Argumentação e prova um estudo com parábola através da Resolução de Problemas

Argumentation and proof in working with parabola through Problem Solving

Mário Barbosa da Silva[1]
Norma Suely Gomes Allevato[2]

Resumo: Documentos curriculares e as pesquisas em Educação Matemática convergem ao valorizar o envolvimento dos alunos em atividades de resolução e proposição de problemas, aliadas à demonstração matemática. Este estudo, tem como objetivo analisar as contribuições da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, na construção do conhecimento matemático relacionado ao conceito de parábola e à dedução de sua equação. Os resultados indicam que essa metodologia possibilitou a construção e a compreensão do conceito de parábola, bem como a dedução de sua equação e o desenvolvimento do raciocínio matemático, conforme se evidenciou nos protocolos dos estudantes. Ademais, o processo avaliativo se constituiu em toda atividade, permitindo orientar os alunos no decurso da resolução do problema, promovendo aprendizagem matemática.

Palavras-chave: Resolução de Problemas; Argumentação e Prova; Parábola; Ensino Médio Profissionalizante; GeoGebra.

Abstract: Curriculum documents and research in Mathematics Education converge in valuing students' engagement in problem-solving and posing activities, combined with mathematical demonstration. This study aims to analyze the contributions of the Teaching Learning-Assessment Methodology in Mathematics through Problem Solving, in construction mathematical knowledge related to the concept of a parabola and the deduction of its equation. The results indicate that this methodology facilitated both the construction and understanding of the content and the concept of the parabola, as well as the deduction of its equation and the development of mathematical reasoning, as evidenced in the students' protocols. Furthermore, the assessment process was embedded in the entire activity, allowing guidance for students throughout the problem-solving process, thereby promoting mathematical learning.

Keywords: Problem-Solving. Argumentation and Proof. Parabola. Vocational High School. GeoGebra.

1 Introdução

Diante da crescente complexidade do mundo atual, exige-se dos indivíduos cada vez mais habilidades de pensamento crítico e de resolução de problemas, e a capacidade de adaptação a novas situações. Nesse contexto, o ensino da Matemática assume um papel fundamental na formação de cidadãos com elevado nível de conhecimento, aptos a contribuir tanto para o seu próprio desenvolvimento quanto para o da sociedade.

Documentos oficiais e orientação curricular de vários países, como a Base Nacional Comum Curricular (Brasil, 2018), Princípios e Normas para Matemática Escolar (NCTM, 2000) e o Programa de Matemática (Portugal, 2013), corroboram essa importância, destacando o desenvolvimento do raciocínio matemático como um dos principais objetivos da disciplina. Ademais, pesquisas em Educação Matemática têm evidenciado que o processo de

[1] Instituto Federal de São Paulo – campus Itaquaquecetuba • São Paulo, SP — Brasil • ✉ prof.mariodasilva@gmail.com • ORCID https://orcid.org/0000-0002-6660-6756
[2] Universidade Tecnológica Federal do Paraná – campus Londrina • Londrina, PR — Brasil • ✉ normallev@gmail.com • ORCID https://orcid.org/0000-0001-6892-606X

ISSN 2764-3158

aprendizagem por memorização e repetição pouco contribui para a compreensão conceitual dos conteúdos matemáticos, e demandam baixo nível de raciocínio matemático.

Os pesquisadores portugueses João Pedro da Ponte, Joana Mata-Pereira e Ana Henrique (2012, p. 356) salientam que, para desenvolver a capacidade dos estudantes de racionar matematicamente, é fundamental "[...] trabalhar em tarefas que, por um lado, requerem raciocínio e, por outro lado, estimulam o raciocínio. Só deste modo se pode esperar uma compreensão efetiva dos conceitos e procedimentos matemáticos por parte do aluno".

Diante desses aspectos, acreditamos que atividades fundamentadas na resolução de problemas podem ser uma estratégia de ensino eficiente para promover tanto a compreensão dos conceitos quanto dos conteúdos, trabalhados na disciplina de Matemática, além de desenvolver diversas habilidades cognitivas nos estudantes, as quais são relevantes para promover o raciocínio matemático, para novas aprendizagens e para a vida.

Assim, a Resolução de Problemas, conforme salientaram os pesquisadores brasileiros Mário Barbosa da Silva, Ilda Pavret Silva, Norma Suely Gomes Allevato e Janaína Poffo Possamai (2023, p. 2), apresenta "[..] características notáveis em sala de aula, no sentido de promover a aprendizagem, despertar o interesse dos estudantes de forma contextualizada e dinâmica, e adequada ao cenário de complexidade em que se encontram as escolas".

De forma semelhante, a pesquisadora portuguesa Isabel Vale (2017, p. 131) destaca que a resolução de problemas se configura como uma necessidade cada vez mais presente na prática dos professores, em virtude dos seus benefícios no processo de ensino e aprendizagem. Isso se deve "[...] à necessidade de práticas em sala de aula onde se desenvolvam capacidades criativas dos estudantes, permitindo que todos participem ativamente na sua aprendizagem, onde possam fazer suas pesquisas e compartilhar suas descobertas". Desse modo, neste trabalho, assumimos a Resolução de Problemas como uma metodologia de ensino que pode contribuir com a construção e o desenvolvimento do raciocínio matemático do estudante.

Por meio deste trabalho, objetivamos analisar as contribuições da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, na construção do conhecimento matemático relacionado ao conceito de parábola e à dedução de sua equação, segundo as concepções de Allevato e Onuchic (2021). Para atingir nosso objetivo, nos propusemos a responder a seguinte questão: Como ocorre a construção de conhecimento sobre parábola e a dedução de sua fórmula através da resolução de problemas? Esta é uma das práticas implementadas no âmbito de uma pesquisa maior desenvolvida pelos autores do presente trabalho.

Na sequência desta introdução, desenvolvemos uma breve discussão teórica sobre Resolução de Problemas; posteriormente, abordamos a argumentação e a prova matemática na literatura da Educação Matemática. Em seguida, apresentamos os procedimentos metodológicos adotados e as análises dos dados decorrentes da atividade proposta. Explicitamos, então, as considerações finais e, por fim, as referências.

2 Resolução de Problemas

Na atualidade, observa-se um consenso expressivo entre os educadores matemáticos quanto aos benefícios da implementação da Resolução de Problemas como metodologia de ensino no âmbito escolar. O pesquisador estadunidense John A. Van de Walle (2009, p. 9), salienta que, em um contexto de resolução de problemas, as atividades são centradas nos estudantes, além de promover o desenvolvimento de habilidades cognitivas e a plena compreensão de conceitos e conteúdos matemáticos, pois "[...] a compreensão e as habilidades

ISSN 2764-3158

são desenvolvidas melhor quando os estudantes têm a permissão para investigar novas ideias, criar e defender soluções para problemas e participar em uma comunidade de aprendizagem matemática".

