O uso da Tábua de Pitágoras para auxiliar na compreensão de Estruturas Multiplicativas em turmas de 7º ano do Ensino Fundamental

Using the Pythagorean Table to support the understanding of Multiplicative Structures in 7th-grade classes

Joás Lima de Aquino[1]
Danielle Avanço Vega[2]
Ewellen Tenório de Lima[3]

Resumo: O presente artigo apresenta um recorte de um estudo que compôs um trabalho de conclusão de curso, tendo como principal aporte teórico a Teoria dos Campos Conceituais. Com o objetivo de analisar o desempenho dos estudantes na resolução de problemas abordando Estruturas Multiplicativas, utilizou-se como recurso metodológico a Tábua de Pitágoras. Foi aplicado um teste de três questões, com 44 estudantes do 7º ano do Ensino Fundamental de uma escola pública estadual de Pernambuco e, em seguida, realizou-se uma intervenção com uso do recurso. Constatou-se que o uso da Tábua pode ser um bom auxílio no ensino das Estruturas Multiplicativas. Defende-se, ainda, que o uso de diferentes recursos pode favorecer o desempenho dos estudantes na compreensão das Estruturas Multiplicativas.

Palavras-chave: Estruturas Multiplicativas. Teoria dos Campos Conceituais. Tábua de Pitágoras.

Abstract: This article presents an excerpt from a study that comprised a course conclusion work, with the Conceptual Field Theory as its main theoretical contribution. With the aim of analyzing students' performance in solving problems addressing Multiplicative Structures, the Pythagorean Table was used as a methodological resource. A three-question test was applied to 44 students in the 7th year of Elementary School at a state public school in Pernambuco and then an intervention was carried out using the resource. It was found that the use of the Table can be a good aid in teaching Multiplicative Structures. It is also argued that the use of different resources can favor students' performance in understanding Multiplicative Structures.

Keywords: Multiplicative Structures. Theory of Conceptual Fields. Pythagorean Table.

1 Introdução

Ao abordar as Estruturas Multiplicativas no Ensino Fundamental, é preciso permitir que o aluno construa uma base sólida com diferentes significados, invariantes e representações simbólicas, considerando também uma variedade de recursos didáticos - a saber, jogos, tabuada e malha quadriculada - visando proporcionar uma compreensão sólida desse conceito. Acerca disso, Lorenzato (2006) ressalta a necessidade da diversidade dos instrumentos didáticos utilizados pelo docente para auxiliar nos processos de ensino e de aprendizagem e na consolidação da relação professor-aluno-conhecimento durante o momento de aquisição do saber a ser construído.

No que tange à multiplicação, o primeiro recurso que geralmente vem à mente do docente é a tabuada tradicional de multiplicação. Esta tabuada é uma tabela que lista as

[1] Universidade Federal de Pernambuco • Recife, PE — Brasil • joas.lima@ufpe.br • ORCID https://orcid.org/0009-0004-1118-1852

[2] Universidade Federal de Pernambuco • Jaboatão dos Guararapes, PE — Brasil • danielleavanco@gmail.com • ORCID https://orcid.org/0009-0005-2490-296X

[3] Universidade Federal de Pernambuco • Caruaru, PE— Brasil • ewellen.lima@ufpe.br • ORCID https://orcid.org/0000-0002-3654-0370

ISSN 2764-3158

multiplicações de um número específico por outros, de 1 a 10. Em geral, esse recurso é importante, pois explora de forma sistemática a operação aritmética em questão, facilitando, sobretudo, o entendimento e o cálculo. Ao explorar a tabuada, o aluno é capaz de discernir uma intrínseca lógica subjacente às relações entre os fatores multiplicativos, desvendando conexões e padrões significativos. Por exemplo, ao multiplicar um número par ou ímpar por 5, observa-se que o produto resultante termina, respectivamente, em 0 ou 5, revelando uma previsibilidade notável. Da mesma forma, ao multiplicar por 2, percebe-se que o resultado é sempre par, constituindo um conjunto consistente de unidades que inclui os dígitos {0, 2, 4, 6, 8}. Estes padrões inerentes, embora facilitem a memorização da tabuada e promovam o desenvolvimento do cálculo mental, não garantem, por si só, uma compreensão completa dos conceitos matemáticos subjacentes a esta operação.

E é aqui em que se encontra uma das *rupturas* que abrem portas para que esse recurso seja uma barreira no desenvolvimento cognitivo do discente acerca da multiplicação: limitar o estudante à memorização (o famoso *decoreba*) de padrões sem interiorizar os conceitos e as relações presentes dentro da tabuada ou da tabela de multiplicação – característica marcante de um sistema de ensino tradicional. Freire (2002, p. 10) já denunciava esse tipo de ensino ao trazer a seguinte crítica: "em lugar de ser o texto e sua compreensão, o desafio passa a ser a memorização do mesmo". Além disso, Lima e Maranhão (2014) também levantam a indagação acerca da verdadeira importância de memorizar cálculos, especialmente a tabuada, no ambiente escolar, enfatizando a necessidade de repensar sobre o objetivo de ensinar (que deveria, sobretudo, ser o aprender, o compreender e o apropriar-se; indo contra as práticas de memorização que ausentam o papel do *significado*).

Sendo assim, torna-se importante explorar uma variedade de estratégias para garantir que os alunos compreendam verdadeiramente o conceito por trás da multiplicação, de modo que eles possam vencer dificuldades quanto ao cálculo numérico nos anos posteriores, dominando, principalmente, as operações aritméticas que são a base da Matemática. A partir disso, nesse artigo, será abordada a Tábua de Pitágoras, um instrumento mais dinâmico em relação à tabuada tradicional, que permite uma compreensão mais profunda do conceito de multiplicação, promovendo a internalização das operações matemáticas e de suas propriedades fundamentais. Além disso, auxilia no desenvolvimento do cálculo mental e proporciona aos alunos a oportunidade de identificar padrões nas multiplicações, bem como de empregar estratégias pessoais e técnicas convencionais para resolver problemas envolvendo essa operação aritmética.

