

Ciclos de modelagem matemática produzidos por futuros professores de matemática: reflexões acerca do desenvolvimento do conhecimento pedagógico

Mathematical modeling cycles produced by future mathematics teachers: reflections on the development of pedagogical knowledge

Rosângela Maria Kowalek¹
Michele Regiane Dias Veronez²
Ana Paula Zanim³

Resumo: Neste artigo temos por interesse discutir acerca do conhecimento pedagógico de futuros professores sobre modelagem matemática considerando os ciclos de modelagem que construíram. Assim, assumimos os ciclos de modelagem matemática e de conhecimentos necessários a um professor, sobretudo, sobre o conhecimento pedagógico, como aportes teóricos. Os ciclos de modelagem analisados foram construídos por alunos (futuros professores) de 4º ano de licenciatura em Matemática na disciplina de Modelagem Matemática na Perspectiva da Educação Matemática. Nossas ponderações são que os elementos apresentados pelos futuros professores e a organização de suas ideias frente à modelagem matemática nos ciclos que construíram denotam conhecimentos pedagógicos relativos à modelagem matemática, à ação de fazer modelagem matemática e à ação de ensinar por meio da modelagem matemática.

Palavras-chave: Modelagem Matemática. Ciclo de Modelagem. Conhecimento Pedagógico. Formação de Professores.

Abstract: In this article we are interested in discussing the pedagogical knowledge of future teachers about mathematical modelling considering the modelling cycles they built. Thus, we assume the cycles of mathematical modelling and knowledge necessary for a teacher, especially regarding pedagogical knowledge, as theoretical contributions. The modelling cycles analyzed were built by students (future teachers) of the 4th year of a degree in Mathematics in the subject of Mathematical Modelling from the Perspective of Mathematics Education. Our considerations are that the elements presented by future teachers and the organization of their ideas regarding mathematical modelling in the cycles they constructed denote pedagogical knowledge related to mathematical modelling, the action of doing mathematical modelling and the action of teaching through mathematical modelling.

Keywords: Mathematical Modelling. Modelling Cycle. Pedagogical Knowledge. Teacher Education.

1 Introdução

A modelagem matemática tem sua essência na investigação de uma situação real mediada pela matemática. Nesse sentido, enquanto prática de sala de aula é uma “possibilidade de abarcar a cotidianidade ou a relação com aspectos externos à Matemática, caracterizando-se

¹ Universidade Estadual de Londrina • Londrina, PR — País • ✉ rosangelakowalek1@gmail.com • ORCID <https://orcid.org/0000-0002-2750-4829>

² Universidade Estadual do Paraná – Campus de Apucarana • Apucarana, PR — Brasil • ✉ michele.veronez@unespar.edu.br • ORCID <https://orcid.org/0000-0001-9464-1498>

³ Universidade Estadual Paraná – Campus de Campo Mourão • Maringá, PR — Brasil • ✉ aninhapz@gmail.com • ORCID <https://orcid.org/0009-0001-3164-2036>

como um conjunto de procedimentos mediante o qual se definem estratégias de ação do sujeito em relação a um problema” (Almeida; Silva; Vertuan, 2012, p. 15).

Contudo, em sala de aula, a relação entre a matemática e uma situação que permeia aspectos extra matemáticos é mediada pela ação docente, ou seja, é o professor que orienta e subsidia o processo de desenvolvimento de atividades de modelagem matemática junto aos alunos. Como a ação do professor não é desvinculada de relações de valores, de consequências sociais, de pressupostos sobre o funcionamento dos seres humanos, individualmente ou em grupo, de opções epistemológicas acerca do conhecimento, seus conhecimentos importam e, de certo modo, determinam o seu saber-fazer em sala de aula.

Sendo assim, olhar para o professor e para os conhecimentos que podem desenvolver ao longo de sua formação, ou no exercício de sua profissão, é algo relevante no sentido de poder estabelecer diálogos que auxiliem no seu modo de pensar sobre seus conhecimentos, inclusive, sobre conhecimentos da docência. Daí a importância dos espaços de formação se atentarem para os conhecimentos que estão sendo construídos ou mobilizados pelos professores.

Nesta investigação o espaço de formação que focalizamos consiste em uma disciplina de Modelagem Matemática ofertada para uma turma de quarto ano de um curso de licenciatura em Matemática. O nosso olhar, no entanto, se direciona para uma das tarefas endereçadas aos alunos (futuros professores) que segue analisada e discutida neste texto. Nossas discussões consideram os aportes teóricos acerca de ciclos de modelagem matemática e sobre formação de professores.

A compreensão de ciclos de modelagem matemática que assumimos tem embasamento nas assertivas de Borromeo Ferri (2018) ao enunciar que os ciclos são esquemas teóricos que caracterizam uma atividade de modelagem matemática, mas são também um instrumento de aprendizagem para os alunos e um instrumento de diagnóstico para os professores. Com relação à formação de professores, nosso entendimento vai ao encontro de Shulman (1986) que argumenta que o ensino começa, necessariamente, com a compreensão do professor sobre o que deve ser aprendido e como deve ser ensinado, referindo-se a diferentes categorias de conhecimentos indispensáveis ao professor. Entre as categorias propostas por Shulman (1986) está o conhecimento pedagógico do conteúdo, para o qual depositamos nossa atenção.

No que se refere ao conhecimento pedagógico do conteúdo, Shulman (1986, p. 9) defende que se trata de um tipo de conhecimento que vai para além do conteúdo específico e aborda um *amálgama* de aspectos do conteúdo, “os tópicos regularmente ensinados em uma área, as formas mais úteis de representação dessas ideias, as analogias mais poderosas, ilustrações, exemplos, explicações e demonstrações [...] formas alternativas de representação”. Shulman (1986) ao conceituar o conhecimento pedagógico do conteúdo estabelece um elo entre o conhecimento do conteúdo específico a ser abordado e o processo de ensinar esse conteúdo. Ball, Thames e Phelps (2008) também inclui ao conhecimento pedagógico do conteúdo, tanto o conhecimento do conteúdo a ensinar como o conhecimento relativo ao ensino desse conteúdo. Esse processo de ensinar ao qual se referem esses autores é por nós associado às metodologias de ensino, em particular, à modelagem matemática.