A notoriedade dos benefícios de se trabalhar com a resolução de problemas no contexto escolar, também é enfatizada pelos pesquisadores espanhóis Antoni Vila e Maria Luiz Callejo (2006), principalmente no que se refere à compreensão do conteúdo matemático, além do desenvolvimento da autonomia do aluno. Esses pesquisadores enfatizam que:

> "[...] um problema não é apenas uma tarefa matemática, mas uma ferramenta para pensar matematicamente, um meio para criar um ambiente de aprendizagem que forme sujeitos autônomos, críticos e propositivos, capazes de se perguntar pelos fatos, pelas interpretações e explicações, de ter seu próprio critério estando, ao mesmo tempo, abertos aos de outras pessoas (Villa & Callejo, 2006, p. 10).

De forma semelhante, os pesquisadores norte-americanos Jinfa Cai e Frank Lester (2012) enfatizam que as atividades centradas na resolução de problemas têm por finalidade promover desafios intelectuais aos estudantes, com o intuito de promover a compreensão dos conceitos e dos conteúdos matemáticos abordados. Além disso, durante a tentativa de resolução, o estudante poderá recorrer aos seus conhecimentos prévios para auxiliá-lo tanto na resolução quanto na construção de conhecimento acerca de novo conteúdo matemático. Esses pesquisadores acreditam que, no contexto da resolução de problemas, se possibilita um processo dinâmico, no qual o aprendiz reformula suas ideias, conjecturas e aprendizado em cada resolução desenvolvida, pois "O poder da resolução de problemas reside no fato de que obter **uma solução bem-sucedida requer do estudante o aprimoramento, combinação e modificação do conhecimento que já adquiriram"** (Lester & Cai, 2016, p. 120, tradução e grifos nossos).

As pesquisas desenvolvidas pelas educadoras matemáticas brasileiras Lourdes de la Rosa Onuchic e Norma Suely Gomes Allevato (2011) convergem com os aspectos das pesquisas supracitadas. Elas salientam que implementar a Resolução de Problemas como uma metodologia de ensino, por elas intitulada Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, contribui significativamente com a compreensão e a aprendizagem de novos conceitos e conteúdos matemáticos, pois:

> [...] os problemas são propostos aos alunos antes de lhe ter sido apresentado, formalmente, o conteúdo matemático necessário ou mais aprimorado à sua resolução que, de acordo com o programa da disciplina para a série a ser atendida, é pretendido pelo professor. Dessa forma, o ensino-aprendizagem de um tópico matemático começa com um problema [problema gerador] que expressa aspectos-chave desse tópico, e técnicas matemáticas devem ser desenvolvidas na busca de respostas razoáveis ao problema dado. A avaliação do crescimento dos alunos é feita continuamente, durante a resolução do problema (Onuchic & Allevato, 2011, p. 85).

Para promover aprendizagem através da Resolução de Problemas, as pesquisadoras sugerem dez etapas para o desenvolvimento dessa Metodologia em sala de aula:

> (1) proposição do problema; (2) leitura individual; (3) leitura em conjunto; (4) resolução do problema; (5) observar e incentivar; (6) registro das resoluções na lousa; (7) plenária; (8) busca pelo consenso; (9) formalização e (10) proposição e resolução de novos problemas (Allevato & Onuchic, 2021, p. 52)

Em um contexto de aprendizagem através da Resolução de Problemas, a compreensão dos conceitos e dos conteúdos emergirão; ocorrerá a busca por justificativas embasadas em conceitos, para concordar com ou refutar a resolução apresentada. Além disso, será possível aprender diversas formas de resolução, além de desenvolver o raciocínio matemático e construir dados avaliativos em processo, ou seja, no decurso da aprendizagem. Esclarecidas essas ideias, na sequência apresentamos os aspectos teóricos sobre argumentação e prova matemática.

2.1 Argumentação e Prova Matemática

A literatura em Educação Matemática (Balacheff, 2019; Boavida, Gomes & Machado, 2002; Costa, 2023; De Villiers, 2010; Krakecker, 2022; Silva, 2016), bem como os documentos oficiais (Brasil, 2018; England, 2014; MENESR, 2015; NCTM, 2000) são contundentes em enfatizar a necessidade de desenvolver atividades de argumentação e prova matemática em todos os níveis de ensino, desde a Educação Básica. Essa importância refere-se ao desenvolvimento de habilidades cognitivas fundamentais para a constituição do cidadão reflexivo, crítico, criativo e com autonomia intelectual, como preconizado pela sociedade atual.

O pesquisador francês Nicolas Balacheff (2019, p. 425, tradução e grifos nossos) salienta que as ações de "resolver, **argumentar**, **provar**, demonstrar, comunicar e convencer oralmente ou por escrito são todas dimensões da competência "raciocínio" que os programas[3] desejam que sejam adquiridas". No entanto, o pesquisador preconiza que, apesar de existir uma relação entre explicar, argumentar, provar e demonstrar no contexto escolar, se faz necessário esclarecer a distinção destes termos para promover uma compreensão coerente.

A explicação visa esclarecer e validar um argumento a partir do entendimento do estudante, por meio dos seus conhecimentos prévios e sem regras, além de possibilitar a discussão, a rejeição ou não; a prova é uma explicação oferecida por meio de argumentos convincentes e aceita por uma comunidade; e, finalmente, a demonstração (matemática) expressa um conjunto bem definido de regras e atende aos padrões atuais estabelecidos pela comunidade de matemáticos (Balacheff, 2019). De modo semelhante, a pesquisadora italiana Bettina Pedemonte (2007) considera a existência de uma unidade cognitiva para descrever as estruturas do raciocínio matemático do aluno utilizados para compreender, elaborar, comunicar e validar argumentos matemáticos. Segundo Pedemonte (2007), durante uma atividade de resolução de problemas matemáticos, os estudantes desenvolvem argumentos para justificar suas respostas e chegar a uma conjectura. Nesse contexto, "[...] a unidade cognitiva propõe que, em alguns casos, essa argumentação possa ser utilizada pelo aluno na construção da prova, através da organização, em cadeia lógica, de alguns argumentos previamente produzidos" (Pedemonte, 2007, p. 25, tradução nossa).

Para a educadora e filósofa canadense Gila Hanna (1990), há que se considerar três aspectos da prova no âmbito da Educação Matemática: (1) prova formal, (2) prova aceitável e (3) ensino da prova. A prova formal foi desenvolvida para evitar erros graves e a necessidade de recorrer a evidências intuitivas e ao julgamento humano. A prova aceitável visa apresentar implicações relevantes para o ramo da Matemática e produzir conexões com outras áreas do saber. Por fim, o ensino de prova tem por objetivo utilizar ideias matemáticas para demonstrar a importância das propriedades aplicadas nesse processo para alcançar o resultado.

Segundo Hanna (1990), o ensino de prova pode apresentar duas características. As provas que provam e as provas que explicam. Elas não apresentam distinção quanto ao grau de rigor e ambas são aceitas pela comunidade matemática. As provas que provam têm por objetivo

[3] Documentos curriculares franceses *Ministère de L'Éducation Nationale de L'Enseignement Supérieur et de la Recherche* (MENESR).

ISSN 2764-3158

evidenciar que um determinado teorema ou resultado matemático é verdadeiro, enquanto as provas que explica, além disso, pretendem evidenciar quais foram as propriedades, ideias e os conceitos matemáticos empregados para comprovar a veracidade do teorema.