A motivação dessa abordagem se dá por uma interação com estudantes do 7° ano do Ensino Fundamental de uma escola pública do estado de Pernambuco, na qual, durante o ano letivo de 2023, foram perceptíveis dificuldades com problemas envolvendo as Estruturas Multiplicativas. Desse modo, foi necessário intervir, buscando uma estratégia para minimizar essas lacunas ainda presentes no Ensino Fundamental – Anos Finais. Esse triste cenário também expõe a realidade ressaltada pelos dados do Pisa 2022, em que 7 a cada 10 estudantes brasileiros, na faixa etária dos 15 anos, não sabem o mínimo esperado de Matemática (Bimbati, 2023).

Isso posto, o presente artigo busca explorar o recurso da Tábua de Pitágoras, destacando regularidades que podem auxiliar o estudante no desenvolvimento de uma ampla aprendizagem dessa operação fundamental da Matemática, além de conceitos presentes que enriquecem esse instrumento didático. Ainda, ter-se-ão uma análise breve desse conceito nos documentos oficiais da educação e como fundamentação teórica a Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud, a fim de entender como que um determinado *conceito* deve ser trabalhado e como que esse recurso didático em questão pode se tornar um *campo conceitual*. Por fim, foi realizada uma intervenção com estudantes do 7° ano do Ensino Fundamental, os quais, diante de situações-problemas envolvendo as Estruturas Multiplicativas, apresentaram dificuldades na realização de pequenos cálculos numéricos, evidenciando um déficit na aprendizagem da tabuada (fazendo surgir a necessidade de intervir com o objeto de pesquisa - a Tábua de Pitágoras). O intuito dessa intervenção foi de verificar a potencialidade desse instrumento didático na minimização dessas lacunas.

2 Fundamentação teórica

A princípio, é fundamental estar atento às dificuldades e às lacunas que os estudantes apresentam, mesmo sendo sobre conteúdos que deveriam ser vistos nos anos anteriores. O Currículo de Pernambuco, tendo como inspiração a BNCC, Base Nacional Comum Curricular (Brasil, 2018), esclarece a importância de

> Levar em conta as experiências e os conhecimentos matemáticos já vivenciados pelos estudantes, criando situações nas quais possam fazer observações sistemáticas de aspectos quantitativos e qualitativos da realidade, estabelecendo inter-relações entre eles e desenvolvendo ideias mais complexas. Essas situações precisam articular múltiplos aspectos dos diferentes conteúdos, visando o desenvolvimento das ideias fundamentais da matemática [...] (Pernambuco, 2021, p. 376).

De acordo com a BNCC (Brasil, 2018), o ensino da multiplicação começa a partir do 2° ano do Ensino Fundamental, e a primeira definição apresentada aos alunos é a de "adição sucessiva de parcelas iguais" (presente na tabuada tradicional). Do 2° ano ao 6° ano, os discentes devem aprender a tabuada das operações matemáticas básicas entre números naturais, como expõe o objeto de conhecimento do 6° ano: "Operações (adição, subtração, multiplicação, divisão e potenciação) com números naturais". Ainda, neste ano, a habilidade (EF06MA03PE) sugere que os estudantes consigam compreender os processos por trás dessas operações, seus significados e propriedades. Para que isso seja alcançado de fato, os Parâmetros Curriculares Nacionais - PCN (Brasil, 1998) já apontavam que o papel do professor ganha novas dimensões, entre elas: organizador da aprendizagem e facilitador desse processo. Nesse último papel, o docente deve fornecer informações que os alunos não conseguem obter sozinhos, por meio de explanações, materiais didáticos, textos e dentre outros, para que eles possam consolidar suas aprendizagens acerca do conceito em questão.

Os PCN (Brasil, 1998) também afirmam que o ensino da multiplicação deve ser em conjunto com o da sua operação inversa (a divisão), uma vez que "para desenvolver uma compreensão mais ampla da multiplicação é necessário trabalhar paralelamente multiplicação e divisão" (Brasil, 1998, p. 109). Para reforçar essa ideia, o psicólogo e matemático Gerárd Vergnaud, por volta do século 80, começava a formalizar a Teoria dos Campos Conceituais, que ainda se mantém em estudo nos dias atuais. Nessa teoria, Vergnaud (1996) buscava compreender como as crianças constroem os conceitos, incluindo os matemáticos, considerando tanto os aspectos cognitivos quanto a influência do contexto e das relações entre diferentes conceitos, de modo que um determinado conceito não pode ser aprendido de forma isolada.

A partir disso, pode-se conceituar *campo conceitual* como sendo "um conjunto informal e heterogêneo de problemas, situações, conceitos, relações, estruturas, conteúdos e operações do pensamento, conectados uns aos outros e, provavelmente, entrelaçados durante o processo de aquisição" (Moreira, 2002, p. 8). Para Vergnaud (1983), um determinado conceito só poderá ser compreendido a partir de um tripleto composto por três conjuntos: C = (S, I, R); em que **C** é o conceito; **S** são as situações; **I** são os invariantes operatórios; e **R** são as representações simbólicas. As situações referem-se aos diferentes e variados cenários ou problemas nos quais os conceitos são aplicados, de modo a contribuir para a construção do entendimento dos discentes de forma mais significativa. Os invariantes operatórios são os conhecimentos mobilizados para chegar à resposta de algum problema. As representações simbólicas são a forma com que o indivíduo expressa os conceitos mobilizados e registra sua linha de raciocínio.

Embora a Teoria dos Campos Conceituais seja uma teoria geral e que pode ser aplicada em diversas áreas de conhecimento, Vergnaud (1996) focou também seus estudos, além do raciocínio lógico, em dois campos conceituais: o aditivo e o multiplicativo. Em ambos, as operações estão inter-relacionadas, de modo que a multiplicação, por exemplo, deve andar junto com a divisão (valendo o mesmo para a adição e a subtração), formalizando, assim, as estruturas aditivas e multiplicativas. Com base nos estudos do campo multiplicativo (campo de foco deste trabalho), Souza e Magina (2017) afirmam que o campo conceitual multiplicativo consiste em situações-problemas que são categorizadas em problemas de: proporção, comparação multiplicativa e produto de medidas (organização retangular e combinatória).