Algumas pesquisas em modelagem matemática (Doerr, 2007; Kaiser; Schwarz; Tiedemann, 2010; Borromeo Ferri; Blum 2010; Barquero; Bosch; Romo, 2018; Krauss et. al, 2020; Bisognin; Bisognin, 2015; Bisognin; Bisognin, 2018) já têm se ocupado em discutir acerca da formação do professor, estabelecendo interlocuções com os conhecimentos a ele necessários. Segundo Sousa e Almeida (2021) a construção teórica acerca do conhecimento pedagógico do conteúdo tem ganhado desdobramentos quando se consideram práticas pedagógicas, sobretudo, práticas de modelagem matemática.

O desdobramento a que essa investigação se ancora, a partir do objetivo de discutir acerca do conhecimento pedagógico de futuros professores sobre modelagem matemática considerando os ciclos de modelagem que construíram, considera uma tarefa proposta aos futuros professores, após eles terem contato com modelagem matemática por um período de doze aulas. Para a discussão pretendida, a estrutura desse texto segue organizada apresentando os aportes teóricos que a subsidiam, nossas opções metodológicas, os ciclos de modelagem construídos pelos futuros professores e nossas reflexões acerca deles. Por fim, apresentamos nossas considerações finais.

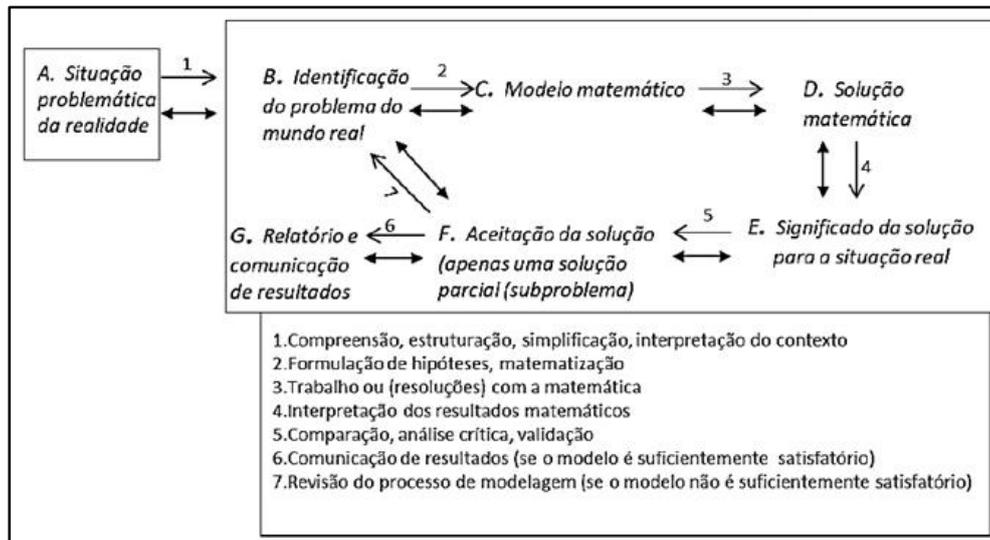
2 Ciclos de Modelagem Matemática

Embora na Educação Matemática exista uma pluralidade de caracterizações para a modelagem matemática, as diferentes perspectivas e concepções parecem compartilhar de um consenso de que a ideia central sempre é “formular uma situação-problema, decidir o que manter e o que ignorar na criação de um modelo matemático, fazer uso de matemática na situação idealizada a partir de uma situação da realidade, e então decidir se os resultados podem, em alguma medida, ser úteis para entender a situação original” (Pollak, 2015, p. 267).

Assim, a realização de uma atividade de modelagem matemática perpassa os aspectos destacados por Pollak (2015) e considera um conjunto de procedimentos que permite estabelecer um caminho para transitar entre a situação problema e uma resposta a ela. Esse conjunto de procedimentos e estratégias que norteia o desenvolvimento de atividades de modelagem matemática podem ser associados a esquemas denominados ciclos de modelagem matemática, os quais são apresentados e justificados na literatura como ferramentas importantes no fazer modelagem matemática em sala de aula (Perrenet; Zwaneveld, 2012), por ter potencial para orientar as ações dos alunos e as intervenções do professor. Para Borromeo Ferri (2006), além dos ciclos de modelagem corresponderem a um esquema teórico que caracteriza uma atividade de modelagem matemática, são também um instrumento de aprendizagem para os alunos e um instrumento de diagnóstico para os professores.

Blomhøj e Jensen (2003) definem os ciclos de modelagem matemática como um modelo do processo de modelagem matemática constituído de subprocessos e de como eles se conectam no desenvolvimento de atividades de modelagem matemática. O ciclo de modelagem indicado por Galbraith (2012), (Figura 1), explicita o desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática, tendo como ponto de partida uma situação da realidade. Em seu ciclo considera seis etapas (de A a G) ligadas por setas sobre as quais constam números (de 1 a 7) que indicam as ações de alunos e/ou professores.

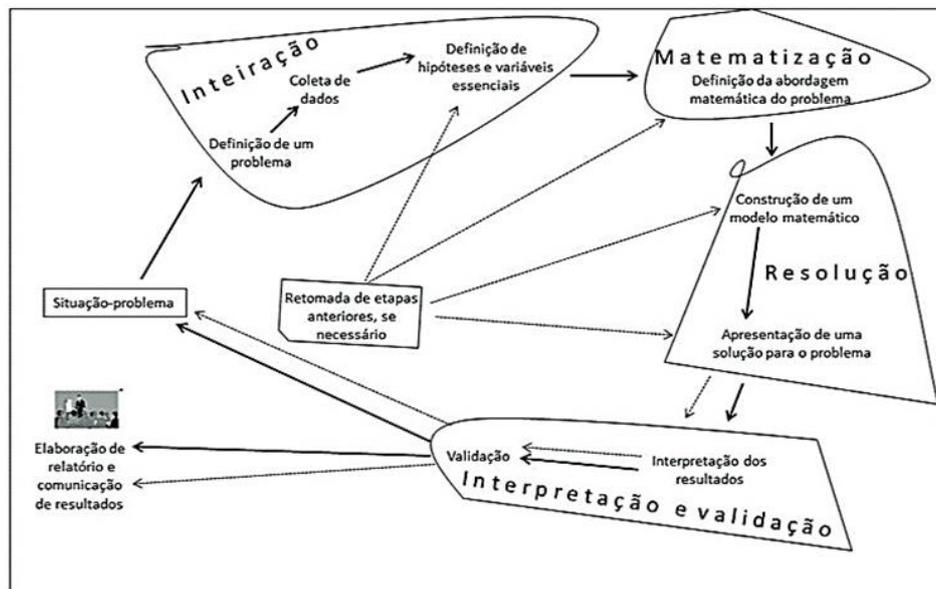
Figura 1 – Ciclo de modelagem matemática apresentado por Galbraith