O educador matemático britânico Andrea Stylianides (2007) relaciona o conceito de prova matemática no contexto escolar com:

> [...] um argumento matemático, uma sequência conectada de afirmações a favor ou contra uma reivindicação matemática, com as seguintes características: 1. Utiliza declarações aceitas pela comunidade de sala de aula (conjunto de declarações aceitas) que são verdadeiras e disponíveis sem necessidade de justificativa adicional; 2. Emprega formas de raciocínio (modo de argumentação) que são válidas e conhecidas pela comunidade de sala de aula ou dentro do seu alcance conceitual; e 3. É comunicada com formas de expressão (modos de representação de argumentos) que são apropriadas e conhecidas pela comunidade de sala de aula ou dentro do seu alcance conceitual (Stylianides, 2007, p. 291, tradução nossa)

Em suma, as perspectivas desses pesquisadores evidenciam a complexidade e a importância de desenvolver atividades que fomentem a argumentação, a prova e a demonstração matemáticas, visando à capacidade de analisar, criticar, justificar, conjecturar, argumentar, provar e demonstrar, essenciais para a construção do raciocínio matemático do estudante, conforme salientou Balacheff (2019). Ademais, as atividades fundamentadas no trabalho através da resolução de problemas se constituem como um meio privilegiado, pois, além desenvolverem as habilidades especificadas por Balacheff (2019), também desenvolvem a criatividade, a autonomia e a habilidade de explicação, e os "[...] processos sofisticados de pensamento matemático e o trabalho de ensino de Matemática acontecem em um ambiente de investigação [...]" (Allevato & Onuchic, 2021, p. 53).

Por esta razão, neste trabalho, concebemos a prova matemática no contexto escolar como um processo social, em que os interlocutores utilizam seus conhecimentos prévios para elaborar argumentos conectados, além de empregar conceitos e a escrita matemática para validar as respostas ao problema gerador. O problema gerador é proposto para desencadear e orientar a construção e a compreensão de novos conteúdos e conceitos matemáticos, bem como para promover oportunidade de argumentação e prova, e o raciocínio matemático. Considerando esses aspectos, na próxima seção apresentamos a metodologia de pesquisa, juntamente com o relato e a descrição da prática desenvolvida no contexto escolar.

3 Metodologia de pesquisa

A investigação apresentada neste trabalho é parte de uma pesquisa de doutorado. Desenvolvemos uma sequência didática fundamentada na resolução de problemas, visando à promoção tanto da construção e compreensão de novos conteúdos e conceitos sobre as cônicas quanto à demonstração das equações de cada uma. A prática aqui relatada, especificamente sobre parábola, foi desenvolvida em seis encontros[4] em cada turma participante, realizados em setembro e outubro de 2023, e envolveu duas turmas do 3º ano do Ensino Médio Profissionalizante, sendo 36 estudantes no 3ºA e 38 no 3ºB. A escola está situada em uma cidade da região metropolitana de São Paulo, Brasil.

Trata-se de um estudo de natureza qualitativa que, conforme sugerem Borba, Almeida e Gracia (2018), prioriza a compreensão da dinâmica da sala de aula, as discussões e as produções

[4] Cada encontro teve a duração de 90 minutos, ou seja, duas aulas de 45 minutos cada

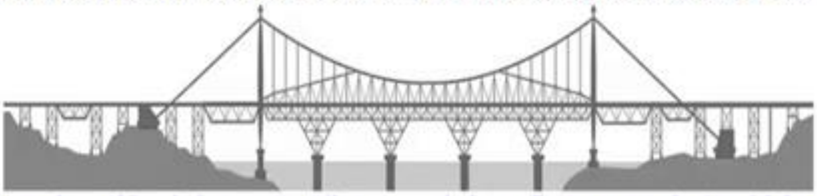
dos estudantes participantes.

Para atingir o objetivo proposto, concordamos com pesquisadores estadunidenses Frank Lester e Jinfa Cai (2016, p. 122) ao salientarem que "[...] problemas matemáticos que são verdadeiramente problemáticos e envolvem matemática significativa têm o potencial de fornecer os contextos intelectuais para o desenvolvimento matemático dos alunos". Desse modo, reformulamos uma questão de livro didático relacionada ao conceito de parábola, apresentada na Figura 1.

Figura 1. Problema de Engenharia Civil

Atualmente, o desenvolvimento na área da construção civil possibilitou o acesso a diversas regiões, tanto no Brasil como em outros países, que, em época passada, só era possível por navegação. A engenharia desenvolveu um tipo de ponte suspensa, intitulada de 'Ponte Pênsil', que é sustentada por um sistema de cabos e mastros, visando não interferir no tráfego marítimo e transpor grandes distâncias. Os cabos de suspensão devem ser ancorados em cada extremidade da ponte, e qualquer carga aplicada à ponte é transformada em tensão nesses cabos principais. Os cabos principais continuam além das torres de suporte até os suportes no nível do convés e continuam ainda as conexões com as âncoras no solo, conforme a Figura 1:

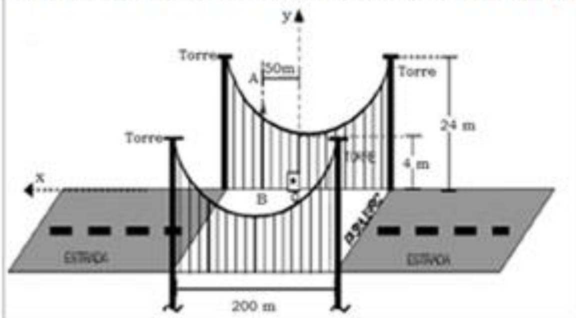
Figura 1. Ponte Hercílio Luz, Florianópolis, com 821 m de extensão e 15,92 m de largura de vão



Fonte: Conheça a história da Ponte Hercílio Luz, em Florianópolis | Santa Catarina | G1 (globo.com)

O engenheiro civil Leonardo Ibn Izzid Hassan Said, da empresa Plano&Plano, na construção da ponte pênsil precisou interromper os trabalhos devido a um problema no projeto. Ele iniciou um estudo detalhado do projeto e, para que a construção da ponte apresentasse exatidão no seu formato, os seus cálculos possibilitaram confirmar que as torres de suporte deveria ter 24 m de altura e um intervalo entre elas de 200 m. O ponto mais baixo de cada cabo fica a 4 m do leito da estrada conforme a imagem da Figura 2:

Figura 2. Projeto do estudo do engenheiro Leonardo da ponte pênsil



Fonte: Adaptado de Giovanni; Bonjorno, 2005, p. 131

O principal objetivo desse problema gerador, constituído por este enunciado e mais 7 questões, foi iniciar um novo conteúdo matemático, conforme as recomendações de Allevato e Onuchic (2021), neste caso especifico relacionados à parábola, trabalhados na Geometria Analítica. Além disso, foi proposta a dedução formal da equação dessa cônica, mobilizada pela utilização do GeoGebra, associada à exploração matemática necessária à resolução do problema, com vistas à valorização das relações entre a resolução de problemas e a prova matemática, conforme preconizou Pedemonte (2007). Na sequência, apresentamos as questões que compõem o problema gerador, bem como as análises e as interpretações dos dados que foram gerados pelos participantes.

