

A gênese documental de uma atividade de modelagem matemática por uma professora em formação

The documentary genesis of a mathematical modelling activity by a teacher in education

Karina Alessandra Pessoa da Silva¹
Adriana Helena Borssoi²
Emerson Tortola³

Resumo: Este artigo evidencia o que uma professora em formação em modelagem matemática leva em consideração no processo de gênese documental de uma atividade de modelagem. A atividade foi planejada e a experiência foi compartilhada no âmbito da disciplina de Modelagem Matemática de um mestrado. Por meio de análise qualitativa da transcrição de áudios e vídeos e registros fotográficos, subsidiada na Abordagem Documental do Didático, evidenciamos que o plano estruturado pela professora no decurso da gênese documental foi inspirado em uma atividade desenvolvida no contexto da disciplina de mestrado, todavia uma imprevisibilidade reconduziu suas ações na prática. Com o compartilhamento da experiência, o documento passou por reelaboração com sugestões de outros professores em formação que indicaram recursos para a sua adequação.

Palavras-chave: Modelagem Matemática. Formação de Professores. Abordagem Documental do Didático. Planejamento Coletivo.

Abstract: This paper highlights what a teacher in education in mathematical modelling takes into consideration in the process of documentary genesis of a modelling activity. The activity was planned and the experience was shared within the scope of the Mathematical Modelling discipline of a master's degree. Through qualitative analysis of the transcription of audios and videos and photographic records, supported by the Documentational Approach to Didactics, we showed that the plan structured by the teacher during the documentary genesis was inspired by an activity developed in the context of the master's course, however unpredictability renewed its actions in practice. With the sharing of experience, the document underwent re-elaboration with suggestions from other teachers in education who indicated resources for its adaptation.

Keywords: Mathematical Modelling. Teacher Education. Documentational Approach to Didactics. Collective Planning.

1 Introdução

A formação de professores em Modelagem Matemática tem ocupado boa parte da comunidade de membros do Grupo de Trabalho em Modelagem Matemática (GT10) da Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM), a exemplo do que ocorre com a comunidade internacional. Galbraith (2024) faz reflexões sobre o desenvolvimento na área da Modelagem Matemática ao longo de trinta anos, sendo um dos três temas abordados a formação de professores em modelagem. Para ele, uma mudança significativa nos interesses dos membros da *International Community of Teachers of Mathematical Modelling and Applications* (ICTMA) ocorreu, atualmente as atenções estão voltadas aos educadores dos ensinos

¹ Universidade Tecnológica Federal do Paraná • Londrina, Paraná — Brasil • ✉ karinasilva@utfpr.edu.br • ORCID <https://orcid.org/0000-0002-1766-137X>

² Universidade Tecnológica Federal do Paraná • Londrina, PR — Brasil • ✉ adrianaborssoi@utfpr.edu.br • ORCID <https://orcid.org/0000-0002-1725-6307>

³ Universidade Tecnológica Federal do Paraná • Toledo, PR — Brasil • ✉ emersonortola@utfpr.edu.br • ORCID <https://orcid.org/0000-0002-6716-3635>

fundamental e médio. “Assim, o desenvolvimento da formação de professores emergiu como um interesse principal, ilustrado por um foco crescente na educação em modelagem de professores em formação e em exercício” (Galbraith, 2024, p. 138).

Considerando apontamentos dos últimos relatórios do GT10, elaborados a partir do Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática (SIPEM), dentre eles, a necessidade de superação da lacuna entre a pesquisa e a prática de modelagem, e levando em conta a temática desta edição do evento: “Pensar a Educação Matemática pela pesquisa frente aos desafios do cotidiano escolar e responsabilidade social”, escolhemos discutir um contexto em que, para os professores que ensinam matemática nas escolas brasileiras tem se mostrado cada vez mais desafiador: o de levar para a sala de aula práticas como as de modelagem ao mesmo tempo em que há a exigência de cumprir um currículo rígido (Dalto, Borssoi & Silva, 2024, Malheiros, Souza & Forner, 2021).

As discussões que trazemos à comunidade estão sendo investigadas no âmbito de um projeto de pesquisa sobre formação de professores pautado em oportunizar aos participantes aprender sobre, aprender por meio e ensinar usando modelagem matemática. Alguns resultados foram compartilhados em Silva, Tortola, Koga e Koga (2021), onde a atividade de modelagem matemática é tomada como um recurso que subsidia a construção de um documento, no sentido da Abordagem Documental do Didático (ADD), que foi constituído como um trabalho documental coletivo.

A ADD, uma teoria associada à Didática da Matemática Francesa, segundo Igliori (2021), tem-se firmando nacionalmente como uma teoria importante para a análise do desenvolvimento profissional do professor. No prefácio do livro “Compreender o trabalho dos professores brasileiros do ensino básico: uma abordagem pelos recursos”, Luc Trouche, um dos precursores da teoria ADD, alega que na atual “profusão de recursos educativos sobre a web, a abordagem do trabalho dos professores a partir de suas interações com seus recursos é uma necessidade para compreender as metamorfoses desse trabalho” (Igliori, 2021, p. 5).

Neste artigo também consideramos a modelagem matemática como recurso e focamos a atenção na gênese documental, a qual “[...] tem por objetivo compreender o processo de formação de documentos por meio da interação do professor com recursos ao longo de um determinado tempo” (Xavier Neto, Silva & Trouche, 2021, p. 342). Para Trouche, Gueudet e Pepin (2018), o trabalho documental do professor é o motor de uma gênese documental, que se dá na articulação de um recurso com seu esquema de utilização, o que gera um documento, o qual pode se materializar por meio de um plano ou notas de aula, sequências didáticas etc.

Com a questão de pesquisa: *quais ações são empreendidas por uma professora em formação em modelagem matemática no processo de gênese documental de uma atividade de modelagem?*, buscamos compreender o processo de gênese documental no planejamento e na implementação de uma atividade de modelagem em um *design* de formação constituído em uma disciplina de mestrado no primeiro semestre de 2024. Resultados de um *design* realizado na mesma disciplina, porém desenvolvido remotamente, em 2021, pode ser consultado em Dalto *et al.* (2024).

Em seguida será apresentado o quadro teórico referente à formação de professores em modelagem matemática e à Abordagem Documental do Didático, em especial sobre a gênese documental. Depois, uma seção de aspectos metodológicos vem caracterizar o *design* de formação investigado e justificar as escolhas de participante e dos dados analisados sob uma abordagem qualitativa. Posteriormente, é realizada a descrição e análise trazendo resultados da investigação e são apresentadas as considerações finais.

2 Quadro teórico

Assumimos a modelagem matemática como uma alternativa pedagógica como um modo próprio de busca por “uma solução para um problema identificado em uma situação da realidade e inclui a construção e validação de um modelo matemático” (Almeida, 2018, p. 20). Na visão de Galbraith (2024, p. 139), um objetivo primordial no contexto educacional é “capacitar mais alunos a aplicar mais matemática de forma mais eficaz a mais problemas que importam para eles agora e em suas vidas futuras”.