Fonte: Adaptado de Galbraith (2012)

Outro ciclo de modelagem matemática é proposto por Almeida, Castro e Silva (2021) (Figura 2), e nele também é considerado que o desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática inicia-se na situação-problema, perpassando pelas seguintes fases: inteiração, matematização, resolução, interpretação dos resultados e validação.

Figura 2 – Ciclo de modelagem matemática apresentado por Almeida



Fonte: Almeida, Castro e Silva (2021).

Independente das formas como os ciclos de modelagem aparecem na literatura, para Borromeo Ferri (2006), a finalidade deles reside na intenção de apresentar uma versão idealizada do desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática, de modo a caracterizar um encaminhamento para atividades dessa natureza e, por vezes, denotar compreensões acerca da modelagem matemática.

Nas últimas décadas a relevância destes ciclos para o ensino e a aprendizagem da modelagem matemática tem sido foco de diversas pesquisas (Borromeo Ferri, 2006; Perrenet; Zwaneveld, 2012; Galbraith, 2012; Almeida; Silva, 2015; Borromeo Ferri, 2018;

Doerr; Årlebäck; Misfeldt, 2016). No entanto, Almeida e Silva (2021) pontuam que há necessidade de pesquisas que discutam os ciclos de modelagem matemática produzidos por alunos e é nesse viés que reside nossa intenção no presente artigo. Assim, os ciclos que os alunos (futuros professores) construíram servem a nós como instrumento para inferirmos sobre os conhecimentos deles acerca da modelagem matemática e sobre o fazer modelagem matemática, relacionando-os ao conhecimento pedagógico desses futuros professores.

3 Conhecimentos associados à formação do professor

A complexidade que permeia a formação do professor favorece uma gama de enfoques acerca desse tema e, nesse sentido, abre possibilidades para debates diversos. Dentre esses debates há aqueles que se ocupam de discutir sobre os conhecimentos na e para a docência com foco na modelagem matemática (Doerr, 2007; Lingefjärd, 2013; Kaiser; Schwarz; Tiedemann, 2010; Borromeo Ferri; Blum 2010).

No entanto, é notável que várias pesquisas que versam sobre os conhecimentos do professor se ancoram nas vertentes teóricas de Shulman (1986), Shulman (1987) e Ball, Thames e Phelps (2008), os quais conceituam os conhecimentos do professor por meio de categorias distintas. Shulman (1986), inicialmente, enuncia três categorias para se referir à base de conhecimentos da docência, a saber: conhecimento de conteúdo, conhecimento pedagógico e conhecimento curricular. Em Shulman (1987), o autor reestrutura suas categorias, as quais passam a ter a seguinte configuração: conhecimento pedagógico do conteúdo, conhecimento dos alunos e de suas características, conhecimento dos contextos educacionais, bem como o conhecimento dos fins educacionais, propósitos, valores, e de seus fundamentos filosóficos e históricos. Neste artigo, nos atentamos a aspectos do conhecimento pedagógico do conteúdo e, portanto, é sobre ele que dirigimos nossa atenção.

Lee Shulman ao utilizar a expressão conhecimento pedagógico do conteúdo está igualando o status do que o professor produz na prática docente aos conhecimentos que são produzidos na academia e que influenciam e são influenciados entre si. Nesse sentido, Shulman (1986, p. 9) define o conhecimento pedagógico do conteúdo como

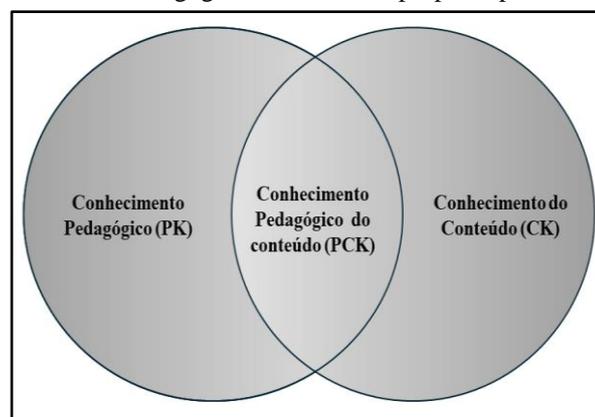
[...] aquele conhecimento que vai além do conhecimento da matéria em si e chega na dimensão do conhecimento da matéria para o ensino. Eu [Shulman] ainda falo de conteúdo aqui, mas de uma forma particular de conhecimento de conteúdo que engloba os aspectos do conteúdo mais próximos de seu processo de ensino. [...] dentro da categoria de conhecimento pedagógico do conteúdo eu incluo, para os tópicos mais regularmente ensinados numa determinada área do conhecimento, as formas mais úteis de representação dessas ideias, as analogias mais poderosas, ilustrações, exemplos e demonstrações – numa palavra, os modos de representar e formular o tópico que o faz compreensível aos demais. Uma vez que não há simples formas poderosas de representação, o professor precisa ter em mãos um verdadeiro arsenal de formas alternativas de representação, algumas das quais derivam da pesquisa enquanto outras têm sua origem no saber da prática (Shulman, 1986, p. 9).