4 Análise e interpretação dos dados

Após serem oferecidas as orientações sobre a atividade, cada estudante recebeu uma

ISSN 2764-3158

cópia do problema gerador para uma leitura individual. Em seguida, em grupos, iniciaram a leitura e a discussão com os colegas, para desenvolverem as estratégias de resolução. Esperávamos que os estudantes, após a compreensão do problema, elaborassem uma representação da situação utilizando os recursos do GeoGebra ou papel e lápis, e, depois, utilizassem seus conhecimentos prévios para encaminhar uma possível resolução. Em seguida, cada grupo[5] apresentou sua resolução, registrando no quadro e explicando o que tinha pensado. A apresentação não teve uma ordem pré-estabelecida, ocorrendo conforme cada grupo se dispunha a apresentar os resultados obtidos aos seus colegas.

De uma maneira geral, os dezoito grupos conseguiram responder corretamente o item (1) ao especificarem que a curva entre as torres forma uma parábola. Esses aspectos são evidenciados na resposta dos estudantes do G3-3°A,[6] uma das quais é apresentada a seguir:

Figura 2. Resposta da questão 1 do G3-3°A

1) Qual o possível nome para a curva formada pelos cabos entre duas torres consecutivas? É possível obter o nome da curva usando o GeoGebra? Como?

O possível nome da curva é parábola. É possível construir no Geogebra digitando o comando Parábola [<ponto>, <reta>] na entrada com os devidos parâmetros

Fonte: Acervo da Pesquisa

Ao ser questionado pelo pesquisador, o grupo informou que após a leitura do problema, concluíram que o formato dos cabos curvos da ponte só poderia ser uma parábola. Neste momento, o grupo foi orientado pelo pesquisador sobre a importância de justificar suas respostas: Como é possível justificar que o formato curvo dos cabos da ponte é uma parábola? Além disso, é possível evidenciar que o grupo utilizou um comando do GeoGebra para construir a parábola, ou seja, o grupo usou seus conhecimentos aprendidos na atividade sobre circunferência, que precedeu esta, e respondeu corretamente a esse item. Esses fatos contribuíram para o grupo responder corretamente também o item (2).

Figura 3. Resposta da questão 2 do G3-3°A

2) Como podemos representar a curva entre as torres com o software de geometria dinâmica GeoGebra?

1°: criamos um ponto e uma reta
2°: utilizamos o comando "parábola"

Fonte: Acervo da Pesquisa

No item (3), apesar dos estudantes conseguirem construir a cônica com o GeoGebra, evidenciamos a falta de compreensão sobre o que são os elementos que compõem a parábola. Esses fatos são apresentados na Figura 4, com as resoluções dos grupos G9-3°A e G8-3°B.

Figura 4. Resposta da questão 3 dos grupos G9-3°A e G8-3°B

Resposta do G9-3°A

3) Quais os elementos que compõem a curva?

O centro, o eixo maior e o eixo menor

Resposta do G8-3°B

3) Quais os elementos que compõem a curva?

Pontos dependendo da LARGURA dA toRRe

Fonte: Acervo da Pesquisa

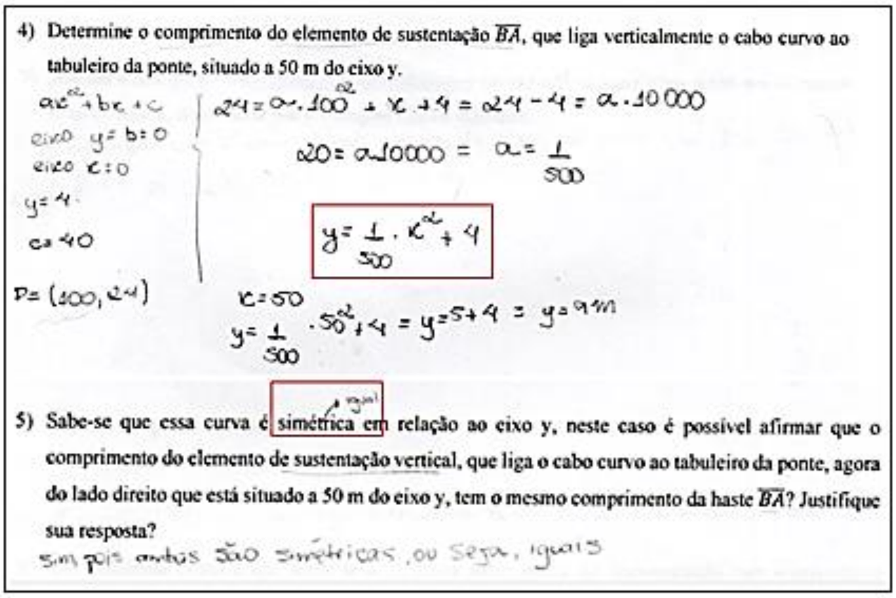
[5] Foram formados nove grupos em cada turma, sendo quatro estudantes por grupo no 3°A; e sete grupos com quatro e dois grupos com cinco estudantes no 3°B.
[6] Os grupos foram denotados por um número e pela sua turma, por exemplo: G3-3°A corresponde ao grupo 3 da turma 3°A.

Apenas três grupos de cada turma responderam corretamente esse item. Ao serem questionados pelo pesquisador, durante o momento de plenária, sobre como encontraram os elementos da parábola, os grupos que responderam corretamente informaram que consultaram seu livro didático ou realizaram uma busca na internet, enquanto os outros grupos basearam suas respostas na intuição. Percebemos que aspectos de natureza investigativa são desenvolvidos durante as atividades de resolução de problemas, conforme salientaram os pesquisadores (Allevato & Onuchic, 2021; Van de Walle, 2009).

As três primeiras questões foram cruciais para fomentar os conceitos de parábola e a dedução da sua equação. Os estudantes relacionaram o formato curvo dos cabos da ponte com o formato do gráfico da função quadrática, além de identificar os elementos da parábola e a sua expressão. Esses aspectos são evidenciados com a resposta da quarta questão, ao solicitar o cálculo do comprimento da haste $(\overline{BA})$. Nosso objetivo era evidenciar como os estudantes desenvolveriam uma expressão para a parábola utilizando os valores fornecidos na Figura 1 do problema gerador. Essa expressão representa um caso particular da equação geral solicitada na questão 6, servindo como base para a sua dedução.

A resolução do G4-3°A foi realizada utilizando o conceito de função quadrática. O grupo deduziu a equação da parábola que representa o cabo curvo da ponte, calculou o comprimento da haste $(\overline{\mathrm{BC}})$ e respondeu corretamente à questão 5 empregando o conceito de simetria. A figura a seguir ilustra essa situação.