Atualmente, a formação continuada de professores em modelagem matemática tem sido um dos interesses principais dos membros do ICTMA. Segundo Galbraith (2024, p. 138), estão na agenda da comunidade interesses como:

identificação e papel dos facilitadores no ensino e na aprendizagem da modelagem; necessidades em termos de preparação e suporte de professores; um foco no papel que a ‘autenticidade’ desempenha ou deveria desempenhar no *design* e implementação de tarefas; como a pesquisa pode e/ou deve ser direcionada para avançar na área; e tecnologia como uma provisão facilitadora ao longo de todo o processo de modelagem.

Reconhecendo na modelagem potencialidades para aprender matemática é que esforços são concentrados em implementar atividades de modelagem nas aulas de Matemática. Para esse propósito, os professores precisam estar preparados para desempenhar um papel ativo na organização, na implementação e na avaliação dessas atividades (Almeida, Silva & Vertuan, 2012). Dentre os fatores que causam insegurança aos professores está a imprevisibilidade do que pode surgir quando os alunos são convidados a delinear a abordagem de uma situação-problema (Pinto & Araújo 2021a). Afinal, cada problema é diferente e os conteúdos são abordados de acordo com as características de cada situação, além de estarem de acordo com o conhecimento dos alunos no papel de modeladores.

Dalto *et al.* (2024), subsidiados nos princípios listados por Borromeo Ferri (2018) para planejar e implementar aulas com modelagem, evidenciaram que uma dupla de professoras, no planejamento de uma prática, considerou os interesses dos alunos, a antecipação dos conteúdos, a promoção de trabalhos em grupo e a utilização de recursos tecnológicos. Essas ações, em certa medida, estavam em consonância com o *design* de formação em modelagem instaurado no âmbito educacional constituído de forma síncrona e remota.

Seguindo os mesmos princípios, embora em ambiente presencial, o *design* de formação abordado neste artigo, compreende momentos de discussão conjunta sobre o planejamento e a implementação de atividades de modelagem matemática. Levando em conta o que defendem Pinto e Araújo (2021b, p. 2014), para as quais, “o planejamento coletivo de atividades de modelagem pode representar uma potencial forma de trabalho para a eficácia da atividade que se planeja”, em especial para professores com pouca experiência com práticas de modelagem. Com base em trabalhos do educador matemático Dario Fiorentini, as autoras consideram que o planejamento coletivo de atividades de modelagem matemática pode se caracterizar a partir de aspectos do trabalho colaborativo: “voluntariedade, identidade e espontaneidade; liderança compartilhada e corresponsabilidade; apoio, respeito mútuo e reciprocidade de aprendizagem” (Pinto & Araújo, 2021b, p. 2017).

No desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática, alguns recursos disponíveis em fontes variadas podem subsidiar o planejamento dos professores. Ponderamos, contudo, que esses recursos constituem “um conjunto de peças, e vai caber a eles [professores] realizarem uma montagem com a perspectiva de elaborar uma trajetória coerente de

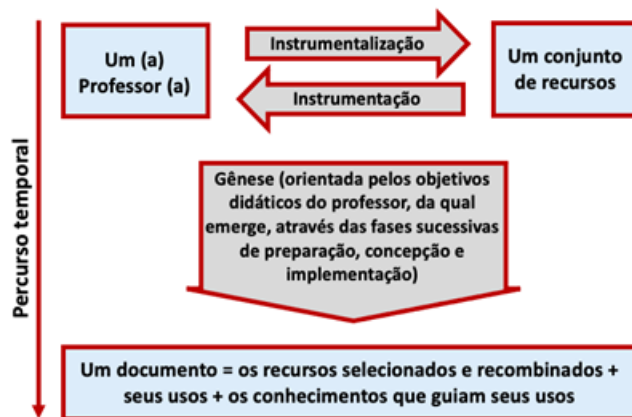
aprendizagem do aluno” (Trouche *et al.*, 2018, p. 4). Na elaboração da trajetória, é preciso que o professor desenvolva novos entendimentos e reconheça o contexto da sala de aula que leciona, interagindo com os recursos para esquematizar sua utilização.

Dentre os recursos que podem subsidiar o planejamento de uma atividade de modelagem, possibilitando interações dos professores e dos alunos com a situação-problema e a matemática que dela emerge, podemos considerar os digitais, os materiais, os sociais e os cognitivos. Nesse contexto, existe um amplo espectro de recursos, tais como livros didáticos, recursos online, trocas de e-mail e conversas com colegas, ou ainda produções de alunos (Trouche *et al.*, 2018).

A integração de tecnologias digitais é cada vez mais vista como um meio de aprimorar a competência dos alunos em modelagem, conforme enfatizado em diretrizes curriculares (Niss & Blum, 2020). Conforme sugere Cevikbas (2024, p. 225), “a tecnologia pode nos permitir (a) coletar e manipular dados do mundo real para lidar com um problema da vida real, (b) reduzir e simplificar operações, (c) fazer conexões matemáticas e (d) testar a validade dos modelos com experimentos computacionais”.

De posse de diferentes recursos articulados com os esquemas produzidos pelo professor para atingir um determinado objetivo didático, Gueudet e Trouche (2008) delinearam o conceito de documento, via Gênese Documental. A documentação, ação para a obtenção do documento, é subsidiada pela “busca por recursos; a seleção e criação de tarefas matemáticas; o planejamento de sequências de atividades; o gerenciamento do tempo disponível e a administração dos artefatos disponíveis” (Abar, Almeida & Dias, 2021, p. 126). Há, com isso, a inter-relação de dois processos: a *instrumentação*, em que o artefato, constituído por um conjunto de recursos modela a ação e a *instrumentalização*, em que o artefato é moldado pela ação dos sujeitos (o professor) a partir de seus conhecimentos e modos de trabalho. Essa abordagem da gênese documental pode ser representada por um esquema (Figura 1).

Figura 1: Esquema da Gênese Documental



Fonte: Trouche, Gueudet & Pepin (2018)

Para Abar *et al.* (2021), o desenvolvimento profissional se delinea nas diferentes gêneses documentais dos professores. No âmbito da formação de professores em modelagem matemática, o trabalho documental que culmina no plano de aulas para uma prática pode ser produzido via gênese documental.

3 Encaminhamentos metodológicos

Desde 2016 temos estruturado a disciplina de Modelagem Matemática de um programa de pós-graduação *Stricto Sensu* em Ensino de Matemática seguindo os eixos de formação

aprender sobre, aprender por meio e ensinar usando modelagem (Almeida *et al.*, 2012). Porém, a partir de 2021, com a aprovação do projeto de pesquisa no Edital Universal do CNPq, temos nos debruçado com mais afinco no estabelecimento de articulações teóricas relativas a esses eixos de formação.

No primeiro semestre de 2024, a disciplina manteve essa estrutura de formação, em que professores estudaram textos teóricos sobre modelagem, desenvolveram atividades como modeladores, planejaram e implementaram práticas com alunos da Educação Básica. Neste artigo nos debruçamos em analisar o processo de gênese documental de uma atividade de modelagem, em que lançamos um olhar para o planejamento, a implementação e a reflexão de uma prática. Desse modo, entendemos que os eixos de formação se entrelaçaram no sentido de que, para planejar uma prática, considerações sobre o que é, como fazer e para que fazer subsidiaram as interlocuções estabelecidas nas ações dos professores em formação.