Assim, se por um lado, o conhecimento pedagógico do conteúdo considera o conhecimento específico a ser ensinado (conhecimento de conteúdo), por outro, também considera como esse conhecimento específico pode ser ensinado (conhecimento pedagógico). Em outros termos, Shulman (2014, p. 207) ao se referir ao conhecimento pedagógico do conteúdo destaca que essa categoria de conhecimento “representa a combinação de conteúdo e pedagogia no entendimento de como tópicos específicos, problemas ou questões são organizados, representados e adaptados para os diversos interesses e aptidões dos alunos, e

apresentados no processo educacional em sala de aula.”

Desde o momento em que Shulman (1986, 1987) cunhou o termo: conhecimento pedagógico do conteúdo, ele tem sido amplamente utilizado nas investigações de conhecimento de professores. Ball, Thames e Phelps (2008) se dedicam a dar destaque ao conhecimento pedagógico do conteúdo e discutem sobre ele no sentido de elucidar que esse conhecimento congrega características que se associam ao conhecimento de como ensinar determinado conteúdo específico. Também alinhados às assertivas de Shulman (1986, 1987), Mishra e Koehler (2006) defendem que o conhecimento pedagógico do conteúdo consiste no desenvolvimento de abordagens voltadas ao ensino do conteúdo, bem como saber organizar os elementos do conteúdo para promover aprendizagens. Esses autores ilustram essa associação de conhecimentos (Figura 1) respaldados na consideração de que o conhecimento pedagógico do conteúdo representa a interação e a interseção entre conteúdo e pedagogia (Shulman, 1986).

Figura 3 - Conhecimento Pedagógico do Conteúdo proposto por Lee Shulman



Fonte: Adaptado de Mishra e Koehler (2006)

Essa interação e interseção entre conteúdo e pedagogia, para Shulman (1986), vai além da simplicidade de associar esses dois elementos. É uma maneira de abranger conhecimentos de ensino e aprendizagem numa relação que considera modos de ensinar determinado conteúdo. Nessa direção, Fernandez (2015, p. 506), enfatiza que esses dois componentes que constitui o conhecimento pedagógico do conteúdo consideram “conhecimentos de representações do conteúdo específico e das estratégias instrucionais, por um lado, e o entendimento das dificuldades de aprendizagem e as concepções dos estudantes de um conteúdo, por outro”. Contudo, aos nossos olhos, para o ensino de determinado conteúdo se faz necessário ao professor conhecimentos de estratégias e metodologias de ensino que favoreçam o seu aprendizado e conduzam os alunos a elaborações conceituais. Nesse sentido, o conhecimento pedagógico precisa ser considerado como um componente que agrega ao professor modos de ensinar, já que ele congrega conhecimentos relativos aos

processos de aprendizagem e práticas de ensino, ou seja, dos métodos e teorias de ensino e aprendizagem. Engloba também outros aspectos, como valores, objetivos, estratégias para avaliar a compreensão do aluno. É uma forma genérica de conhecimento que envolve todas as questões relacionadas às aprendizagens dos alunos e dos métodos de ensino, a gestão da sala de aula, desenvolvimento de plano de aula, implementação de currículos e sobre avaliação (Baldini, 2014, p. 40).

Diante disso, o conhecimento pedagógico constitui conhecimentos necessários para a prática docente e está relacionado diretamente à ação de ensinar (Hegeto; Camargo; Lopes, 2017). Ou como nos coloca Baldini (2014, p. 40), “o conhecimento pedagógico requer uma

compreensão das teorias cognitivas e sociais, de desenvolvimento de aprendizagem e de como se aplicam aos alunos”. Esse conhecimento, no entanto, consiste em uma construção pessoal do estudante-professor que, ao entrelaçar suas vivências e seus conhecimentos, estrutura uma concepção particular e aprofundada sobre o assunto com foco no ensino.

Grossman (1990), em relação a essa construção estudante-professor, infere sobre a importância de se olhar para aspectos específicos do conhecimento pedagógico, quais sejam: o conhecimento dos propósitos para o ensino do conteúdo; o conhecimento curricular do conteúdo; o conhecimento das estratégias de ensino e o conhecimento sobre a compreensão dos alunos. Dentre esses, esse autor aponta que o conhecimento das estratégias de ensino diz respeito às diversas maneiras pelas quais se pode efetivar o ensino de conteúdos. Na Educação Matemática, por exemplo, essas estratégias de ensino encontram respaldo nas diferentes metodologias para o ensino da matemática. Neste artigo, em particular, associamos essas estratégias de ensino, vinculadas ao conhecimento pedagógico, à modelagem matemática. À guisa do nosso objetivo, elucidamos na seção a seguir, características metodológicas do estudo empreendido.

4 O contexto, os dados produzidos e as opções metodológicas

A produção dos dados que subsidiam a discussão realizada neste artigo aconteceu no primeiro bimestre do ano letivo de 2024, no contexto de uma disciplina eletiva presente na matriz curricular da 4ª série de um curso de licenciatura em Matemática de uma universidade pública localizada no estado do Paraná. A disciplina, que recebe a denominação Modelagem Matemática na Perspectiva da Educação Matemática, tem oferta anual de 60 horas.

Na organização dessa disciplina, ministrada por uma das autoras deste artigo, foi considerada a tríade “‘aprender’ *sobre* a modelagem matemática, ‘aprender’ *por meio* da modelagem matemática e ‘ensinar’ *usando* modelagem matemática” (Dias, 2005, p. 46). Nesse sentido, havia intencionalidade de promover discussões teóricas sobre modelagem matemática, de desenvolver e de propor o desenvolvimento de algumas atividades de modelagem matemática e de discutir potencialidades que a modelagem matemática tem para promoção do ensino de matemática em turmas da Educação Básica. Para a dinâmica das aulas também foram considerados os momentos de familiarização com a modelagem matemática enunciados por Almeida, Silva e Vertuan (2012).

