos por ele para o teorema. As vivências com o ferramental e com o conhecimento do saber fazer advindo de outros trabalhos possibilitam a consubstanciação de indícios e hipóteses que possibilitaram uma percepção clara e pronta de

ISSN 2764-3158

como poderia ser realizada a argumentação que traria o resultado à comunidade. Entre os atos que estão presentes na atividade de formalização da Matemática estão também os raciocínios lógicos, embora haja a predominância do pensamento dedutivo, essa atividade é plasmada também na presença dos raciocínios indutivo, abdutivo e por analogia, além das intuições que trazem junto a elas uma ausência de dúvida acerca daquele entendimento e das estruturas essenciais dos objetos em elaboração.

No que diz respeito a como esta pesquisa reflete ocupações prévias frente aos desafios do cotidiano escolar, entendemos que a apresentação das intuições presentificadas na perspectiva de ataque ao problema da consistência, na estratégia adotada e na demonstração em si podem vir a contribuir com o ensino de matemática, na medida em que permite apresentar este resultado como intencionalmente percebido e compreendido, que enquanto objeto da matemática "não são efetividades que estão no mundo real, passíveis de observação e apreensão empíricas. São, pois, objetos ideias constituídos na intencionalidade da subjetividade transcendental e inseparáveis das experiências vividas no mundo-vida." Wichnoski (2023, p. 10).

A formação de professores de matemática pode ser enriquecida com as discussões elaboradas nesta pesquisa, pois adiciona a intuição de essência como um terceiro pilar, além do formalismo e do estruturalismo, na abordagem de ideias, processos e significados que possibilitaram a demonstração deste teorema. Este, ao ser trabalhando, por meio de um exercício em Filosofia da Educação Matemática, buscando que os licenciandos se abram ao entendimento da metamatemática "evitando que permaneçam prisioneiros de algumas de suas partes desconexas" Batistela & Bicudo (2023, p. 06) e compreenderem a construção da Matemática, "do ponto de vista do encadeamento lógico de uma teoria e das demonstrações no âmbito das teorias, das ideias que impelem esse encadeamento e dos aspectos da realidade (ontologia) dos objetos matemáticos." e a inevitabilidade da incompletude das teorias que contém os axiomas de Peano e o alcance da Matemática em termos de verdade matemática e demonstrabilidade.

Referências

Ales Bello, A. (1986). *Husserl e le scienze*. Tradução de M. A. V. Bicudo; J. C. Bortolete; R. F. Batistela. (1. ed.). Roma: La Goliardica Editrice Universitaria di Roma.

Barco, A. (2013). Fenomenologia da Geometria. In: *Anais do 5º Congresso de Fenomenologia da Região Centro-Oeste* (pp. 1-10). Goiânia, GO.

Batistela, R. de F.; Bicudo, M. A. V. & Lazari, H. (2020). Demonstrações Alternativas e Re-Demonstrações na Produção e no Ensino de Matemática. *Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática*, 13(2), 203–210.

Batistela, R. F. (2022). Do sentido de beleza em Matemática e do que se mostrou belo para nós na demonstração dos teoremas da incompletude de Gödel. *Educação Matemática Pesquisa*, 24(2), 618-646.

Batistela, R. F. (2022). Una mirada a las condiciones sociohistóricas del surgimiento y demostración del teorema de incompletitud de Gödel en 1931. *Revista del Centro de Investigaciones Educacionales Paradigma*, *43*(2), 454-470.

Batistela, R. F. & Bicudo, M. A. V. (2023). Uma possibilidade de uma educação metamatemática trabalhando com o teorema da incompletude de Gödel. *Revista de Educação Matemática*, 20, e023070.

ISSN 2764-3158

Batistela, R. F.; Paulo, J. P. A. & Bicudo, M. A. V**.** (2023). Da intuição à formalização: Um estudo da produção do conhecimento matemático. In: *Anais do 2º Seminário Avançado em Fenomenologia: Uma Filosofia Fenomenológica da Educação Matemática* (pp. 17-20). Sorocaba, SP.

Bicudo, M. A. V. (2010). Filosofia da Educação Matemática segundo uma perspectiva fenomenológica. In: M. A. V. Bicudo (Org). *Filosofia da Educação Matemática: Fenomenologia, concepções, possibilidades didático-pedagógicas*. (1. ed., pp. 23-48). São Paulo, SP: Editora UNESP.

Bornheim, G. A. (2003). *Introdução ao filosofar: o pensamento filosófico em bases existenciais*. (11. ed.). São Paulo, SP: Globo.

Bortolete, J. C. (2024). *O pensar algébrico: uma perspectiva fenomenológica*. 2024, 218 f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Universidade Estadual Paulista, Rio Claro.

Bourbaki, N. (1950). *The Architecture of Mathematics*. The American Mathematical Monthly, 57 (4), 221-232.

Davis, M. (2005). What Did Gödel Believe and When Did He Believe It? *The Bulletin of Symbolic Logic*, 11(2), 194-206.

Depraz, N. (2008). *Compreender Husserl*. (1. ed.). Petrópolis, RJ: Editora Vozes.

Feferman, S.; Dawson Jr., J. W.; Goldfarb, W.; Parsons, C. & Solovay, R. (1995). Kurt Gödel - Collected works, v. 3. *Unpublished essays and lectures*. Oxford: Oxford University Press.

Fontana, V. F. (2007). Intuição de essências na Fenomenologia de Husserl. *Revista Faz Ciência*, 9, 167-183, 2007.

Gödel, K. (1977). Acerca das Proposições Formalmente Indecidíveis dos Principia Mathematica e Sistemas Correlatos. In: M. Lourenço (Org.). *O Teorema de Gödel e a Hipótese do Contínuo* (1.ed., pp. 245-290). Lisboa: Fundação Calouste Gulberkian.

Grzibowski, S. (2016). Intuição e percepção em Husserl: leituras de Emmanuel Levinas. *Revista NUFEN: phenomenology and interdisciplinarity*, 8(2), 65-76.

Hilbert, D. & Ackermann, W. (1928). *Grundzuge der theoretischen Logik*. Berlin: Julius Springer.

Husserl, E. (1974). *A origem da geometria*. Tradução de M. A. V. Bicudo. Disponível em: www.sepq.org.br.

Husserl, E. (2006). *Ideias para uma fenomenologia pura e para uma filosofia fenomenológica*. (1.ed.). Aparecida, SP: Idéias & Letras.

Husserl, E. (1980). *Investigações Lógicas: Sexta Investigação.* Tradução de Zeljko Loparic e Andréa Maria Altino de Campos Loparic. Coleção Os Pensadores. São Paulo: editora Abril.

Husserl, E. (1980). *Investigações lógicas: Sexta investigação. Tradução de* Z. Loparic & A. M. A. C. Loparic. Coleção Os Pensadores. Editora Abril.

Meneghetti, R. C. G. (2009). O Intuitivo e o Lógico no Conhecimento Matemático: análise de uma proposta pedagógica em relação a abordagens filosóficas atuais e ao contexto educacional da matemática. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 2(32), 161-188.

Santos, A. M. & Carvalho, H. M. (2023). A face extralógica do último Teorema de Fermat: um ensaio sobre a filosofia da prática matemática. Revista de Educação Matemática, 20, e023078.

ISSN 2764-3158

Wilder, R. L. (1965). *Introduction to the Foundations of Mathematics*. (2. ed.). New York: Wiley.

ISSN 2764-3158