A disciplina, com carga horária de 45 horas, foi ministrada em quinze encontros de três horas cada, às sextas-feiras pela manhã, no período de 08/03 a 05/07. Ela foi iniciada com dez professores, que foram informados sobre a pesquisa em desenvolvimento e assinaram um termo de consentimento livre e esclarecido para que as aulas fossem gravadas. Os professores são referenciados no corpo do texto por nomes fictícios e a professora da disciplina por Prof. Durante o semestre, dois professores desistiram; dos oito que continuaram, um não implementou a prática (Pedro), uma professora implementou nos anos iniciais de uma escola particular (Keila), uma em escola cívico militar (Joana), três no contexto de Itinerários Formativos (Ana, Elisa e Vander), um em um colégio vinculado a uma universidade (Guto) e uma professora implementou nas aulas da disciplina de Matemática (Déia).

Considerando nossos interesses de investigação, elegemos a professora Déia para trazermos reflexões para a questão de pesquisa: *quais ações são empreendidas por uma professora em formação em modelagem matemática no processo de gênese documental de uma atividade de modelagem?* Déia é licenciada em Matemática, leciona na Educação Básica desde o ano de 2021, cursou uma disciplina de modelagem na graduação, porém não teve oportunidade de implementar uma prática em sala de aula. Para o planejamento e a implementação da prática, escolheu uma turma do 7º ano do Ensino Fundamental, disciplina de Matemática, de uma escola pública do interior do Paraná.

Os dados que subsidiaram nossas análises foram as transcrições de áudios e descrições de vídeos produzidos nos encontros da disciplina em que Déia relatou o planejamento (8º encontro, no dia 03/05) e a implementação (10º encontro, no dia 17/05), juntamente com imagens do desenvolvimento da atividade de modelagem sob a temática *ponte de guarda-chuvas do Lago Igapó II* em 5 horas-aula nos dias 08, 09 e 16 de maio, com 31 alunos do 7º ano. A análise dos dados é respaldada em uma abordagem qualitativa em que nos amparamos na Gênese Documental do professor que possibilita “pesquisar como ele cria os esquemas para o uso de recursos, [...] e como eles podem transformar sua prática pedagógica para contribuir com a aprendizagem do aluno” (Abar, 2019, p. 219). Com essa abordagem, temos o objetivo de entender as ações empreendidas por uma professora – a Déia – no processo de gênese documental de uma atividade de modelagem.

4 Descrição e análise

No encontro da disciplina para o planejamento da prática a ser implementada, foram retomadas as diferentes atividades de modelagem matemática desenvolvidas pelos professores como modeladores, bem como as presentes nos artigos científicos estudados até o momento. Os registros das atividades constituem recursos que podem ser “selecionados, modificados e

recriados de modo a subsidiar o objetivo didático” (Silva *et al.*, 2021, p. 37). Além de retomar as atividades, foram compartilhadas as expectativas e as angústias para a implementação, em que os professores relataram a necessidade de cumprir um currículo rígido exigido pelo governo do estado do Paraná, em que teriam de seguir o Registro de Classe Online (RCO).

Para o contexto da sala de aula da Educação Básica, com o objetivo didático de implementar uma atividade de modelagem, Déia primeiramente elencou recursos que poderiam ser utilizados para trabalhar com uma situação-problema sobre reforma de um local considerado turístico na cidade em que reside:

Déia: [...] eu estou pesquisando, partindo um pouco da ideia da rodoviária [atividade desenvolvida no âmbito da disciplina de mestrado], procurar alguma coisa em Londrina e eu estou vendo aqui o lago Igapó II. Eu vi uma reportagem recente [de 2023] reclamando muito da situação das duas pontes que têm nesse lago. Eu pensei em trabalhar a questão da reforma dessas duas pontes: o material, a questão das tábuas, as medidas. Ontem no laboratório, depois que eles [alunos] terminaram a minha atividade, ficaram no *Street View* olhando as ruas deles, teve um que foi até para Nova Iorque! Então pensei em usar essa ferramenta já que alguns têm essa facilidade. Eu não fixei muito essa ideia, como levar esse problema para eles, trabalhar essa questão porque daí pelo *Street View* eu consigo ver certinho, não sei se eu consigo estabelecer o tamanho dela, mas eu consigo ver as tábuas.

Prof: Eu acho que dá para ver o tamanho sim ou usar o *Google Earth* para olhar ali e ver a largura da ponte [...].

Déia: É, eu acho que é mais questão das tábuas porque a ponte de guarda-chuva ela teve uma nova decoração mas não teve uma reforma. [...] Então tem vários questionamentos: Precisaria dessa ponte com o guarda-chuva?

Prof: Até assim, pode ser uma situação: quando eles vão trocar os guarda-chuvas, dependendo do tamanho do guarda-chuva, é uma quantidade que eles precisam. [...]

Déia: Se fosse colocar guarda-chuva na outra ponte?

Prof: Aí tem a largura da ponte, a largura do guarda-chuva, o diâmetro né, pode pensar nisso, [...] Acho que ia ficar legal Déia sobre os guarda-chuvas.

Déia: [...] vou pegar uma cartolina e pedir para eles fazerem um esboço, fazer um desenho da ponte. Seria legal se eu conseguisse um guarda-chuva bem colorido para levar para eles medirem e ver, qual é o espaço que tem que ter entre eles.

De antemão, Déia retomou um encaminhamento para a atividade que estava planejando implementar com seus alunos muito próximo do que havia feito na disciplina de mestrado, em que, por meio do *Google Earth*, os professores em formação produziram dados quantitativos para estudar sobre uma possível reforma do telhado de uma rodoviária da cidade. Há, neste contexto, o processo de instrumentação, em que a atividade da rodoviária foi subsidiada por um conjunto de recursos que modelou a ação de Déia e para ela foi relevante. Ao considerar os recursos presentes nesta atividade desenvolvida como modeladora, Déia buscou iniciar a produção de um documento que “pode ser resolvido através de todas as etapas do ciclo de modelagem” (Borromeo Ferri, 2018, p. 80). Além disso, ponderamos assim como Xavier Neto, Silva e Trouche (2019, p. 310), que “frente a novos recursos, os professores recorrem aos repertórios que possuem de invariantes e estes são modificados gerando novos invariantes”.