Os ciclos de modelagem matemática dos alunos (futuros professores), sob os quais discutimos e tecemos nossas inferências, foram produzidos após eles terem vivenciado experiências com algumas atividades de modelagem matemática, sendo três delas discutidas segundo orientações do primeiro momento e duas, pautadas no segundo momento de familiarização dos alunos com modelagem matemática. Assim, até a produção dos ciclos pelos alunos, eles não haviam estudado textos teóricos no âmbito da disciplina. Ou seja, o único envolvimento dos alunos foi com atividades de modelagem matemática e discussões estabelecidas em sala de aula acerca de seus elementos e suas características.

Para a produção dos ciclos de modelagem foi solicitado aos alunos que criassem uma estrutura (um esquema, uma figura) que representasse o fazer modelagem matemática e sugerido a eles que se organizassem em grupos para realizar essa tarefa. A turma tem sete alunos matriculados e nesse dia duas alunas não estavam presentes. Assim, eles se dividiram em dois grupos com dois alunos cada e uma aluna fez a preferência por realizar a tarefa sozinha.

Os dois ciclos trazidos para discussão consideram aspectos do fazer modelagem matemática e de algum modo contém informações ou explicações mais detalhadas. Na próxima seção apresentamos os ciclos tomados para análise e discutimos acerca deles à luz do nosso

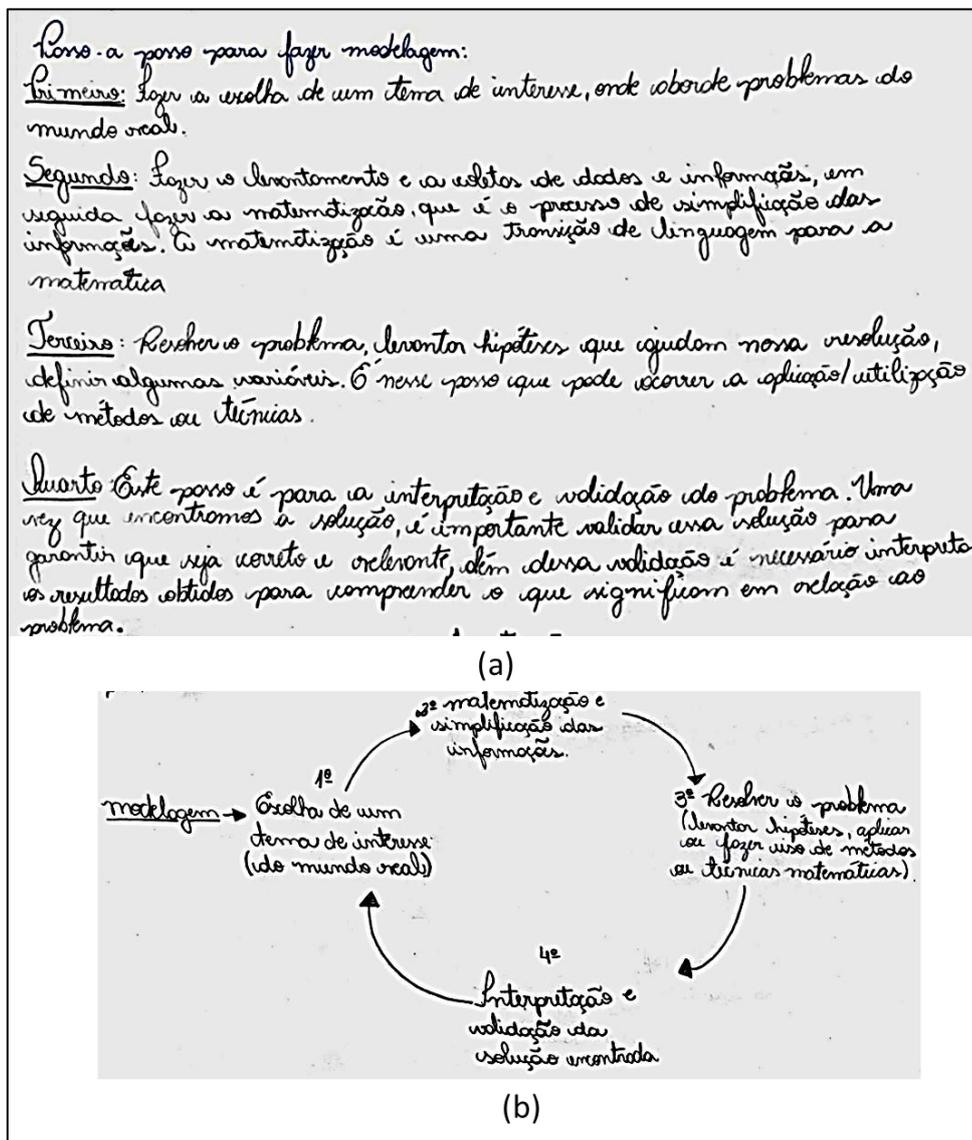
objetivo.

5 Os ciclos de modelagem dos futuros professores de matemática: reflexões acerca do conhecimento pedagógico

Nesta seção consideramos duas produções dos futuros professores quando convidados a organizar suas ideias sobre modelagem matemática a partir de uma estrutura (esquema, figura, ciclo). Nosso olhar para essas produções é no sentido de elucidar aspectos relativos aos conhecimentos dos futuros professores acerca da modelagem matemática e sobre o fazer modelagem matemática, ancoradas nas assertivas de Shulman (1986) no que se refere ao conhecimento pedagógico do professor. Esse tipo de conhecimento compõe, juntamente com o conhecimento do conteúdo específico, o conhecimento pedagógico do conteúdo.

A primeira produção que trazemos (Figura 4(a) e (b)) representa o modo como dois futuros professores apresentaram como compreendem a modelagem matemática.

Figura 4 - Estrutura apresentada por dois futuros professores



Fonte: registro dos futuros professores

Na Figura 4(a) os futuros professores associam o fazer modelagem matemática a uma

estrutura de tópicos, indicando que esse fazer segue uma sequência de passos. A partir dessa organização dos futuros professores inferimos que eles assumem que a modelagem matemática se processa em passos sequenciais, uma vez que nomeiam esses passos seguindo uma ordem (primeiro, segundo, terceiro, quarto). Esse modo de compreender denota conhecimento pedagógico relacionado a um jeito específico de assumir como acontece (ou deve acontecer) o desenvolvimento de atividades de modelagem matemática em sala de aula; desenvolvimento seguindo etapas sequenciais.