Figura 5. Resolução da questão 4 do G3-3°A


4) Determine o comprimento do elemento de sustentação $\overline{BA}$, que liga verticalmente o cabo curvo ao tabuleiro da ponte, situado a 50 m do eixo y.

ax^2+bx+c
eixo $y = b:0$
eixo $c:0$
$y=4$
$c=40$
$P=(100,24)$

$24 = a.100^2 + x + 4 = 24 - 4 = a.10000$
$20 = a.10000 = a = \frac{1}{500}$
$\boxed{y = \frac{1}{500} . x^2 + 4}$
$x = 50$
$y = \frac{1}{500} . 50^2 + 4 = y = 5 + 4 = y = 9m$

5) Sabe-se que essa curva é simétrica em relação ao eixo y, neste caso é possível afirmar que o comprimento do elemento de sustentação vertical, que liga o cabo curvo ao tabuleiro da ponte, agora do lado direito que está situado a 50 m do eixo y, tem o mesmo comprimento da haste $\overline{BA}$? Justifique sua resposta?
sim pois ambas são simétricas, ou seja, iguais

Fonte: Acervo da Pesquisa

O grupo G7-3ºB e os demais grupos das duas turmas também utilizaram o conceito de função quadrática para calcular o comprimento da haste. Entretanto, encontramos algumas divergências na resolução desenvolvida por esses estudantes, conforme exposto pela Figura 6, que foram esclarecidas no momento de plenária. Quando o grupo foi questionado pelos seus colegas sobre o que significa 1 = b = 0, logo após a expressão $y=ax^2+bx+c$, os estudantes explicaram que se referia à ordem na resolução: primeiro determinaram o valor do coeficiente numérico *b* da variável x e o termo independente *c*, ao substituir o valor do par ordenado (0, 4) em x e y da equação. Neste momento, o pesquisador questionou o grupo sobre o nome desse ponto que eles utilizaram. Um membro do grupo mencionou que era o ponto mais baixo da curva e, após alguns momentos, um colega de outro grupo, especificou que se tratava do ponto

ISSN 2764-3158

do vértice da parábola. Em seguida, os estudantes calcularam o valor do coeficiente numérico a da variável x^2 utilizando o par ordenado (100, 24) para localizar uma das torres da ponte, e substituíram na expressão analítica $y=ax^2+bx+c$, onde y vale 24, x = 100, b = 0 e c = 4. Embora os estudantes tenham utilizado o sinal de adição na penúltima linha, entre os termos $\left(\frac{1}{500}\right)$ $e\ x^2$, após a substituição dos valores, operaram corretamente a multiplicação. Neste momento, os alunos de outros grupos levantaram dúvidas, pois não haviam compreendido o cálculo, uma vez que o grupo apresentador não havia identificado claramente qual incógnita estava sendo calculada, transformando a equação em uma expressão numérica. Um estudante do grupo 7 esclareceu que a medida da haste correspondia ao valor de y, completando assim a resposta com $y=9m$. Dê acordo com Allevato e Onuchic (2021, p. 50), o objetivo da plenária em um contexto de resolução de problemas é fazer com que "[...] o professor estimule os alunos a compartilharem e justificarem suas ideias, defenderem pontos de vista, compararem e discutirem as diferentes soluções, isto é, avaliarem suas próprias resoluções de modo a aprimorarem a apresentação (escrita) da resolução".

Figura 6. Resolução da questão 4 do G7-3ºB

Determine o comprimento do elemento de sustentação $\overline{BA}$, que liga verticalmente o cabo curvo ao tabuleiro da ponte, situado a 50m do eixo y.

$y = ax^2 + bx + c$
$1 = b = 0$
$x = 0$
$4 = 4$
$24 = a \cdot 100^2 + 0 \cdot x + 4$ $= 24 - 4 = a \cdot 10000 \rightarrow 20 = A \cdot 10000$
$a = 1/500$
$y = (1/500) + x2 + 4$ para $x = 50$ e $4 = (1/500)\,50^2 + 4 = 4 = 5 + 4 \rightarrow$
$y = 9m.$

Fonte: Acervo da Pesquisa

Pelas respostas dos estudantes, acreditamos que eles desenvolveram a generalização, ao obterem a expressão do problema por meio do raciocínio lógico, explicativo e coeso, além de empregar a escrita matemática na dedução, e para calcular o comprimento da haste. Cabe ressaltar, que os recursos do GeoGebra foram essenciais para promover a visualização da parábola aos estudantes e no desenvolvimento e teste de suas conjecturas para encontrar a resposta da questão.

Um dos grupos, o G4-3°A, não conseguiu relacionar a expressão da parábola determinada na resolução da questão 4 com a pergunta da questão 6. Assim, o grupo não soube justificar, informando apenas que se trata de uma equação de 2° grau.

Figura 7: Resposta da questão 6 do G4-3°A

6) Determine a expressão que generalize a situação do problema? Justifique sua resposta?

$f(x) = ax^2 + bx + c$

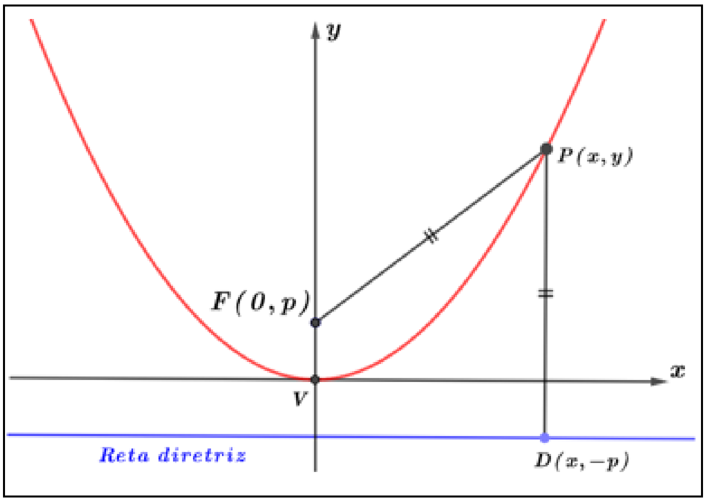
→ Porque é uma função de 2° grau, que calcula o angulo, algo justificavel para uma parabola

Fonte: Acervo da Pesquisa

Apesar de alguns grupos de ambas as turmas apresentarem dificuldades na resolução do problema, evidenciamos que esses aspectos vão ao encontro das recomendações de Allevato e Onuchic (2021) e Vale (2017), ao mencionarem que a resolução de problemas pode contribuir no processo de ensino e aprendizagem durante o desenvolvimento das resoluções dos alunos, promover a participação ativa em todo o processo de resolução e de apresentação de suas respostas, estimular o compartilhamento de descobertas e aprendizagem, além de desenvolver a capacidade criativa e de raciocínio matemático, como salientado pelos documentos oficiais (Brasil, 2018; Portugal, 2011; NCTM, 2000) e por (Ponte et al., 2012). Além disso, foi possível evidenciar que os argumentos elaborados pelos estudantes contribuíram para promover uma sequência conectada e lógica de afirmações (Balacheff, 2019; Pedemonte, 2007; Styliniades, 2007), e para explicar quais foram os conceitos, propriedades e ideias empregadas na resolução, conforme preconizou Hanna (1990) sobre provas que explicam.