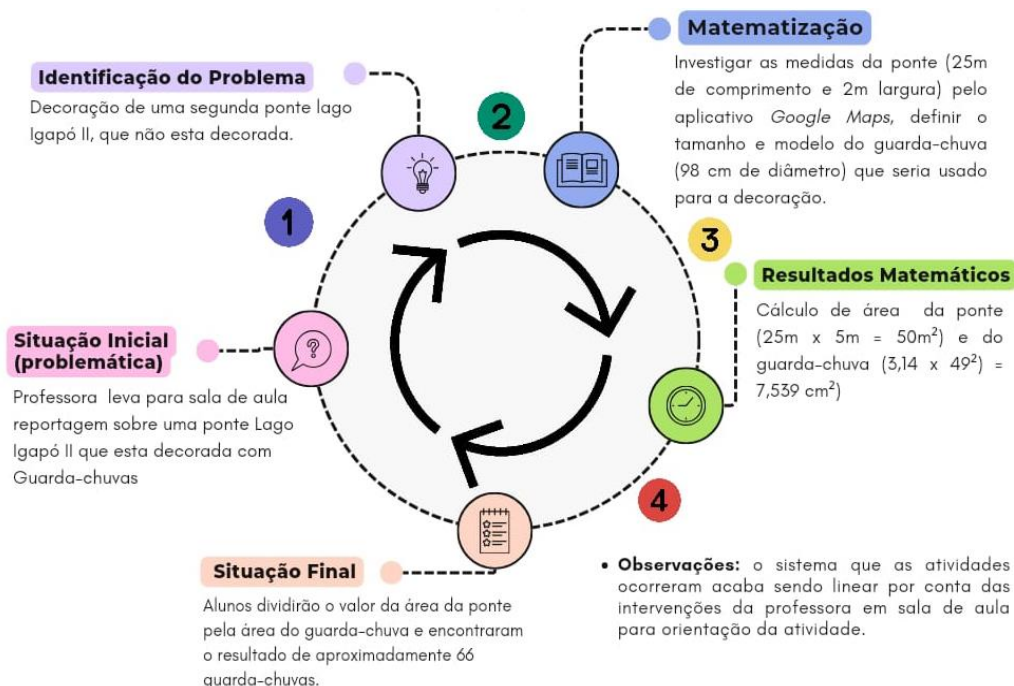
Ao reconhecer a familiaridade dos alunos para com um recurso digital, para “coletar e manipular dados do mundo real” (Cevikbas, 2024, 225), bem como sugerir o uso da cartolina para realizarem os registros, foi sinalizado um aprimoramento no processo de instrumentação (Trouche *et al.*, 2018) que orientou o objetivo didático de Déia – implementar uma atividade de modelagem, cuja situação estava presente na cidade em que os alunos residiam. Todavia, o delineamento de estudo – inserção de guarda-chuvas em uma ponte da cidade – se estruturou em conversa com a Prof.

No contexto da formação de professores, no âmbito do planejamento da prática, a possibilidade de Déia ouvir e ser ouvida constituiu “o motor de uma gênese documental” (Trouche *et al.*, 2018, p. 4), em que se estruturou a situação-problema a ser investigada. A escolha da situação-problema para o desenvolvimento de uma atividade de modelagem por Déia “imprime um controle mais explícito por parte do professor” (Silva & Oliveira, 2014, p. 54), que depende dos seus objetivos didáticos. Com isso, há a possibilidade de planejar suas orientações, bem como antecipar os encaminhamentos a seguir.

Considerando as turmas com as quais trabalhava em 2024 – 7º ano do Ensino Fundamental e 1ª série do Novo Ensino Médio –, Déia optou pela primeira, visto que se tratava de uma turma cujo conteúdo do RCO estava adiantado: “Vou fazer na quinta-feira, acho que em duas aulas sai. Estou trabalhando com o 7º ano. Eu até queria trabalhar com ensino médio, mas estou muito atrasada” (relato de Déia durante planejamento).

Em seu plano, Déia primeiramente considerou disponibilizar para os alunos uma reportagem sobre uma das pontes que tem guarda-chuvas em sua decoração e deixá-los trocar ideias e buscar novas informações, caso tivessem curiosidade ou mesmo não conhecessem o local do qual estavam investigando. Vislumbrando a necessidade de visita virtual ao local, utilizando seja o *Street View* ou o *Google Earth*, solicitou autorização da direção da escola para o uso do telefone celular nas aulas planejadas para o desenvolvimento da atividade para que os alunos coletassem os dados necessários para calcular: *Quantos guarda-chuvas são necessários para enfeitar a ponte do lago Igapó II?* A matematização foi caracterizada pelos dados quantitativos relativos às dimensões da ponte e dos guarda-chuvas a serem utilizados na sua decoração. Os resultados matemáticos consistiram em calcular as áreas da ponte (A_p) e de cada guarda-chuva (A_g), que dependia do diâmetro (d) do modelo escolhido, configurando um modelo matemático para a obtenção da solução para o problema, relativo à quantidade Q de guarda-chuvas. Na Figura 2 está representado o ciclo de modelagem que Déia documentou para o planejamento de sua prática com os alunos do 7º ano, que configurou uma “trajetória coerente de aprendizagem do aluno” (Trouche *et al.*, 2018, p. 4).

Figura 2: Ciclo de modelagem para a atividade ponte de guarda-chuvas do lago Igapó II



Fonte: Relatório de Déia

Na implementação de atividades de modelagem, o plano de aula “pode passar a ser um orientador da ação docente e contribuir para a segurança do professor” (Pinto & Araújo, 2021a, p. 22). No entanto, como orientador, pode ser reestruturado e adaptado mediante as ações que se fizeram presentes no momento de seu desenvolvimento, conforme relatado por Déia no compartilhamento da experiência com os colegas professores:

Déia: Então, na primeira aula assim, eu levei um texto, que tá no *site* do Blog Londrina, [...]. No início, eles gostaram bastante, eles leram o texto em grupo, dividi em grupos de quatro a cinco pessoas [...] Eles questionaram... começaram: eu nunca fui, eu não conheço, aí os colegas falaram: eu fui professora, posso pegar o celular e mostrar uma foto de quando eu fui? Eu autorizei, daí a usar o celular na minha aula e os tablets também. Então eles leram. A primeira aula foi só para leitura do texto. Perguntei para eles se alguma coisa os incomodava no lago, referente ao turismo né, se alguma coisa atrapalhava. A maioria, na verdade, não encaminhou do jeito que eu queria, que eu imaginava. A maioria deles falou que a questão da poluição do ar era o que atrapalhava o turismo, a conversa foi sobre isso, então daí, depois das discussões, encerrou a aula. [...] eu achei legal que eles pegaram o *link*, que eu só apresentei no final da reportagem, e foram lá na página, no Blog Londrina mesmo, para acessar a reportagem através do tablet e outros já foram mais em busca de imagens.

A reportagem, em forma de texto e imagem (Figura 3), foi um recurso disponibilizado por Déia para a inteiração dos alunos com a situação-problema, em que vislumbrou a possibilidade deles conhecerem as “características e especificidades da situação” (Almeida *et al.*, 2012, p. 15). Trata-se de um recurso que constitui um sistema para o trabalho documental providenciado por Déia para a constituição de seu planejamento da prática com modelagem matemática. O acesso ao *link*, que não estava no planejamento, bem como a busca por outras fotos da ponte de guarda-chuvas auxiliou na inteiração com dados qualitativos para a situação.