As descrições presentes em cada um desses passos indicam ações a serem realizadas no desenvolvimento de atividades de modelagem matemática, conforme sugerem Almeida, Silva e Vertuan (2012) e se aproximam ao que é requerido em cada uma das fases da modelagem matemática. Essas descrições dos futuros professores relativas às ações, na intenção de detalhar o que precisa ser feito em cada passo, sinalizam que eles têm conhecimento pedagógico sobre as fases da modelagem matemática, mesmo que não as enunciam⁴ e, nesse sentido, indicam que estão construindo uma concepção sobre como se pode fazer modelagem matemática em sala de aula. Índícios desse conhecimento estão presentes nas considerações que acompanham cada passo a passo. Como exemplo, citamos as considerações expressas no terceiro item: “*resolver o problema, levantar hipóteses que ajudam nossa resolução, definir algumas variáveis. É nesse passo que pode ocorrer a aplicação/utilização de métodos ou técnicas.*”

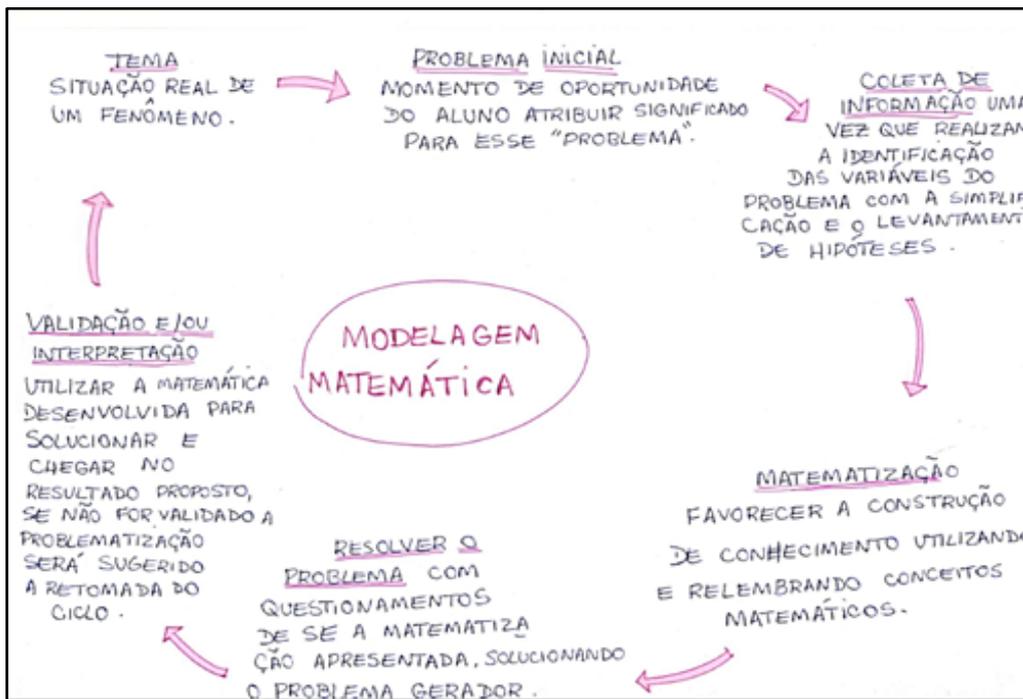
Todas as considerações presentes na Figura 4 (a), de algum modo, denotam aspectos relacionados aos conhecimentos dos futuros professores sobre a modelagem matemática, principalmente no que diz respeito ao desenvolvimento de uma atividade de modelagem matemática. Ponderamos que o conhecimento pedagógico expresso nessas considerações evoca o que precisa ser levado em conta por um professor, se ele tem por interesse ensinar matemática a partir de situações da realidade, como é sugerido pela modelagem matemática.

Embora na Figura 4 (a) seja explicitado o que é necessário considerar para desenvolver uma atividade de modelagem matemática, é na associação dessa figura com a Figura 4 (b) que entendemos se completar as compreensões desses dois futuros professores acerca da modelagem matemática. O fato de apresentarem uma estrutura cíclica após a indicação do passo a passo, sugere que eles compreendem essa sequência de passos de forma articulada, uma vez que indicam conexões entre as ações explicitadas no passo a passo por meio de flechas. Sendo assim, inferimos que ao mesmo tempo que compreendem que há ações sequenciais necessárias ao fazer modelagem matemática, assumem que elas precisam acontecer associadas a um movimento cíclico, o qual só se finda quando se chega a uma resposta que seja considerada válida ao problema em estudo. Também ponderamos que a associação de ambas as figuras denota que os futuros professores ampliaram seu conhecimento pedagógico acerca da modelagem matemática ao trazer à tona aspectos de sua dinamicidade, mesmo que de forma sucinta.

Na Figura 5, a qual foi produzida por outros dois futuros professores, a modelagem matemática é apresentada em um ciclo que considera, na parte central, a expressão modelagem matemática e, em torno dela, expressões que se remetem a aspectos da modelagem matemática em sala de aula, considerando o papel do professor e o papel do aluno.

⁴ Até esse momento na disciplina não haviam estudado textos teóricos sobre modelagem matemática.

Figura 5 - Estrutura cíclica apresentada por dois futuros professores



Fonte: registro dos alunos

A estrutura cíclica apresentada nessa figura dá destaque a alguns elementos característicos da modelagem matemática (tema, problema inicial, matematização, validação e/ou interpretação), e também indica ações requeridas no fazer modelagem matemática (coleta de informação, resolver o problema). Para cada um desses itens indicados na Figura 5, os futuros professores tecem um complemento, que aos nossos olhos, além de corresponder à intenção deles em explicitar como compreendem esses itens no contexto do desenvolvimento de atividades de modelagem matemática, explicita seus conhecimentos pedagógicos sobre a modelagem matemática, expressos na indicação dos elementos característicos que enunciam, e sobre o ensinar usando modelagem, quando apontam ações relacionadas ao professor, por exemplo, “favorecer a construção de conhecimento...”.