Diante das respostas dos grupos e com as intervenções realizadas por nós durante os momentos de resolução e de plenária, elaboramos outra atividade para que os grupos pudessem compreender e desenvolver a relação para deduzir a equação que generaliza a representação de famílias de parábolas. Apresentamos a eles o gráfico a seguir, acessado por um link que lhes foi fornecido previamente:

Figura 8. Gráfico fornecido aos estudantes



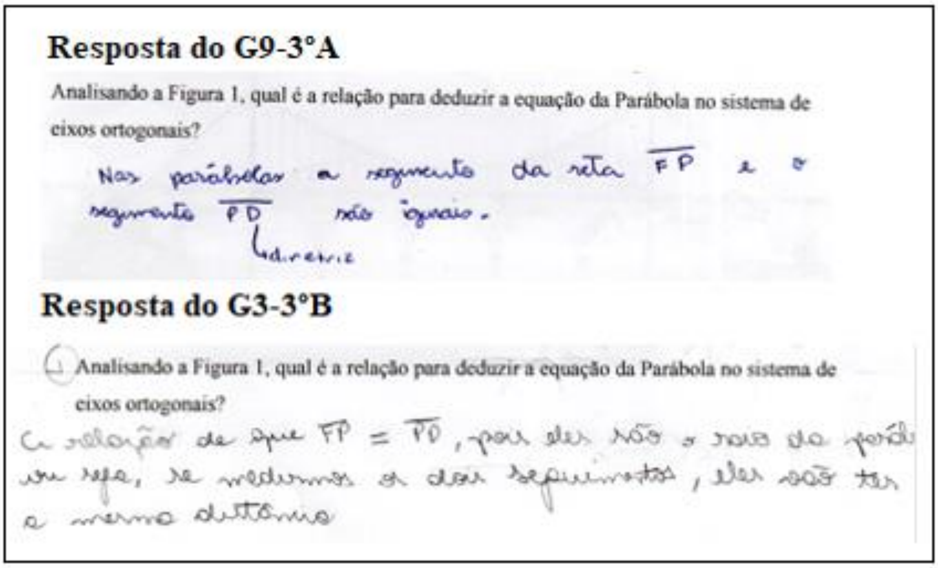
Fonte: Acervo da Pesquisa

Solicitamos aos estudantes que, manipulando a construção da parábola no GeoGebra, analisassem a figura e tentassem determinar a relação necessária para deduzir a equação geral da parábola, no sistema de eixos ortogonais. O pesquisador relembrou aos estudantes a relação que havia sido utilizada para deduzir a equação da circunferência e, de modo similar, questionou qual seria a relação que levaria a deduzir a equação da parábola. Os grupos começaram a discutir e a manipular o ponto D na janela de visualização 2D e iniciaram as suas resoluções.

Os grupos conseguiram visualizar que a distância entre o ponto correspondente ao foco F até o ponto P é a mesma do ponto P até o ponto D e responderam corretamente os itens ‘a’ e ‘b’, conforme ilustra a imagem a seguir.

ISSN 2764-3158

Figura 9. Resposta dos itens a e b da questão 8


Resposta do G9-3°A

Analisando a Figura 1, qual é a relação para deduzir a equação da Parábola no sistema de eixos ortogonais?

Nas parábolas o segmento da reta $\overline{FP}$ e o segmento $\overline{FD}$ são iguais.
diretriz

Resposta do G3-3°B

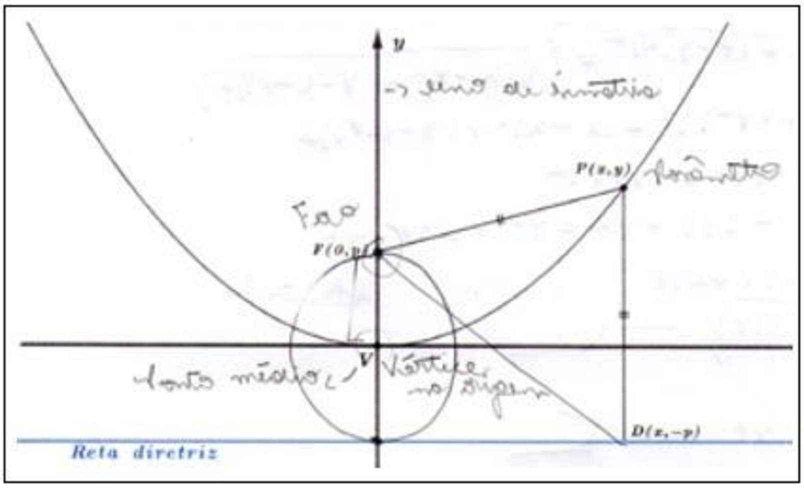
Analisando a Figura 1, qual é a relação para deduzir a equação da Parábola no sistema de eixos ortogonais?

A relação de que $\overline{FP} = \overline{PD}$, pois eles são os raios do ponto ou seja, se medirmos os dois segmentos, eles vão ter a mesma distância

Fonte: Acervo da Pesquisa

O grupo G3-3ºB especificou que esses segmentos são raios de uma circunferência de centro V, o vértice da parábola. Esse grupo estabeleceu uma conexão entre o conceito de circunferência e a relação entre as distâncias do vértice V da parábola ao foco F e à reta diretriz. Fizeram uma conexão entre dois conteúdos matemáticos abordados pelos problemas geradores da circunferência e da parábola, conforme salientado por Allevato e Onuchic (2019). A Figura 10 refere-se à representação do entendimento desse grupo.

Figura 10. Representação construída pelo grupo G3-3ºB

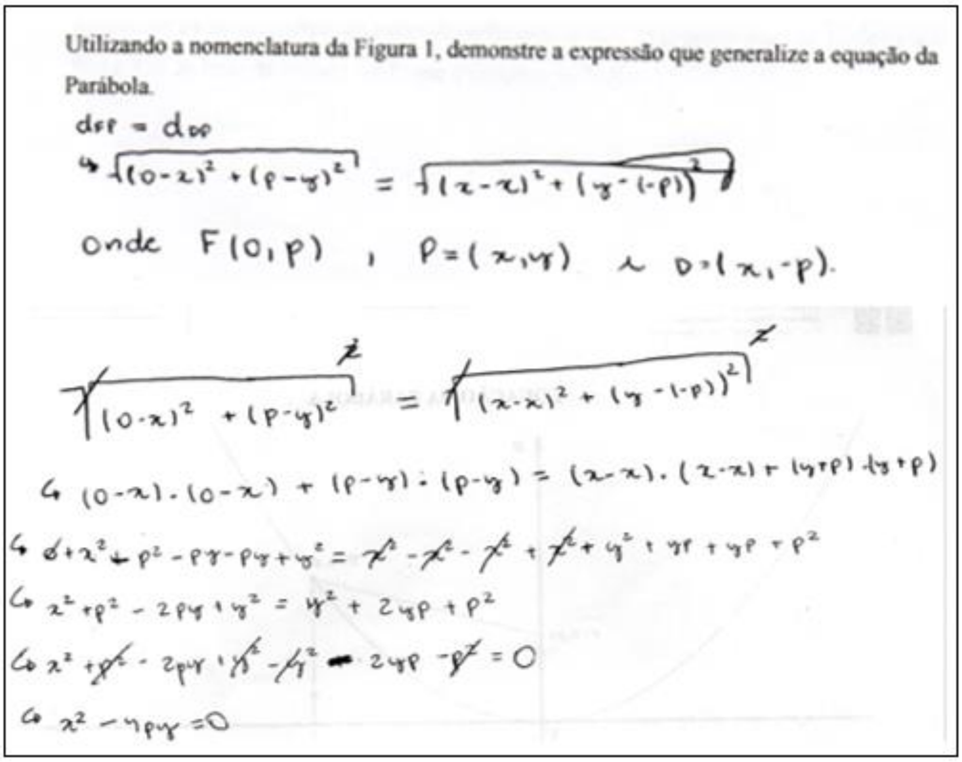


Fonte: Dados da Pesquisa

Diante desses fatos, ficou evidente que o software de geometria dinâmica contribuiu para a compreensão de conceitos e relações necessárias para a dedução matemática da equação da parábola pelos estudantes. Esses aspectos são evidenciados nos protocolos quando foi mencionado que a distância do Foco (F) a um ponto (P) da curva é igual à distância do ponto (P) à reta diretriz $(\overline{FP} = \overline{PD})$.