Figura 3: Reportagem disponibilizada aos alunos

Ponte dos Guarda-Chuvas coloridos é a nova atração no Lago Igapó II

Prefeito Marcelo esteve hoje (27 de maio de 2021), pela manhã, para conhecer a nova decoração da ponte, que foi feita pela empresa Brandt, que adotou o local pelo programa Boa Praça, em parceria com a Codel



As pessoas reparam, param e fazem *selfies*, fotografam, filmam. A nova vedete das imagens londrinenses é a Ponte dos Guarda-Chuvas, lançada hoje, quinta-feira, no Lago Igapó II, pela Prefeitura de Londrina. A exemplo de algumas cidades do mundo, Londrina agora conta com uma passarela enfeitada com guarda-chuvas coloridos, que fica entre as avenidas Maringá e a Ayrton Senna. Não foi preciso gastar recursos públicos para promover o encantamento. A ideia do Instituto de Desenvolvimento de Londrina (Codel) foi colocada em prática pelo programa Boa Praça, no qual empresas tornam-se responsáveis por áreas públicas.

Todo o entorno da área também será cuidado a partir de agora pela empresa Brandt, produtora de insumos agrícolas presente em 65 países no mundo, e que se tornou, com a parceria, responsável pelos custos e manutenção do projeto. A empresa, há seis anos no Brasil, decidiu investir no Lago Igapó II para agradecer de alguma forma a boa recepção que teve em Londrina, onde mantém um escritório.

Fonte: Relatório produzido por Déia

Os alunos, com os questionamentos de Déia, se prenderam na discussão sobre a poluição e seguiram um encaminhamento diferente do planejado. Porém, como a intenção da professora era abordar a decoração da ponte do lago Igapó II, permanecendo no planejamento, orientou os alunos, em aula posterior, a investigarem sobre esse local:

Déia: Já na segunda aula, eu já trouxe a situação-problema, porque eu percebi que ela não ia encaminhar como eu queria, não sei se foi um erro ou não né, [...] questionei: tem alguma foto do lago Igapó ou só do guarda-chuva? Aí eu perguntei sobre a outra ponte do lago; se ela também tá decorada; se eles conheciam, a maioria não conhecia, aí foram pesquisar. E a primeira imagem é de uma menina pesquisando [se referindo à Figura 4], no *Street View* e ali no *Google Earth*. Eles baixaram o aplicativo, mostrei esse aplicativo para eles. Eles não conheciam ainda. Baixamos no tablet e eles visualizaram pelo *Google Earth*, acharam um máximo! Começaram até pesquisar outros países também, ficaram olhando, visualizando ali e daí eu questionei né, trouxe a situação-problema em si: se a gente fosse decorar, seguindo a mesma estratégia da outra ponte, que é a decoração dos guarda-chuvas, quantos guarda-chuvas seriam necessários para poder fazer a decoração dessa ponte? Essa segunda aula eu perdi; eu perdi não, no caso, como eles não sabiam utilizar a ferramenta do *Google Earth*, nem eu, também tive que aprender antes de ir para a aula com eles, eu tive que ensinar grupo por grupo como fazer essa medição, [...] tive que mostrar, então essa aula foi praticamente para isso: eu trouxe a situação-problema e ensinei como utilizar a ferramenta *Medir* para eles também.

Como sugere Cevikbas (2024), o desenvolvimento e a adoção de tecnologias digitais tiveram impacto sobre as abordagens de ensino e aprendizado da modelagem matemática. Como podemos observar, Déia se antecipou ao se inteirar do uso de recursos como *Google Earth* para orientar os alunos no seu uso na abordagem da situação-problema pelos alunos. Quando a professora se apropria do “conhecimento de um instrumento, começa a desenvolver novos esquemas e vai organizando e integrando novas funções a esse instrumento que vai se modificando” (Abar, 2019, p. 221).

O uso do recurso já previsto no plano por Déia precisou ser ensinado aos alunos que, neste momento, também se inteiraram de um recurso tecnológico que permitiu a visita virtual, bem como coleta de dados quantitativos para o desenvolvimento de uma atividade matemática (Figura 4). Neste caso, as tecnologias digitais permitiram “[...] coletar e manipular dados do mundo real para lidar com um problema da vida real” (Cevikbas, 2024, p. 225).

Figura 4: Alunos utilizando o aplicativo *Google Earth* e *Street View* para localizar as duas pontes



Fonte: Relatório produzido por Déia

Para Cevikbas (2024), dentre as funcionalidades das tecnologias digitais em aulas, estão: introduzir ideias matemáticas e “ajudar a fechar a lacuna cognitiva que dificulta a capacidade dos alunos de concluir determinadas tarefas de modelagem” (p. 225). Além do que, as tecnologias digitais serviram como facilitadora ao longo de todo o processo de modelagem (Galbraith, 2024).

Porém, saber usar a ferramenta não garante que os alunos saibam proceder o uso para resolver um problema: determinar as medidas da ponte. Com isso, para além de saber manusear o recurso tecnológico, Déia empreendeu questionamentos para que os alunos se voltassem para a aula de matemática, em que a tradução da linguagem natural – decoração da ponte – passou a ser tratada em linguagem matemática – figura geométrica e suas dimensões –, conforme

transcrição:

Déia: Também teve a questão, que eu associei né, a qual figura geométrica que mais a ponte se parece, pra gente poder calcular essa medida. Também não surgiu deles! Outro ponto também, não surgiu deles, a questão de que seria necessário medir para poder decorar. Então, não partiu deles, eu tive que perguntar: gente, qual é o primeiro passo quando a gente quer decorar um lugar? O que que a gente tem que saber primeiro? O tamanho dele, daí eles respondiam. O que que a gente tem que fazer para saber o tamanho? Medir. Tá, a gente vai medir uma ponte, que jeito que tem que ser pra medir essa ponte? Um aluno falou: a gente vai lá pessoalmente, pega uma trena e mede. Então, no momento a gente vai ter que usar outra ferramenta, que figura geométrica a ponte parece? Tive que retomar o tempo todo, a questão de área também, quando foi calcular a área, eles falaram de associar com um retângulo, mas ninguém me respondeu como que era o cálculo de área, então tive que trabalhar com o cálculo da área do retângulo, trabalhei do retângulo e do quadrado, aí todos os grupos calcularam. Acho que isso eu fui concluir na terceira aula na verdade, não conclui na segunda.

Ao traçar a trajetória que antecipou para o desenvolvimento da prática para a sala de aula, Déia parece não ter mediado o que os alunos já sabiam sobre o conteúdo matemático *área de figuras planas*. Com isso, uma reestruturação nos encaminhamentos em aula se fez necessária de modo a retomar o conteúdo matemático e possibilitar o avanço dos alunos no desenvolvimento da atividade de modelagem (Almeida *et al.*, 2012). Essa mudança no *script* configurou uma ação a ser considerada na reestruturação do trabalho documental da atividade.

Déia: Era um sétimo ano, se eles viram ou não viram área, não me atentei a essa parte, eu não tinha trabalhado [o conteúdo] área com eles esse ano ainda.

Guto: Quinto e sexto tem, mas é o último assunto, às vezes não chega.