Na descrição que fazem aos itens: problema inicial, matematização e resolver o problema, os futuros professores parecem focalizar a ação do professor no fazer modelagem matemática. Isso, de algum modo, denota que eles compreendem que o papel do professor em uma prática de modelagem matemática é fomentar com que os alunos construam e/ou mobilizem conhecimentos matemáticos e os articulem ao problema que estão resolvendo, que advém de uma situação não matemática. Nesse sentido, o conhecimento pedagógico manifestado por esses futuros professores se associa à promoção do ensino de matemática por meio da modelagem matemática, ou seja, se relacionam à ação de como ensinar.

Ao se referirem à coleta de informação e à validação e/ou interpretação, os futuros professores sinalizam ações que devem ser realizadas pelos alunos no desenvolvimento de atividades de modelagem matemática. Assim, ponderamos que seus conhecimentos pedagógicos consideram o aluno como agente ativo do seu processo de aprender.

Na estrutura cíclica apresentada por esses futuros professores (Figura 5), a indicação de que a modelagem matemática favorece o estudo de fenômenos reais, como é proposto em Almeida, Silva e Vertuan (2012), denota conhecimento pedagógico deles acerca da modelagem matemática. Nessa estrutura também é sugerido que alunos e professor têm papéis importantes na modelagem matemática e que a interação entre esses dois agentes é dinâmica, ora o

protagonismo pode ser do professor, ora pode ser do aluno. Essa oscilação de participação ativa desses dois agentes, indicada na Figura 5 nas descrições que fazem, sugerem conhecimento pedagógico acerca da dinâmica que precisa ser empreendida em sala de aula e, nesse sentido, se relaciona com o processo de ensinar, que envolve o ensinar, o aprender, o orientar, as inteirações professor-aluno e alunos-alunos, entre outros.

O fato de desenvolver práticas de modelagem matemática no processo de formação desses futuros professores favoreceu trazer à tona aspectos relacionados à docência no que se refere ao conhecimento do professor sobre o que ensinar e para ensinar e, nesse sentido, discutir sobre o conhecimento pedagógico do professor viabilizado no contexto da modelagem matemática. De modo geral, os ciclos aqui apresentados, denotam conhecimento pedagógico desses futuros professores no que se refere à modelagem matemática e ao fazer modelagem matemática em sala de aula e evidenciam que a modelagem matemática fomenta reflexões relativas ao conhecimento pedagógico sobre a docência.

6 Considerações finais

A partir do objetivo de discutir acerca do conhecimento pedagógico de futuros professores sobre modelagem matemática considerando os ciclos de modelagem que construíram, conduzimos nossas reflexões assumindo dois ciclos de modelagem, os quais foram construídos por alunos de 4º ano de licenciatura em Matemática, no contexto de uma disciplina intitulada Modelagem Matemática na perspectiva da Educação Matemática. De modo geral, os elementos apresentados pelos futuros professores e a organização de suas ideias frente à modelagem matemática indicadas nos ciclos denotam conhecimentos pedagógicos desses futuros professores relativos à modelagem matemática e ao fazer modelagem matemática. Em relação ao fazer modelagem matemática identificamos conhecimentos pedagógicos relacionados à ação de fazer modelagem matemática e à ação de ensinar por meio da modelagem matemática.

Quando os futuros professores apresentam elementos que caracterizam atividades de modelagem matemática como: escolha de um tema, problema inicial, coleta de dados, matematização, resolução, interpretação de resultados, validação; indicam compreender que atividades de modelagem matemática são subsidiadas por esses elementos, os quais fazem referências as fases e etapas da modelagem matemática. A indicação de tais elementos sugere que os futuros professores têm conhecimento pedagógico relativo à modelagem matemática no que se refere a eles, uma vez que reconhecem que são inerentes à modelagem matemática.

Relacionado ao fazer modelagem matemática, os ciclos dos futuros professores depõem conhecimentos pedagógicos relativos ao fazer modelagem matemática quando eles utilizam passos sequenciais para descrever a modelagem matemática, ou seja, quando a descrevem por meio de etapas. Esse tipo de descrição denota conhecimento pedagógico relacionado a um modo particular de assumir como acontece (ou deve acontecer) o desenvolvimento de atividades de modelagem matemática em sala de aula.

Ainda no que concerne ao fazer modelagem matemática, as ações atreladas ao ensinar por meio modelagem matemática estão presentes na Figura 4 quando os futuros professores relacionam o passo a passo à estrutura cíclica associada a eles. Tais ações revelam que os futuros professores reconhecem que a prática docente precisa considerar atitudes pontuais (como o passo a passo) quando se almeja ensinar matemática utilizando-se da modelagem matemática como alternativa pedagógica e esse reconhecimento denota conhecimento pedagógico associado à ação de ensinar.

A Figura 5 também carrega especificidades da ação de ensinar por meio da modelagem.

Nela, as descrições que aparecem no ciclo focalizam ora o professor, ora o aluno. Essa alternância de sujeitos denota que os futuros professores compreendem que no fazer modelagem matemática há ações que competem mais aos alunos e outras, mais ao professor. Nesse sentido, o conhecimento pedagógico manifestado por esses futuros professores corresponde ao reconhecimento de que os papéis de professor e alunos são diferentes no fazer modelagem matemática.

As reflexões acerca dos dois ciclos discutidos neste artigo também nos encaminham a pensar no ciclo de modelagem matemática como instrumento didático (Borromeo Ferri, 2018) para o professor formador. Eles podem servir de apoio para o professor formador reorganizar suas aulas e incluir práticas que considerem aspectos presentes nesses ciclos, por um lado, e estruturar, planejar e realizar práticas futuras, por outro. Nesse sentido, o olhar para esses ciclos também contribui para ampliar os conhecimentos pedagógicos do professor formador e indica que a formação do professor é algo em constante evolução.

Enfim, nossa ponderação é de que os ciclos de modelagem matemática ora apresentados e discutidos refletem vivências e conhecimentos dos futuros professores sobre a modelagem matemática nos dois vieses abordados nessas considerações finais: conhecimento relativos à modelagem matemática e ao fazer modelagem matemática. Contudo, essas vivências e conhecimentos refletem uma visão particular da modelagem matemática, ao passo que revelam conhecimento pedagógico acerca dessa alternativa de ensino, da ação de fazer modelagem matemática como aluno e da ação de ensinar matemática por meio da modelagem matemática.