Ainda, segundo pesquisas realizadas por Barbosa, Gomes e Araújo (2021), estudantes do Ensino Fundamental podem ainda apresentar dificuldades na resolução de problemas envolvendo essas estruturas multiplicativas, seja ao entender as situações-problemas, seja ao resolver a operação indicada. Isso posto, conforme Barros e Boaventura (2019), as dificuldades encontradas durante o percurso do domínio desses campos não podem ser ignoradas nem esquecidas, mas devem ser enfrentadas e solucionadas. Assim, diante das estruturas multiplicativas, é necessário compreender as vertentes no que cerne às dificuldades do estudante na resolução de problemas e, dessa forma, intervir para suavizar essas lacunas.

Com efeito, destaca-se a Tábua de Pitágoras como um recurso que pode exemplificar um tipo de *campo conceitual*, na medida em que, a partir dele, pode-se propor problemas e desafios para que o estudante explore o conceito da multiplicação e até o da divisão. Os invariantes operatórios podem ser entendidos como as propriedades e regularidades presentes na tabela pitagórica que mobilizam diversos conceitos (a inter-relação da multiplicação com outros conceitos matemáticos). A própria tábua é uma representação diferenciada da tabuada tradicional, o que permite a visualização do conceito em questão a partir de outros conceitos e de uma outra forma organizacional (como a organização retangular, uma das categorias das estruturas multiplicativas), contribuindo, com efeito, para a consolidação dos significados dessa operação aritmética, indo além de uma simples *memorização* proporcionada, por vezes, pela tabuada tradicional. Nesse sentido, a seguir, serão apresentados esse recurso e suas regularidades como uma possibilidade que potencializa a aprendizagem do conceito da multiplicação.

3 A Tábua de Pitágoras

A expressão *tabuada* deriva das tábuas de argila que eram empregadas na Grécia Antiga para facilitar e verificar resultados de cálculos matemáticos extensos, otimizando o processo de contagem e aliviando o fardo dos indivíduos que dependiam dessas operações em suas atividades cotidianas, notadamente os comerciantes (Editora Conceitos, 2017; Cassiano *et al*, 2017). Este termo, conhecido universalmente nos dias atuais, foi originalmente concebido por Pitágoras, o renomado matemático e filósofo grego do século VI a.C. Pitágoras desenvolveu uma tabela que simplificava a realização da operação de multiplicação, marcando o surgimento dos primeiros registros da tabuada de multiplicação. Por ter sido criada por ele na antiguidade, essa tabela recebeu o nome de Tábua de Pitágoras.

BY NC SA
ISSN 2764-3158

A Tábua de Pitágoras é uma tabela de multiplicação que é composta por uma dupla entrada, que são os dois eixos: horizontal e vertical (linha e coluna, respectivamente). Em cada um desses eixos, números de 1 a 10 são distribuídos, e, assim, forma-se uma grade de números, em que cada quadrado simboliza uma célula, a qual, por sua vez, representa o produto da multiplicação de dois números que rotulam a linha e a coluna correspondentes à célula fixada. Veja a seguinte ilustração:

Figura 1: Tábua de Pitágoras

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Fonte: Autoria própria.

Ao fixar um determinado quadrado, pode-se encontrar os fatores multiplicados na interseção da linha e da coluna correspondentes. Por exemplo, a célula cujo valor é o número 35 pode ser localizada na interseção da linha 7 com a coluna 5, ou da linha 5 com a coluna 7. Ainda, é importante frisar que, por ser uma tabela de multiplicação que vai de um vezes um até 10x10, existem na parte interna da tabela 100 produtos. Na Figura 1, pode-se identificar padrões que também são visíveis na tabuada tradicional de multiplicação, tais como:

- Todo número multiplicado por 1 resulta nele mesmo. Ex.: 6 x 1 = 6.
- Todo número multiplicado por 2 resulta em um produto par, isto é, um valor cujo algarismo das unidades pertence ao conjunto {0, 2, 4, 6, 8}. Ex.: 9 x 2 = 18.
- Todo número multiplicado por 5 resulta em um produto cujo algarismo das unidades será 5 (se o outro fator for ímpar) ou 0 (se o outro fator for par). Ex.: 3 x 5 = 15 e 4 x 5 = 20.
- Números multiplicados por 3, 7 e 9 possuem o algarismo da unidade alternando entre par e ímpar (padrão que também ocorre com os números 1 e 5).
- Todo número multiplicado por 10 resulta nele mesmo como algarismo da dezena e o 0 (zero) como algarismo da unidade. Ex.: 8 x 10 = 80.

Além desses padrões, uma regularidade possível de ser mais visualizada nessa tabela do que na tradicional é o fato de conseguir associar uma tabuada de um determinado número à de outros números menores. Ou seja, o estudante, ao tentar preencher essa tabela, ao chegar na tabuada do 4, por exemplo, pode se apoiar nas tabuadas anteriores. Veja a Figura 2.

Figura 2: Tabuada do 4 a partir das anteriores

ISSN 2764-3158

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Fonte: Autoria própria.

Note que a coluna 4 (destacada na cor verde) pode ser obtida somando os valores, na linha respectiva, da coluna 1 com a coluna 3 (destacadas na cor amarela) ou pegando o dobro da coluna 2 (destacada na cor cinza). Isso pode ser explicado pelo seguinte:

4 = 4 x 1 (o quádruplo de 1) = 1 + 3 = 2 + 2 = 2 x 2 (o dobro de 2)

Assim, ao tentar encontrar a seguinte multiplicação 7 x 4, o estudante pode decompor o número 4, por exemplo, em 1 + 3 (que correspondem a duas colunas que o estudante, a princípio, já deve ter calculado). Logo, tem-se:

7 x 4 = 7 x (1 + 3) = (7 x 1) + (7 x 3) = 7 + 21 = 28

Observe que, seguindo essa linha de raciocínio, o aluno mobiliza a propriedade distributiva (um exemplo de invariante operatório dentro do conceito da multiplicação), como também utiliza a decomposição aditiva de um número (ou multiplicativa, quando faz 4 = 2 x 2). Ainda, veja que o produto (7 x 1) é a célula correspondente à interseção da linha 7 com a coluna 1; e (7 x 3), linha 7 com a coluna 3. Dessa forma, o estudante poderá preencher a tabela completa mediante essa estratégia de cálculo.