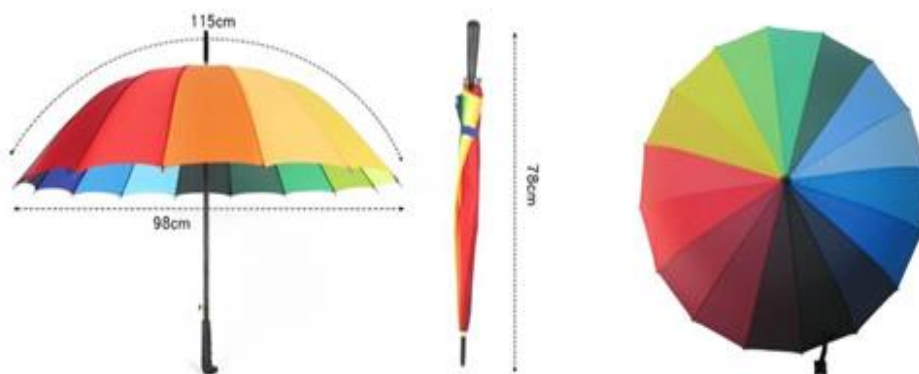
Déia: É, então eu tive que trabalhar, por isso que eu acho que ficou um pouco maçante a atividade também, quando entrou nessa parte de calcular, começou a ficar pesado para eles, porque daí eu só colocava o cálculo da área, mas não ensinava como, eu achava também que o sexto ano via essa área, então, ah, a gente só vai lembrar qual que é a fórmula! [...].

Prof: Mas o objetivo da atividade era determinar a quantidade de guarda-chuva? Então somente a área do retângulo não seria o suficiente.

Déia: Não seria o suficiente, então daí teria que calcular uma segunda área né?

Em seu planejamento para a quarta aula, Déia mencionou: “[...] se eu conseguisse um guarda-chuva bem colorido para levar para eles medirem [...]”, porém na impossibilidade, disponibilizou para os alunos um modelo, como o apresentado na Figura 5, com 98 cm de diâmetro. Neste caso, Déia moldou o artefato guarda-chuva por meio das imagens e das medidas indicadas, via instrumentalização.

Figura 5: Guarda-chuva escolhido como modelo



Fonte: Relatório produzido por Déia

Considerando, por hipótese, que o guarda-chuva se assemelhava a um círculo, foram trabalhados os conceitos de circunferência, círculo e procedimentos para calcular sua área. Porém, um impasse foi gerado, conforme relato transcrito a seguir:

Prof: E eles não sabiam nem a área do retângulo?

Déia: Não, mas você imagina o meu sofrimento? Aí que começou a desandar, porque daí como começou a ficar maçante, eles começaram a ficar desinteressados.

Prof: Você fala maçante em que sentido?

Déia: No sentido porque daí ficou muito vago para eles o conceito de área, o que que é área, determinar uma área, porque daí eu só coloquei a fórmula [da área do círculo]. [...] como que a gente vai calcular essa área do guarda-chuva? Eles simplesmente queriam multiplicar, somar as medidas, comprimento do guarda-chuva, diâmetro do guarda-chuva. [...] Então eles não queriam mais pensar, eles ficaram me esperando o tempo todo.

Déia havia planejado trabalhar um conceito matemático (área do círculo), considerando que os alunos tinham noção do que representava área de figuras planas. De certo modo, Déia não se ateu ao fato de que, ao introduzir uma atividade de modelagem em aulas de matemática, se faz necessário considerar, entre outras coisas, que “a matemática utilizada pode não ter sido previamente escolhida ou definida; em vez disso, a matemática necessária emerge do problema e de suas especificidades” (Almeida, 2018, p. 19). Todavia, dificuldades como as enfrentadas pela professora, de modo geral, são iminentes em primeiras experiências com práticas com modelagem, gerando algumas imprevisibilidades (Pinto & Araújo, 2021a) – “[...] você imagina o meu sofrimento? [...]” (comentário de Déia, durante o relato da experiência).

Porém, o relato da experiência fez emergir sugestões de encaminhamentos que poderiam ter auxiliado a professora a não se aprofundar no estudo de área do círculo, por meio de esquemas e materiais manipulativos, conforme transcrição do excerto:

Guto: O círculo realmente. O círculo vê no fim do sétimo ano, que é o pi, né?

Déia: Essa é a questão, eu trouxe no início. Eu trouxe o conteúdo para o início, mas não foi.

Guto: Eu acho que seria muito legal trabalhar com o 9º ano. Para retomar os conceitos de circunferência. Às vezes, pegar o GeoGebra para tentar fazer a ponte e ver se vai encaixando a circunferência no tamanho calculado, porque se eles conseguirem encaixar e validar os cálculos, daí se dividirem um pelo outro, vai sobrar pedaço de guarda-chuva ali que não vai dar certo.

Prof: E aí eles podem fazer uns esquemas, dá para fazer no GeoGebra, mas também dá para fazer manualmente. Dá para usar compasso, aí é manual e você pode trabalhar escala também. [...] tem que fazer algumas simplificações na abordagem, porque o guarda-chuva faz uma curva e aí quando olha e associa a uma circunferência, você tá olhando ele reto né, então ele vai fazer uma curva, é, vai pegar todo o espaço do mesmo modo. [...] Faz um esqueminha, pede para eles um esquema, porque dá para fazer com circunferência, mas também dá pra fazer com a régua, como se fosse assim, quadrados, para ocupar o espaço. [...]

Guto: Eu tive uma ideia, talvez legal. Você poderia pegar uma tampinha de garrafa e trabalhar escala com eles, o quanto a tampa da garrafa é menor que o guarda-chuva e aí pedir para eles desenhar um retângulo que seja proporcional, tem a mesma razão tampinha com o guarda-chuva no caderno e aí preencher de tampinha de garrafa os guarda-chuvas, quantos caberiam.

Prof: Para representar? É uma saída.

Guto: Nem calcula nada, só põe as tampinhas.

Prof: Calcula a proporção.

Guto: A escala. [...] Seria legal, que daí validava o exercício.

Keila: Isso pode ser algo também discutido com os alunos dos anos iniciais que trabalham com material manipulativo, né? Para fazer a distribuição. Uma espécie de maquete... ou até não ser tudo de tampinha, mas fazer representações com a tampinha, não precisando usar o compasso.