Do estudo empreendido destacamos que os ciclos de modelagem matemática favorecem olhares atentos e cuidadosos em relação aos conhecimentos de professores e alunos. Eles têm grande potencial para discussões que consideram quaisquer tipos de conhecimentos: de matemática, de ensino, de aprendizagem e da própria modelagem matemática. Sendo assim, os ciclos carregam potencialidades tanto didáticas como pedagógicas e essas potencialidades podem fomentar pesquisas futuras.

Referências

- Almeida, L. W., & Silva, K. P., & Vertuan, R. E. (2012). *Modelagem matemática na educação básica*. São Paulo, SP: Contexto.
- Almeida, L. M. W., Castro, É. M. V., & Silva, M. H. S. (2021). Recursos semióticos em atividades de modelagem matemática e o contexto on-line. *Alexandria (UFSC)*, 14, 383-406.
- Baldini, L. A. F. (2014). *Elementos de uma comunidade de prática que permitem o desenvolvimento profissional de professores e futuros professores de matemática na utilização do software GeoGebra* (Tese de doutorado). Universidade Estadual de Londrina, Londrina, PR.
- Ball, D. L., Thames, M. H., & Phelps, G. (2008). Content knowledge for teaching: What makes it special? *Journal of Teacher Education*, 59(5), 389-407.
- Barquero, B., Bosch, M., & Romo, A. (2018). Mathematical modelling in teacher education: Dealing with institutional constraints. *ZDM*, 50, 31-43.
- Bisognin, E., & Bisognin, V. (2015). Modelagem matemática em cursos de formação de professores: Uma contribuição para a construção do conhecimento pedagógico do conteúdo. *Educação Matemática em Revista*, 46, 35-43.
- Bisognin, V., & Bisognin, E. (2018). Compreensão do conceito de taxa de variação por professores em formação continuada. *REBECM*, 2(1), 27-40.

- Borromeo Ferri, R. (2006). Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process. *ZDM*, 38(2), 86-95.
- Borromeo Ferri, R. (2018). *Learning how to teach mathematical modeling in school and teacher education*. Kassel, Alemanha: Springer International Publishing.
- Borromeo Ferri, R., & Blum, W. (2010). Mathematical modelling in teacher education: Experiences from a modelling seminar. In V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne, & F. Arzarello (Eds.), *CERME-6 – Proceedings of the Sixth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education* (pp. 2046–2055). Lyon, França: Institut National de Recherche Pédagogique.
- Blomhøj, M., & Jensen, T. H. (2003). Developing mathematical modeling competence: Conceptual clarification and educational planning. *Teaching Mathematics and Its Applications*, 22(3), 123-139.
- Doerr, H. (2007). What knowledge do teachers need for teaching mathematics through applications and modelling? In W. Blum, P. Galbraith, H. Henn, & M. Niss (Eds.), *Modelling and applications in mathematics education* (pp. 69–78). New York, NY: Springer.
- Fernandez, C. (2015). Revisitando a base de conhecimentos e o conhecimento pedagógico do conteúdo (PCK) de professores de ciências. *Revista Ensaio*, 17(2), 500-528.
- Galbraith, P. (2012). Models of modelling: Genres, purposes or perspectives. *Journal of Mathematical Modelling and Application*, 1(5), 3-16.
- Graça, A. (2001). O conhecimento pedagógico do conteúdo: O entendimento entre a pedagogia e a matéria. In P. B. Gomes & A. Graça (Orgs.), *Educação física e desporto na escola: Novos desafios, diferentes soluções* (pp. 107-120). Porto, Portugal: FCDEF-UP.
- Grossman, P. (1990). *The making of a teacher: Teacher knowledge and teacher education*. New York, NY: Teachers College Press.
- Hegeto, L. C. F., Camargo, C. J., & Lopes, D. C. (2017). Conhecimentos didático-pedagógicos: Sentido e uso do planejamento. *Revista Transmutare*, 2(2), 211-227.
- Krauss, S., Bruckmaier, G., Lindl, A., Hilbert, S., Binder, K., & Steib, N., & Blum, W. (2020). Competence as a continuum in the COACTIV study: The "cascade model". *ZDM*, 52, 311-327.
- Kaiser, G., Schwarz, B., & Tiedemann, S. (2010). Future teachers' professional knowledge on modeling. In R. Lesh, P. Galbraith, C. R. Haines, & A. Hurford (Eds.), *Modeling students' mathematical modeling competencies. ICTMA 13* (pp. 433–444). New York, NY: Springer.
- Mishra, P., & Koehler, M. J. (2006). Technological pedagogical content knowledge: A framework for teacher knowledge. *Teachers College Record*, 108(6), 1017-1054.
- Perrenet, J., & Zwanevel, D. (2012). The many faces of the mathematical modeling cycle. *Journal of Mathematical Modelling and Application*, 1(1), 3-21.
- Pollak, H. (2015). The place of mathematical modelling in the system of mathematics education: Perspective and prospect. In G. Stillman, W. Blum, & M. S. Biembengut (Eds.), *Mathematical modelling in education research and practice: Cultural, social and cognitive influences* (pp. 265-276). New York, NY: Springer.
- Sousa, B. N. P. A., & Almeida, L. M. W. (2021). Formação do professor em modelagem matemática: Um olhar sobre o conhecimento pedagógico do conteúdo. *RenCiMa*, 12(2), 1-28.



Shulman, L. S. (1987). Knowledge and teaching: Foundation of the new reform. *Harvard Educational Review*, 57(1), 1-22.

Shulman, L. S. (2014). Conhecimento e ensino: Fundamentos para a nova reforma. *Cadernos Cenpec*, 4(2), 196-229. Disponível em <http://cadernos.cenpec.org.br/cadernos/index.php/cadernos/article/view/293/297>

Shulman, L. S. (1986). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Researcher*, 15(2), 4–14.