Outra propriedade interessante a ressaltar é a da comutatividade, uma vez que, pela tabela pitagórica, o estudante pode refletir sobre o real significado dela. Isso porque, embora 4 x 7 = 28 e 7 x 4 = 28, por exemplo, a depender do contexto, podem significar coisas diferentes. Veja o seguinte problema: “João tem 4 sacos com 7 bolinhas de gude em cada. Quantas bolinhas ele possui?”. Aqui, tem-se 4 x 7 = 7 + 7 + 7 + 7 = 28 bolinhas (utilizando a ideia de adição sucessiva de parcelas iguais). Se fosse 7 x 4 = 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 = 28 sacos de bolinhas. Veja que há diferença.

Pode-se visualizar isso na tabela ao verificar as células correspondentes à multiplicação 4 x 7 e 7 x 4, as quais estão em locais diferentes, embora sejam o mesmo produto. Isso quer dizer que o encontro da linha 4 com a coluna 7 corresponde a um quadrado em uma localização diferente do que condiz ao encontro da linha 7 com a coluna 4. Nesse viés, pode-se, então, pensar nessas multiplicações como sendo um par ordenado do tipo (a, b) = (linha a, coluna b) = a x b. De fato, o par ordenado pode ser uma representação simbólica de uma multiplicação na tabela pitagórica. Sendo assim, a multiplicação 4 x 7 corresponde a (4, 7); e 7 x 4, a (7, 4). Perceba que há um novo conceito que pode ser mobilizado e relacionado dentro da Tábua de Pitágoras e que pode auxiliar o discente a enxergar essas outras características e significados.

Sobre significados, o que tem sido trabalhado até então é a definição da multiplicação como uma adição sucessiva de parcelas iguais. Contudo, como também apresentado na BNCC e nos PCN, outro significado que pode ser atribuído à multiplicação é o de "organização retangular", em que o produto 3 x 6 (por exemplo) pode ser representado a partir de uma figura retangular 3x6, que também pode ser visualizada na tabela pitagórica (Figura 3).

Figura 3: Representação do produto 3 x 6 por uma figura retangular

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Fonte: Autoria própria.

Note que a parte destacada na cor verde contém exatamente 18 quadradinhos, o que representa a multiplicação do 3 pelo 6 (linha 3, coluna 6). Quando os fatores forem iguais, os alunos irão visualizar ou destacar um quadrado perfeito, isto é, um dado número natural que pode ser escrito como o quadrado de outro número menor (ou, no caso do número 1, igual) ou que, ao extrair a sua raiz quadrada, resulta em outro número natural. Todos os números quadrados perfeitos de 1 a 100 podem ser visualizados na tabela pitagórica, conforme ilustrado na Figura 4.

Figura 4: Representação dos números quadrados perfeitos

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Fonte: Autoria própria.

Ainda, uma curiosidade sobre a localização desses números é que eles se encontram na diagonal principal da tabela. Essa propriedade é ilustrada na Figura 5.

Figura 5: Localização dos números quadrados perfeitos

x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
2	2	4	6	8	10	12	14	16	18	20
3	3	6	9	12	15	18	21	24	27	30
4	4	8	12	16	20	24	28	32	36	40
5	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50
6	6	12	18	24	30	36	42	48	54	60
7	7	14	21	28	35	42	49	56	63	70
8	8	16	24	32	40	48	56	64	72	80
9	9	18	27	36	45	54	63	72	81	90
10	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100

Fonte: Autoria própria.

Pela ilustração acima, é preciso se atentar que alguns desses números aparecem mais de uma vez, como o produto 16 que é condizente ao par ordenado (2, 8), isto é, a interseção do encontro da linha 2 com a coluna 8. Para explicar melhor esse detalhe, atente-se ao fato de que o número 16 possui os seguintes divisores: D (16) = {1, 2, 4, 8, 16}. Na Tabela Pitagórica, por ser até o produto 10 por 10, têm-se as seguintes multiplicações presentes: 2 x 8; 8 x 2 e 4 x 4 (aparecendo três vezes na tabela). Isso é bem diferente do número 25, que possui os divisores: D (25) = {1, 5, 25}; e só aparece o 5 x 5 dentro da tabela. Estas são situações que podem provocar interesse no estudante em entender o porquê disso, e, assim, ele mobilizará os conceitos de múltiplos e divisores para compreender melhor esses detalhes.

Uma outra curiosidade sobre essa diagonal dos números quadrados perfeitos é que ela é um eixo de simetria: os produtos na parte inferior são nada menos que valores espelhados da parte superior, o que ocorre devido à propriedade comutativa, em que a ordem dos fatores não altera o produto final (embora, em alguns casos, modifique o significado). Por fim, como destacado na fundamentação teórica, o conceito da multiplicação deve ser aprendido em paralelo com o da divisão, e esta pode ser também aprendida por meio da tabela pitagórica.

A partir da representação simbólica da multiplicação pelo par ordenado (a, b) = c, a ausência de um dos termos dele pode gerar a necessidade de se recorrer à ideia da divisão. Por exemplo, o par (__, 6) = 18 faz o estudante pensar: “qual o número que multiplicado por 6 resulta em 18?” (que é uma forma de entender a divisão). Ainda, pode-se utilizar a ideia de localização de par ordenado, em que olhe fixamente para o fator conhecido, em um dos seus eixos, para encontrar a célula cujo valor é o produto dado na expressão, como o 18. Após localizado, o estudante pode olhar para o outro eixo, que será exatamente o valor que corresponde à divisão dos dois números apresentados inicialmente no problema. Portanto, a Tábua de Pitágoras se apresenta como um recurso que permite a visualização de várias regularidades e potencialidades que podem auxiliar os estudantes na consolidação da operação da multiplicação, seus significados e propriedades.