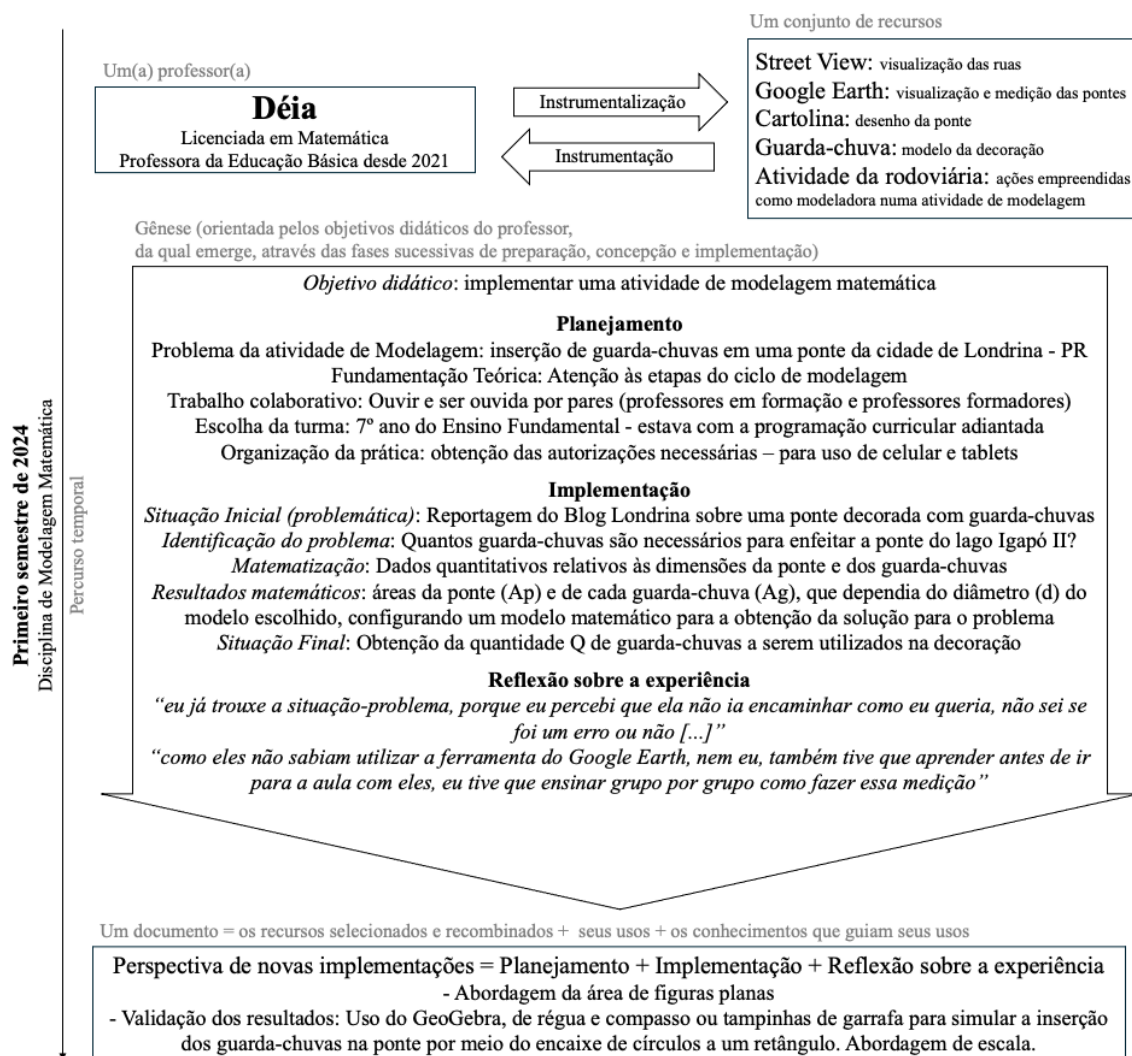
Os apontamentos realizados de forma coletiva entre os professores em formação a partir

do relato da implementação, podem ser considerados recursos para instrumentação de Déia que “pode enriquecer seus esquemas, integrando novas regras de ações e construir novos esquemas” (Abar *et al.*, 2021, p. 126). Esses procedimentos corroboram Forner e Malheiros (2020, p. 514) de que o “compartilhamento de experiências e de vivências suscita diferentes pontos de vista sobre a mesma atividade [...] e, por consequência, ressignificações da própria prática de cada professor”.

A gênese documental para a atividade de modelagem sobre *ponte de guarda-chuvas do lago Igapó II* ocorreu de forma contínua, perpassando diferentes fases: planejamento, implementação e reflexão sobre a experiência. A escolha inicial dos recursos, no planejamento, passou por adaptações, visto que os alunos não conheciam as ferramentas disponibilizadas no *Google Earth* para a inteiração com os dados quantitativos relativos ao comprimento e à largura da ponte. A matematização e a resolução presentes no documento, materializado no plano de aulas para a atividade de modelagem, foram se renovando para Déia com as sugestões de Guto, de Keila e da Prof, com vistas a instaurar uma possibilidade de implementação em outro momento da sequência da matriz curricular do 7º ano (no terceiro trimestre letivo) ou como possibilidade de ser trabalhado no 9º ano e na 1ª série do Novo Ensino Médio, tomando inclusive uma “roupagem” para ser abordada nos anos iniciais do Ensino Fundamental. Nesse sentido, Pinto e Araújo (2021b) asseveram que o planejamento coletivo é um caminho que “se configura como uma potencial forma de transformação no que tange à implementação de atividades dessa natureza e ao crescimento dos sujeitos envolvidos, que encontram, uns nos outros, suporte, incentivo e compartilhamento de aprendizagens” (p. 2026). No tocante a essas sugestões, os recursos precisam ser adaptados de modo a subsidiar o desenvolvimento da atividade pelos alunos.

A Figura 6 sintetiza as ações que constituem o processo de construção do “documento” que combina os recursos selecionados por Déia e recombina a partir de sua prática, da implementação da atividade de modelagem matemática a respeito da inserção de guarda-chuvas para decoração de uma ponte do Lago Igapó II do município de Londrina - PR, e das discussões com seus pares, professores em formação e professores formadores. Esse documento, portanto, leva em consideração todo o percurso temporal correspondente ao primeiro semestre de 2024, período em que se realizou a disciplina de Modelagem Matemática. Déia, licenciada em Matemática e professora da Educação Básica desde 2021, planejou ações (proposição da leitura de uma reportagem, exploração da região do lago com aplicativos, medição das dimensões de um guarda-chuva) e selecionou recursos (*Street View* e *Google Earth*, acessados nos celulares e tablets com a autorização da coordenação pedagógica da escola, cartolina para registros, guarda-chuva e outros materiais) para a implementação da atividade de modelagem. Tal organização se deu inspirada na atividade que Déia desenvolveu na disciplina, na qualidade de modeladora. Aprender sobre e aprender por meio mostrou-se fundamental para o ensinar usando modelagem. Para além disso, a reflexão sobre a experiência, seja por si só, ou pelo diálogo com os pares, permitiu um novo olhar para a prática e delinear uma perspectiva de novas implementações da atividade, a qual sinaliza sobretudo uma atenção à abordagem dos conteúdos, referentes à área de figuras planas ou de escala, e à validação dos resultados, seja por meio de experimentos e simulações por meio do uso de recursos como o GeoGebra, régua e compasso ou tampinhas de garrafas e/ou outros materiais manipulativos.

Figura 6: Esquema da Gênese Documental do planejamento e da prática de Déia



Fonte: Produzido pelos autores

Considerações Finais

Sob um olhar para a questão de pesquisa: *quais ações são empreendidas por uma professora em formação em modelagem matemática no processo de gênese documental de uma atividade de modelagem?* nos orientamos na compreensão do “processo de formação de documentos por meio da interação do professor com recursos ao longo de um determinado tempo” (Xavier Neto *et al.*, 2021, p. 342) – o período da disciplina. Para isso, um acompanhamento do trabalho documental foi realizado de modo que tanto a professora da disciplina como outros os professores em formação contribuíram na gênese documental de uma atividade de modelagem sobre a situação-problema ponte de guarda-chuvas do lago Igapó II.