Por fim, o item 'c' confirmou o que nós havíamos previsto: o problema gerador possibilitou tanto a construção de conhecimento quanto a compreensão do conteúdo matemático, além desenvolvimento do raciocínio dedutivo, os estudantes desenvolveram uma prova matemática utilizando relações, conceitos, propriedades e a linguagem matemática. Esses aspectos são evidenciados na resolução do grupo G9-3°A, conforme a ilustração a seguir:

Figura 11. Dedução da equação da parábola do G9-3ºA


Utilizando a nomenclatura da Figura 1, demonstre a expressão que generalize a equação da Parábola.

$d_{FP} = d_{DP}$

$\Leftrightarrow \sqrt{(0-x)^2+(p-y)^2} = \sqrt{(x-x)^2+(y-(-p))^2}$

onde $F(0,p)$, $P=(x,y)$ e $D=(x,-p)$.

$\cancel{\sqrt{}}(0-x)^2+(p-y)^2 = \cancel{\sqrt{}}(x-x)^2+(y-(-p))^2$

$\Leftrightarrow (0-x)\cdot(0-x)+(p-y)\cdot(p-y) = (x-x)\cdot(x-x)+(y+p)\cdot(y+p)$

$\Leftrightarrow \cancel{0}+x^2+p^2-py-py+y^2 = \cancel{x^2}-\cancel{x^2}-\cancel{x^2}+\cancel{x^2}+y^2+yp+yp+p^2$

$\Leftrightarrow x^2+p^2-2py+y^2 = y^2+2yp+p^2$

$\Leftrightarrow x^2+\cancel{p^2}-2py+\cancel{y^2}-\cancel{y^2}-2yp-\cancel{p^2}=0$

$\Leftrightarrow x^2-4py=0$

Fonte: Acervo da Pesquisa

O grupo iniciou a dedução da equação especificando que os segmentos ($\overline{FP}$) e ($\overline{DP}$) têm comprimentos iguais, e calculam a distância entre dois pontos, ou seja, $d_{FP} = d_{DP}$. Os estudantes realizaram as manipulações algébricas envolvendo potenciação, produto notável, simplificação e agrupamento de termos semelhantes, finalizando com a equação da parábola com o vértice na origem dos eixos ortogonais. É importante ressaltar que os estudantes utilizaram uma lógica coerente na dedução e aplicaram as coordenadas cartesianas fornecidas na questão, resultando na utilização adequada da escrita matemática e no desenvolvimento correto da equação solicitada. Essa dedução pode ser considerada como uma prova matemática, conforme salientado pelo pesquisador britânico Andrea Stylianides (2007) e a pesquisadora italiana Bettina Pedemonte (2007), pois os estudantes empregaram argumentos matemáticos corretos, utilizaram formas de raciocínio conhecidas e verdadeiras, e comunicaram-na integralmente, sem omitir passagens, de modo a promover a compreensão lógica de cada resultado. O grupo e seus colegas compreenderam a generalização, ou seja, a dedução da equação da parábola é $x^2 - 4py = 0$. A prova desenvolvida pelo G9-3°A mostrou a veracidade das conjecturas envolvendo distâncias, e promoveu a compreensão das propriedades e dos conceitos matemáticos empregados, conforme enfatizou a pesquisadora canadense Gila Hanna (1990). Além disso, pressupomos que apesar de alguns grupos não conseguirem desenvolver a dedução da equação da parábola, devido à dificuldade com as manipulações algébricas, eles conseguiram entender a lógica e o processo de dedução empregados pelos colegas. Assim, toda a atividade contribuiu para que os estudantes compreendessem os conceitos e os conteúdos, além da dedução da equação da parábola utilizando os aspectos formais tão preconizados pelos documentos oficiais e pelas pesquisas em Educação Matemática (Allevato; Onuchic, 2021; Balacheff, 2019; Pedemonte, 2007; Styliniades, 2007).

ISSN 2764-3158

Em consenso, os alunos perceberam que os equívocos ocorridos durante a resolução do problema estavam relacionados a conhecimentos prévios, conteúdos que haviam esquecido ou não aprendido. Porém, eles foram fundamentais para sanar dúvidas, levar a aprender novos conceitos e conteúdos, além de relembrar outros que já haviam aprendido anteriormente. Apesar de alguns estudantes apresentarem essas dificuldades, eles empenharam esforço e curiosidade para encontrar uma resposta, aumentando sua autoconfiança para enfrentar desafios e superar os obstáculos configurados nesse problema e na aprendizagem matemática por meio dessa abordagem, nova para eles.

Quando questionados pelo pesquisador sobre a aprendizagem matemática proporcionada pela resolução desse problema, os participantes responderam de forma assertiva e clara, destacando a aquisição de diversos conhecimentos matemáticos sobre: desenvolvimento uma prova matemática, conteúdos relacionados à parábola, manipulações algébricas, produto notável, regras de potenciação e radiciação, estratégias de resolução de problemas e outros. Além disso, o processo avaliativo ocorreu em toda a atividade. Apesar de não ser o foco deste estudo, destacamos que a avaliação contribuiu para perceber as dúvidas e os equívocos dos estudantes no decurso da resolução do problema, possibilitando ao pesquisador realizar mediações que auxiliassem os alunos a corrigirem e compreenderem seus erros e avançarem na construção do conhecimento, conforme as recomendações de Allevato e Onuchic (2021).

5 Considerações finais

Este trabalho teve como objetivo analisar as contribuições da Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas, na construção do conhecimento matemático relacionado ao conceito de parábola e à dedução de sua equação, desenvolvida com estudantes do 3º ano do Ensino Médio de uma escola profissionalizando da região metropolitana de São Paulo. Em seu desenvolvimento, tivemos em vista responder: Como ocorre a construção de conhecimento sobre parábola e a dedução de sua fórmula através da resolução de problemas?

As discussões realizadas durante o desenvolvimento da atividade e as análises dos protocolos produzidos pelos participantes, permitiram analisar as contribuições dos momentos de elaboração das resoluções e da plenária, na implementação da Metodologia, que visa conduzir os estudantes na construção consciente, responsável e criativa do conhecimento matemático, alinhada aos objetivos estabelecidos pelo professor para a aula.