4 Aspectos metodológicos

A presente pesquisa é de natureza qualitativa, que, segundo Lüdke e André (2014), permite ao pesquisador entender a realidade de sua pesquisa conforme se envolve com o processo de investigação da situação estudada, obtendo dados descritivos e dando maior ênfase ao processo do que ao produto. Com base nisso, foi realizada uma intervenção com duas turmas do 7° ano do Ensino Fundamental de uma escola pública do estado de Pernambuco, nas quais havia um número significativo de alunos com dificuldades na multiplicação e divisão. Foram destinadas duas aulas (para cada turma) para esse momento.

ISSN 2764-3158

Na primeira aula (50 minutos), foi apresentada a Tábua de Pitágoras por meio de explanações no quadro branco, explicando a representação simbólica da multiplicação pelo par ordenado, em que o primeiro termo indicaria a ordem da linha, e o segundo, a ordem da coluna. Foram feitos alguns exemplos no quadro a partir dessa ideia, para que os estudantes entendessem como preencher a tabela. Assim, foi entregue a eles uma tabela vazia, porém seria realizada uma dinâmica diferente. A fim de tornar a aula mais atrativa, foi decidido fazer um *ditado de pares ordenados*, em que seriam ditados 20 pares ordenados (em cada turma). Os estudantes ficariam atentos à cada par ditado e iriam procurar a localização dele na tabela pitagórica e, em seguida, preencher o quadrado encontrado com o valor correspondido da multiplicação entre os termos do par ordenado. Na segunda aula (50 minutos), foram entregues aos estudantes uma nova tabela já preenchida e uma ficha com 3 questões para os alunos responderem a partir da tábua. As três questões que compuseram essa ficha foram:

1) Localize os pares ordenados a seguir na Tábua de Pitágoras, represente cada par por meio da operação da multiplicação e diga o valor correspondido.

a) (2, 3)

b) (4, 5)

c) (7, 3)

d) (8, 4)

f) (1, 9)

g) (4, 8)

h) (7, 7)

i) (5, 9)

2) Preencha os pares ordenados abaixo, de acordo com o seu resultado correspondido na Tábua de Pitágoras.

a) (2, ___) = 16

b) (4, ___) = 32

c) (___, 7) = 35

d) (___, 9) = 63

e) (____, ____) = 56

3) Gustavo tem quatro calças jeans diferentes e sete camisas com cores diversificadas. De quantas maneiras Gustavo pode combinar as calças e as camisas? Use a Tábua de Pitágoras para auxiliar no cálculo.

Na primeira, os alunos iriam efetuar o mesmo passo a passo que na aula anterior, a fim de fixar bem a ideia da localização e dessa representação da multiplicação. Na segunda, procurou-se trabalhar o pensamento da divisão a partir da ausência de um dos termos do par ordenado. Na letra e), o aluno pode pensar nas possíveis decomposições multiplicativas, isto é, quais os dois fatores que multiplicados entre si resultam no produto 56. Por fim, na questão 3, tem-se uma questão problematizada que introduz também a ideia de Combinatória (produto de medidas), de modo que, ao sugerir o uso da tábua, permite que o estudante, ao não saber, de início, a operação ideal a ser aplicada – caso não tenha ainda domínio desse significado atribuído à multiplicação –, reflita que o recurso apresentado na aula teve como foco o conceito da multiplicação e, então, aplique essa operação para resolver o problema proposto.

5 Análise de Dados

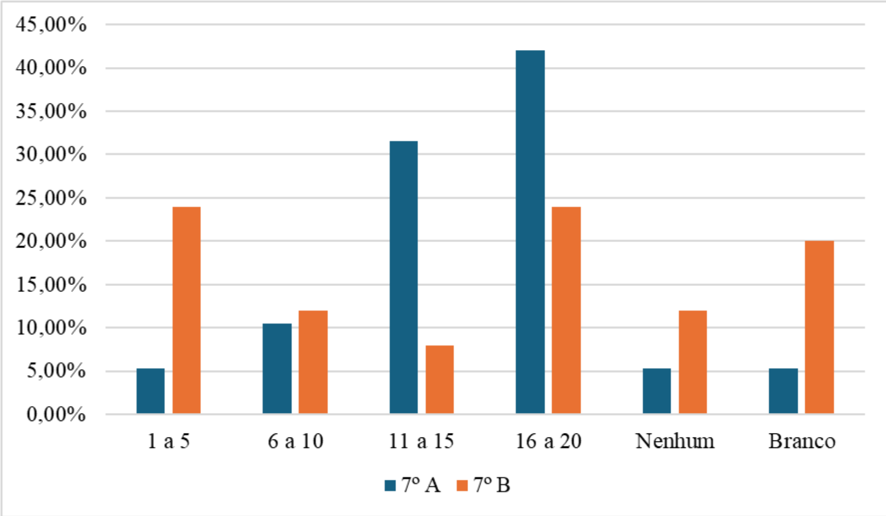
Os dados coletados em cada turma foram analisados tendo-se em consideração os perfis diferentes das mesmas. A turma do 7° A possui estudantes na faixa etária ideal para a etapa da escolarização, enquanto na turma do 7° B há um número significativo de estudantes fora dessa faixa etária esperada.

Para a primeira parte da intervenção, os pares ditados foram escolhidos aleatoriamente em ambas as turmas. No total, foram 20 pares ditados, e o intuito era ver se os estudantes conseguiriam entender a localização dos pares na tabela e como se dava a representação

BY NC SA
ISSN 2764-3158

simbólica proposta. No dia da aplicação, estavam presentes 44 estudantes (19 da turma A; 25 da turma B). O Gráfico 1 apresenta o número de acertos no que tange ao preenchimento da tabela pitagórica a partir do ditado dos pares ordenados de cada turma. Os dados foram analisados por acertos de: 1 a 5; 6 a 10; 11 a 15; 16 a 20; nenhum e deixou em branco.