A gênese documental foi subsidiada pela instrumentalização que Déia foi se moldando tanto no planejamento, ao considerar os procedimentos de uma atividade desenvolvida como modeladora quanto nos conhecimentos dos recursos tecnológicos dos alunos. As conversas estabelecidas, principalmente com a Prof, fizeram incutir outros recursos, inclusive o delineamento de uma situação a ser investigada, reestruturando a proposta de reforma para a inserção de guarda-chuvas em uma ponte. No tocante aos recursos mediados no planejamento, Déia investiu na elaboração de um plano para as aulas, via ciclo de modelagem, de modo a

trabalhar conscientemente e se assegurar de que a atividade seria de modelagem. O plano, a princípio, foi o documento gerado no planejamento da atividade de modelagem. Ao colocá-lo em prática, os recursos antecipados passaram a ser instrumentalizados por Déia. Porém, diante das dificuldades dos alunos, houve necessidade de alteração no que foi antecipado de modo que a conceitualização para área de figuras planas precisou ser retomada, via questionamentos e esquemas produzidos por Déia sobre áreas de retângulos.

A imprevisibilidade do conteúdo matemático criou um impasse para a professora que estava, inicialmente, confiante no seu plano. Neste sentido, corroboramos Silva *et al.* (2021, p. 42-43) de que, em atividades de modelagem, “os conteúdos matemáticos são abordados de acordo com as características de cada situação investigada, bem como estão em consonância com os conhecimentos dos alunos que atuam como modeladores”. Porém, ao compartilhar a experiência para com os outros professores em formação, no âmbito da disciplina do mestrado, reflexões foram suscitadas para a reestruturação do documento, em que outros recursos foram indicados seja para não adentrar ao estudo de área de círculo, seja para delinear a implementação da situação com alunos de outros níveis de escolaridade, proporcionando emergir novo(s) documento(s) no formato de planejamento. Iglioni (2021, p. 222) assinala que é “por meio de estudos teóricos e empíricos que é possível conceber atividades novas, necessárias e apropriadas ao ensino dos diferentes níveis de educação”.

À guisa de conclusão, nossa investigação pode ser entendida como uma reflexão ao convite de Pinto e Araújo (2021b, p. 2026) para investigar “[...] formas de enfrentamento dos desafios destacados por professores ao implementarem atividades de modelagem, bem como a compreender o planejamento coletivo de atividades de modelagem para além de sua elaboração, incorporando também discussões sobre sua realização em sala de aula”.

Agradecimentos

Agradecemos ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pelo apoio financeiro.

Referências

- Abar, C. A. A. P. (2019). Articulações teóricas sobre a abordagem documental do didático. *Revista Educação Matemática Pesquisa*, 21(5), 217-229.
- Abar, C. A. A. P., Almeida, C. B. & Dias, A. de O. (2021). Trajetórias de pesquisas com professores da escola básica analisadas pelo olhar da gênese documental. *Educação Matemática Pesquisa*, 23(3), 120–150.
- Almeida, L. M. W. (2018). Considerations on the use of mathematics in modeling activities. *ZDM*, 50(1), 19-30.
- Almeida, L. W., Silva, K. P., & Vertuan, R. E. (2012). *Modelagem Matemática na Educação Básica*. Contexto.
- Borromeo Ferri, R. (2018). *Learning How to Teach Mathematical Modeling in School and Teacher Education*. New York: Springer International Publishing.
- Cevikbas, M. (2024). Utilizing explanatory videos in the Flipped Mathematical Modelling Classrooms. In H.-S. Siller, V. Geiger, & G. Kaiser (Eds.). *International Perspectives on the Teaching and Learning of Mathematical Modelling* (pp. 223-233). Switzerland: Springer.
- Dalto, J. O., Borssoi, A. H., & da Silva, K. A. P. (2024). Teachers in Continuing Education:



- Planning of a Mathematical Modelling Activity. In H.-S. Siller, V. Geiger, & G. Kaiser (Eds.). *International Perspectives on the Teaching and Learning of Mathematical Modelling* (pp. 235-245). Switzerland: Springer.
- Forner, R. & Malheiros, A. P. S. (2020). Constituição da Práxis Docente no contexto da Modelagem Matemática. *Bolema*, 34(67), 501-521.
- Galbraith P. (2024). Modelling, Teaching, and Reflecting: What More I Have Learned?. In H.-S. Siller, V. Geiger, & G. Kaiser (Eds.). *International Perspectives on the Teaching and Learning of Mathematical Modelling* (pp. 137-147). Switzerland: Springer.
- Gueudet, G. & Trouche, L. (2008). Du travail documentaire des enseignants: genèses, collectifs, communautés. Le cas des mathématiques. *Education et Didactique*, 2(3), 7-33.
- Iglioni, S. B. C. (Ed.). (2021). *Compreender o trabalho dos professores brasileiros do ensino básico: Uma abordagem pelos recursos*. São Paulo: Blucher.
- Malheiros, A. P. S., Souza, L. B., & Forner, R. (2021). Olhares de docentes sobre as possibilidades da Modelagem nas aulas de Matemática. *Revista de Ensino de Ciências e Matemática*, 12, 1-22.
- Niss, M. & Blum, W. (2020). *The learning and teaching of mathematical modelling*. London, New York: Routledge.
- Pinto, T. F. & Araújo, J. L. (2021a). Um estudo sobre planos de atividades de modelagem matemática. *Revista de Ensino de Ciências e Matemática*, 12(2), 1-25.
- Pinto, T. F., & Araújo, J. L. (2021b). De mãos dadas: professores elaborando juntos o planejamento de uma atividade de modelagem matemática. In *Anais do Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática* (8. ed., pp. 2013-2028). Uberlândia: SBEM.
- Silva, L. A. & Oliveira, A. M. P. (2014). Quando a escolha do tema em atividades de modelagem matemática provém do professor: o que está em jogo?. *Acta Scientiae*, 17(1).
- Silva, K. A. P., Tortola, E., Koga, M. A. & Koga, M. F. (2021). Abordagem Documental do Didático no planejamento e na implementação de uma atividade de modelagem matemática. *Educação Matemática Pesquisa*, 23(3), 33-69.
- Trouche, L., Gueudet, G. & Pepin, B. (2018). Documentational approach to didactics. In S. Lerman (Ed.). *Encyclopedia of Mathematics Education*. N.Y.: Springer.
- Xavier Neto, A. L., Silva, M. J. F. & Trouche, L. (2019). A construção de atividades para o ensino de sequências numéricas: uma análise pela lente da Abordagem Documental do Didático. *Revista Educação Matemática Pesquisa*, 21(5), 300-314.
- Xavier Neto, A. L., Ferreira da Silva, M. J., & Trouche, L. (2021). Uma análise da produção acadêmica a respeito da gênese documental entre 2012 e 2020. *Educação Matemática Pesquisa Revista*, 23(3), 339-361.