É importante destacar que, ao valorizar o protagonismo dos estudantes, suas diferentes abordagens na resolução proposta, seus processos de raciocínio, justificativas e esforços com a atividade, bem como a interação e a aprendizagem promovida em plenária e na busca pelo consenso, além da aceitação do erro como um caminho para o conhecimento, foram fundamentais para o desenvolvimento da compreensão do conteúdo nesse processo de aprendizagem. Nesse contexto, o professor pode, ainda, avaliar e identificar os avanços, as compreensões e as dificuldades apresentadas pelos estudantes, auxiliando-os em sua aprendizagem. Além disso, cabe salientar que a mediação do professor associada à utilização do software de geometria dinâmica GeoGebra e à Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação através da Resolução de Problemas, bem planejados e implementados, foram cruciais para a construção dos conceitos, conteúdos e da dedução, nesta pesquisa, da equação da parábola.

Apesar das dificuldades apresentadas pelas duas turmas, ficou evidente que os estudantes conseguiram construir e compreender tanto o conteúdo de parábola quanto a importância do desenvolvimento da prova matemática, num contexto de desenvolvimento de habilidades cognitivas elevadas e de promoção da compreensão e do desenvolvimento da prova matemática no contexto escolar, conforme preconizado pelos documentos oficiais (Brasil, 2018; England, 2014; MENERS, 2015; NCTM, 2000; Portugal, 2013) e pelas pesquisas (Balacheff, 2019; Pedemonte, 2007; Ponte et al., 2012, Stylianides, 2007).

As reflexões apresentadas mostram, portanto, que é possível proporcionar ao estudante da Educação Básica oportunidades para a construção e a compreensão de conteúdo matemático, bem como para o desenvolvimento da criatividade, da generalização, da prova e da demonstração matemáticas, e do raciocínio matemático, auxiliados pelo GeoGebra em um contexto fundamentado no trabalho através da resolução de problemas. A Metodologia de Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas tem o potencial de promover esses aspectos.

Referências

Allevato, N. S. G., & Onuchic, L. R. (2021). Ensino-Aprendizagem-Avaliação de Matemática através da Resolução de Problemas. In: Onuchic, L. R., Allevato, N. S. G., Noguti, F. C. H., & Justulin, A. M. (org.): *Resolução de Problemas teoria e prática (2ª ed.,* pp. 37–58). São Paulo, SP: Paco Editorial.

Allevato, N S. G., & Onuchic, L. R. (2019). As conexões trabalhadas através da Resolução de Problemas na formação inicial de professores de Matemática. *Revista de Ensino de Ciências e Matemática, 10*(2), 1–14

Balacheff, N. (2019). Contrôle, preuve et démonstration. Trois régimes de la validation. In Pilet, J.; Vendeira, C. (org.): *Actes du séminaire national de didactique des mathématiques. ARDM et IREM de Pris-Université de Pari Dioderot*, (pp. 423-456).

Boavida, A. M.; & Gomes, A.; & Machado, S. (2002). Argumentação na aula de Matemática: olhares sobre um projecto de investigação colaborativa. *Educação e Matemática: revista da Associação de Professores de Matemática*, (70), pp. 18-26

Borba, M. C., & Almeida, H. R. F. L., & Gracias, T. A. S. (2018). *Pesquisa em ensino e sala de aula: Diferentes vozes em uma investigação*. Belo Horizonte, MG: Autêntica.

Brasil. Ministério da Educação. (2018). Base Nacional Comum Curricular: educação é a base. Brasília: Ministério da Educação.

Cai, J., & Lester, F. (2012). Por que o ensino com a Resolução de Problemas é importante a aprendizagem do aluno? *Bolletin GEPEM,* (60), 241–254.

Costa, V. M. (2023). Utilizando Argumentações, Provas e Refutações em Sala de Aula de Geometria como contribuições ao desenvolvimento do senso crítico do educando. *Boletim de Educação Matemática*, 37(75), 352-370.

De Villiers, M. (2010). Experimentation and Proof in Mathematics. In: G. Hanna; & H. N. Jahnke; & H. Pulte. (Org.). *Explanation and Proof in Mathematics: Philosophical and Educational Perspectives*. (pp. 205-220). New York, USA: Springer.

England. National Curriculum in England. (2014). Mathematics programs of study, London: department for Education and Skills.

Hanna, G. (1990). Some pedagogical aspects of proof. *Interchange,* 21(1), pp. 6-13.

Krakecker, L. (2022). Validações matemáticas produzidas por alunos do nono ano do Ensino Fundamental: desafios e possibilidades. 2022. 213f. Tese (Doutorado em Educação Matemática). Universidade Federal do Mato Grosso do Sul. Campo Grande, MS.

Lester, F.; & Cai, J. (2016). Can Mathematical Problem Solving Be Taught? Preliminary Answers from a 30 Years of Research. In: Felmer, P.; & Pehkonen, E.; & Kilpatrick, J. (org): *Posing and Solving Mathematical Problems: Advances and New Perspectives*. (pp. 117-135). New York, USA: Springer.

Menesr. (2015). Programme Mathematiques cycle 4. Retrieved from. Ministère de L'éducation Nationale et de la Jeunesse.

National Coucinl of Teachers of Mathematics (NCTM). (2000). *Principles and Standards for School Mathematics, Reston*.

Onuchic, L. R., & Allevato, N. S. G. (2011). Pesquisa em Resolução de Problemas: caminhos, avanços e novas perspectivas. *Boletim de Educação Matemática, 25*(11), 73–98.

Pedemonte, B. (2007). How can the relationship between argumentation and proof be analysed?. *Educational Studies in Mathematics* 66, 23-41.

Ponte, J. P.; Mata-Pereira, J.; & Henrique, A. (2012). O raciocínio matemático nos alunos do Ensino Básico e do Ensino Superior. *Praxis Educativa*, 7(2), 355-377.

Portugal. Programa e Metas Curriculares de Matemática do Ensino Básico. (2013). Lisboa: Ministério da Educação e Ciências.

Silva, M. B. (2016). *O ensino da demonstração: um Estado da Arte das pesquisas realizadas nos programas de pós-graduação em Educação Matemática no período de 2005 a 2015*. 2016. 110f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática). Universidade Anhanguera de São Paulo. São Paulo, SP.

Silva, M. B.; Silva, I. P.; Allevato, N. S. G.; & Possamai, J. P. (2023). Uma abordagem para o ensino de Geometria Analítica através da Resolução de Problemas. In: *Anais do XVI Conferência Interamericana de Educação Matemática* (pp. 1-9). Lima, PE.

Stylianides, A. J. (2007). Proof and Proving in School Mathematics. *Journal for Research in Mathematics,* 38(3), 289-321.

Vale, I. (2017). Resolução de Problema um Tema em Contínua Discussão: vantagens das Resoluções Visuais. In: Onuchic, L. R., Leal Junior, L. C., & Pironel, M. (org.): *Perspectivas para Resolução de Problemas* (pp. 131–162). São Paulao, SP: Livraria da Física.

Van de Walle, J. A. (2009). *Matemática no ensino Fundamenta: Formação de Professores e Aplicação em Sala de aula*. Tradução de P.H. Colonese. (6ª ed.) Porto Alegre, RS: Artmed.

Vila, A.; & Callejo, M. L. (2006). *Matemática para aprender a pensar: O papel das crenças na resolução de problemas*. Tradução E. Rosa. Porto Alegre, RS: Artmed.

ISSN 2764-3158