Gráfico 1: Resultado quantitativo do ditado de pares ordenados



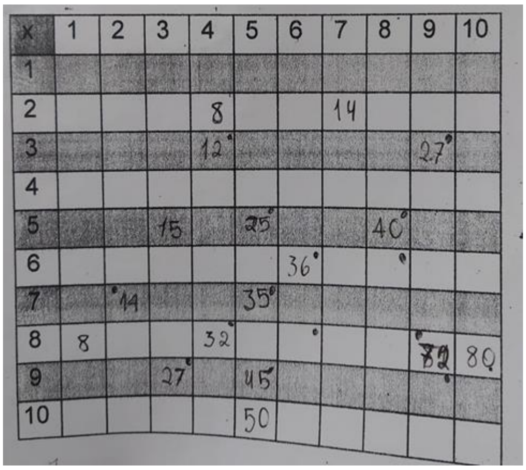
Fonte: Dados da pesquisa.

Os resultados, na turma B, foram medianos, mas que, em geral, se analisar quem fez acertos entre 1 a 10 e nenhum, a quantidade se sobressai quanto aos que acertaram entre 11 a 20. Já na turma A, dos 19 estudantes, 14 acertaram entre 11 e 20, mostrando um resultado, em geral, mais razoável. Embora a atividade estivesse bem explicada no quadro, alguns dos fatores que contribuíram para alguns resultados não almejados foram: falta de atenção, atraso para chegar na sala e ausência de material escolar (lápis e caneta, por exemplo). Houve estudantes que chegaram atrasados na sala (após o início da dinâmica), perdendo a explicação principal do recurso, além de outros que, ao escutarem os ditados, não faziam seus registros, pois não possuíam material para escrever, e, somente após alguns minutos, quando percebido o fato, os aplicadores tentaram providenciar material extra para os ajudar.

Ainda, foi perceptível que alguns discentes sabiam localizar os pares ordenados e outros não, como também alguns que sabiam localizar, mas não sabiam o resultado condizente, de modo que foi recomendado que fizessem pelo menos as marcações nos quadrados que correspondiam à localização dos pares, para entender que sabiam localizar, mas não o resultado. Um exemplo disso foi o registro do E26 (estudante 26), que deixou umas células sem serem preenchidas, mas que ficaram marcadas por um ponto.

Figura 6: Protocolo E26 (Ditado de pares ordenados)

BY NC SA
ISSN 2764-3158



Fonte: Dados da pesquisa.

O E26 respondeu parcialmente, deixando três pares sem serem respondidos, mas bem localizados: (8, 6); (6, 8) e (9, 9). Veja que é lógico os pares (8, 6) e (6, 8) não terem sido preenchidos, já que são o mesmo produto, o que mostra que o estudante tinha dificuldade em encontrar esse produto em específico. Alguns estudantes também tiveram dificuldades em localizar, deixando em branco alguns pares; outros localizaram os pares alterando a ordem proposta na atividade, ou seja, considerando o primeiro termo a coluna e o segundo a linha (representação por Plano Cartesiano), utilizando a propriedade comutativa (mas que não era a proposta). Ainda, outros tiveram dificuldades na própria tabuada ao se deparar até com a multiplicação entre fatores menores, como (3, 5) = 3 x 5 = 15, colocando 30 como resposta.

Partindo para a segunda aula (a aplicação da ficha), com a distribuição de uma tabela toda preenchida, as respostas dos discentes foram analisadas por questões. Começando pela questão 1, esta pedia para os estudantes localizarem os pares ordenados na tabela, colocando o produto correspondente à cada par e a representação do par pela multiplicação, isto é: (2, 3) = 2 × 3 = 6. O primeiro lado da igualdade é a representação por par ordenado; a parte do meio é a representação pela operação da multiplicação, e, por fim, a última parte é o produto correspondente. Deixando claro que, antes de entregar a ficha, foram revisadas pela segunda vez as representações acima. Para essa primeira questão, os resultados serão analisados com base na resposta em que o aluno, pelo menos, soube representar o produto correspondido ou a operação multiplicativa.

Tabela 1: Análise quantitativa e qualitativa das respostas da questão 1

	7° ano A	7° ano B
Acertou com todas representações	3	12
Acertou com uma das representações	12	8
Acertou parcialmente com todas representações (6 a 9)	0	2
Acertou parcialmente com uma das representações (6 a 9)	3	0
Acertou parcialmente com todas representações (1 a 5)	0	0

ISSN 2764-3158

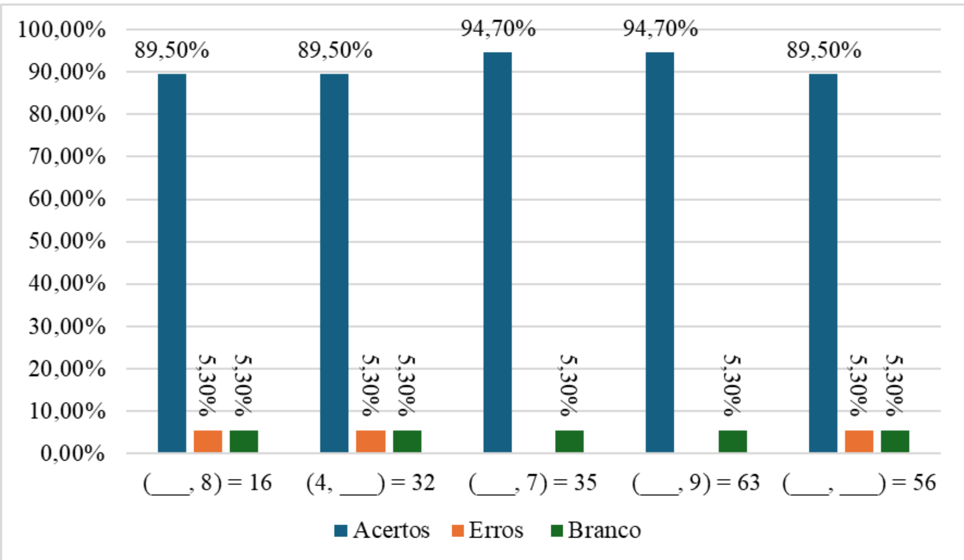
Acertou parcialmente com uma das representações (1 a 5)	0	2
Errou todas	0	0
Deixou em branco	1	1

Fonte: Dados da pesquisa.

Na categoria "Acertou com todas as representações" estão aqueles que acertaram todos os itens, utilizando as duas representações para um par ordenado (2, 3): 2 x 3 = 6; "Acertou com uma das representações" inclui aqueles que acertaram todos os itens, utilizando apenas uma das representações; "Acertou parcialmente com todas representações (6 a 10)" são aqueles que não acertaram todos os itens ou que deixaram alguns em branco com o uso das duas representações, chegando a ter entre 6 e 9 acertos; "Acertou parcialmente com uma das representações (6 a 10)" são aqueles que, conforme a categoria anterior, usaram apenas um tipo de representação; "Acertou parcialmente com todas representações (1 a 5)" são aqueles que tiveram entre 1 a 5 acertos; "Acertou parcialmente com uma das representações (1 a 5)" são aqueles que tiveram entre 1 a 5 acertos com o uso de apenas uma representação. Observe que a turma B seguiu a proposta ideal da questão em uma quantidade bem superior que a Turma A, isto é, fizeram uso das duas representações.

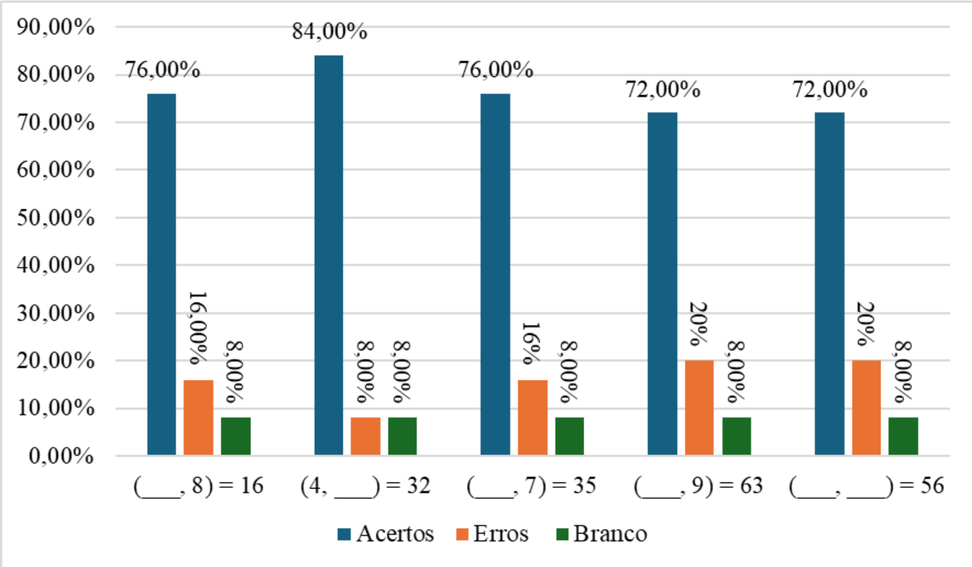
A segunda questão, por sua vez, teve como objetivo trabalhar a ideia de divisão por meio da ausência de um dos termos do par ordenado. Ainda, pensar na decomposição multiplicativa até dois fatores de um valor, como é o caso de: (___, ___) = 56. No total, foram propostos cinco itens, os quais serão analisados nas categorias: acertou / errou / deixou em branco. Seguem abaixo dois gráficos que apresentam o desempenho dos estudantes quanto à questão 2, trabalhando o recurso da Tábua de Pitágoras para a operação da divisão.

Gráfico 2: Análise quantitativa das respostas do 7° ano A na questão 2



Fonte: Dados da pesquisa.

Gráfico 3: Análise quantitativa das respostas do 7° ano B na questão 2



Fonte: Dados da pesquisa.

Nota-se que, mesmo sendo a operação da divisão, o desempenho de ambas as turmas foi consideravelmente bom. Chegando na última questão, foi proposto um problema contextualizado utilizando o princípio multiplicativo (introdução à Combinatória), que faz parte das categorias das estruturas multiplicativas. Este problema foi colocado nessa pequena ficha com o objetivo de observar se os discentes iriam conseguir resolver a questão com o auxílio da Tábua de Pitágoras. Esse auxílio poderia se dar por representar os dois valores como um par ordenado e, assim, procurar na tabela o produto correspondente ou simplesmente efetuar a operação (o que não fica claro se eles utilizaram a tábua ou não, uma vez que não precisa ser representado por um par para indicar que utilizou a tábua para encontrar o resultado). Os resultados foram analisados seguindo as categorias: Acertou / Errou / Deixou em branco. Na primeira categoria, independente da representação utilizada, se o estudante realmente deixou claro se usou ou não a Tábua de Pitágoras, todos acertos serão contabilizados. Segue a Tabela 2 abaixo.

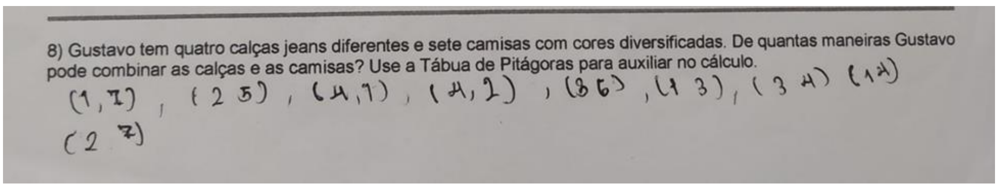
Tabela 2: Análise das respostas da questão 3

Categorias	7° ano A	7° ano B
Acertou	12 (63,2%)	11 (44%)
Errou	5 (26,3%)	5 (20%)
Deixou em branco	2 (10,5%)	9 (36%)

Fonte: Dados da pesquisa.

Para finalizar essa análise, será destacado o registro do E41 (estudante 41) que utilizou os conceitos aprendidos na tábua de outra forma que, embora não tenha conseguido chegar ao resultado, é interessante e remete à ideia de "produto de medidas". Veja a figura a seguir.

Figura 7: Protocolo E41 (Questão 3)



Fonte: Dados da pesquisa.

CC BY NC SA

Note que o estudante tenta encontrar os pares ordenados que podem ser formados a partir dos dois conjuntos para cada termo do par (a, b): a = {1, 2, 3, 4} e b = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7}, mas que não chega a esgotar todas as possibilidades, mostrando que talvez esse conceito seja novo para seu repertório.

6 Considerações Finais

A partir das análises apresentadas, evidenciou-se que apresentar a Tábua de Pitágoras e representar os produtos por meio de pares ordenados permitiu aos participantes associar um conteúdo matemático ao outro e, ao mesmo tempo, ajudou-os a identificar novas dificuldades, como no caso da dinâmica do ditado de pares ordenados. Nessa dinâmica, alguns estudantes tiveram dificuldades na localização dos pares ordenados, e outros conseguiram localizar, mas ainda tinham dificuldades em realizar alguma multiplicação em específico. É importante frisar que a abordagem com a Tábua de Pitágoras pode ser ampliada, para que mais regularidades possam ser apresentadas aos estudantes, a fim de estes dominarem a tabuada.

Ainda, considera-se que a intervenção foi positiva, pois a turma B, embora com alunos fora da faixa etária, apresentou uma boa interação nas aulas e um desempenho razoável na aplicação, inclusive tendo desempenho superior à turma A na primeira questão. Também, o uso do material para dar destaque à operação da divisão foi essencial, uma vez que este foi um dos tópicos com mais acertos dos estudantes com o apoio da tabela pitagórica. Além disso, em prol de auxiliar na resolução de problemas das estruturas multiplicativas, como no caso da questão 3, observou-se que os estudantes tiveram um bom estímulo para a resolução e até o desenvolvimento do pensamento combinatório (problema de produto de medidas), enfatizando uma das categorias das Estruturas Multiplicativas.

Por fim, mediante as análises realizadas, conclui-se que, diante de um cenário em que turmas de 7° ano ainda apresentam dificuldades nas operações básicas e na resolução de problemas envolvendo as estruturas multiplicativas, este trabalho surge como uma possibilidade de intervenção que revela um material que permite explorar as características das operações envolvidas, indo além de uma mera memorização de resultados da tabuada, convergindo com os objetivos dos estudos de Barbosa *et al* (2021) e Barros e Boaventura (2019). Por fim, pretende-se dar continuidade nessa pesquisa, verificando na prática com os alunos as demais regularidades desse recurso e sua potencialidade como instrumento de auxílio na aprendizagem das Estruturas Multiplicativas, visando contribuir para o domínio da multiplicação e divisão no Ensino Fundamental - Anos Finais.

Referências

Barbosa, G., Gomes, E., & Araújo, J. (2021). Experiência prática e resolução de problemas de comparação multiplicativa por estudantes dos Anos Finais do Ensino Fundamental. In *Anais do VIII Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática*. Uberlândia, MG.

Barros, R. A., & Boaventura, T. S. L. (2019). Desenvolvimento dos campos conceituais aditivo e multiplicativo no ensino dos números negativos: Uma análise crítica de livros didáticos. *Perspectivas da Educação Matemática (INMA/UFMS), 12*(28). Campo Grande, MS.

Bimbati, A. P. (2023). 7 em 10 alunos no Brasil não sabem mínimo de matemática, diz prova mundial. *UOL*. Disponível em: https://educacao.uol.com.br/noticias/2023/12/05/pisa-2022-alunos-brasil-desempenho-matematica.htm. Acesso em: 23 de abril de 2024.

ISSN 2764-3158

Brasil. Ministério da Educação. (2018). *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília, DF.

Brasil. Ministério da Educação e do Desporto: Secretaria de Educação Fundamental. (1998). *Parâmetros Curriculares Nacionais: Matemática*. Brasília, DF.

Cassiano, J., Queiroz, D. S., Gomes, B. N. B., Oliveira, L. S., & Dantas, R. M. (2019). A aprendizagem da tabuada de multiplicação e o artifício de ensino aprendendo a multiplicar com as mãos: Uma ação do subprojeto PIBID Matemática. In *11ª Jornada Acadêmica da UEG Campus Santa Helena de Goiás*. Santa Helena de Goiás, GO.

Freire, P. (2002). *Ação cultural para a liberdade*. Paz e Terra.

Lima, G. L., & Maranhão, M. C. S. de A. (2014). O caso da memorização de tabuadas de multiplicação. *Ensino da Matemática em Debate*, *1*(1). Disponível em: https://revistas.pucsp.br/index.php/emd/article/view/19792. Acesso em: 28 de abril de 2024.

Lorenzato, S. (Org.). (2006). *O laboratório de ensino de matemática na formação de professores*. Autores Associados.

Lüdke, M., & André, M. E. D. A. (2014). *Pesquisa em educação: Abordagens qualitativas* (2. ed.). E.P.U.

Moreira, M. A. (2002). A teoria dos campos conceituais de Vergnaud, o ensino de ciências e a pesquisa nesta área. *Investigações em Ensino de Ciências (UFRGS)*, *7*(1).

Pernambuco. Secretaria de Educação e Esportes. (2021). *Currículo de Pernambuco: Ensino fundamental*. União dos Dirigentes Municipais de Educação.

Souza, E. I. R., & Magina, S. M. P. (2017). A concepção de professor do ensino fundamental sobre estruturas multiplicativas. *Perspectivas da Educação Matemática (INMA/UFMS)*, *10*(24).

Tabela Pitagórica. (2017). Editora Conceitos.com. Disponível em: https://conceitos.com/tabela-pitagorica/. Acesso em: 20 de abril de 2024.

Vergnaud, G. (1983). Quelques problèmes théoriques de la didactique à propos d'un exemple: Les structures additives. *Atelier International d'Eté: Récherche en Didactique de la Physique*. La Londe-les-Maures, França.

Vergnaud, G. (1996). A Teoria dos Campos Conceituais. In J. Brun (Org.), *Evolução das relações entre a Psicologia do Desenvolvimento Cognitivo e a Didática da Matemática*. Instituto Piaget.

BY NC SA
ISSN 2764-3158