

# Explorando la competencia de modelización matemática en Álgebra Lineal

## Exploring Mathematical Modeling Competence in Linear Algebra

Andrea Cárcamo<sup>1</sup>  
Claudio Fuentealba<sup>2</sup>

**Resumen:** Esta investigación exploratoria tiene como objetivo identificar el desarrollo de las subcompetencias de la competencia de modelización matemática en estudiantes de un curso de Álgebra Lineal, específicamente cuando resuelven una tarea de modelización relacionada con la construcción de casas sostenibles y que involucra el contenido de matrices. Se utilizó una rúbrica para evaluar el nivel de desarrollo de estas subcompetencias, inferido a partir de los datos recopilados de los participantes. Los resultados sugieren que la mayoría de los estudiantes muestran progresos en cuatro subcompetencias clave de la modelización matemática (simplificación, matematización, trabajo matemático e interpretación). Además, indican la necesidad de continuar implementando este tipo de tareas para fomentar un desarrollo integral de la competencia de modelización.

**Palabras clave:** Modelización matemática. Competencia de modelización. Estudiantes universitarios, Álgebra Lineal.

**Abstract:** This exploratory research aims to identify the development of sub-competencies within the mathematical modelling competency among students in a Linear Algebra course, specifically when they tackle a modeling task related to sustainable house construction involving matrix content. A rubric was used to assess the level of development of these sub-competencies, inferred from collected participant data. Results suggest that the majority of students show progress in four key sub-competencies of mathematical modelling (simplification, mathematization, mathematical work, and interpretation). Furthermore, they indicate the need to continue implementing such tasks to foster comprehensive development of modelling competency.

**Keywords:** Mathematical modelling. Modelling competency. university students. Linear Algebra

### 1 Introducción

La educación matemática en ingeniería tiene el desafío de enseñar matemática a los estudiantes, pero también de contribuir a que desarrollen competencias como la modelización matemática que es fundamental para enfrentar los desafíos del mundo actual. Incluso, existe un amplio consenso en que la modelización matemática es una de las competencias clave que requiere un ingeniero de clase mundial (Aravena, Díaz, Rodríguez & Cárcamo, 2022). Los ingenieros configuran y trabajan con modelos matemáticos al resolver problemas de ingeniería, por tanto, para hacer esto con éxito, es esencial la competencia de modelación matemática (Alpers, 2017). Considerando lo anterior, desde su formación inicial, al estudiante de ingeniería se le debe proporcionar herramientas conceptuales y funcionales que contribuyan a usar la modelización matemática en diferentes contextos (Beltrón, Hernández & Carrasco, 2019).

Actualmente, existe discrepancia entre las competencias matemáticas que un ingeniero necesita desarrollar para tener un desempeño efectivo en el ámbito laboral (como, por ejemplo,

<sup>1</sup> Universidad Austral de Chile • Valdivia, Región de los Ríos — Chile •  andrea.carcamo@uach.cl •   
<https://orcid.org/0000-0001-5782-3479>

<sup>2</sup> Universidad Austral de Chile • Valdivia, Región de los Ríos — Chile •  cfuentealba@uach.cl •   
<https://orcid.org/0000-0001-8071-5150>

la competencia de modelización matemática) y las competencias que tradicionalmente se abordan en los cursos de matemáticas. Estos últimos suelen enfocarse en procesos mecánicos y algorítmicos (Brito-Vallina, Alemán-Romero, Fraga-Guerra & Para-García, 2011; Álvarez-Macea & Costa, 2019). Con el fin de reducir esta brecha, en esta investigación exploratoria, proponemos diseñar e introducir tareas de modelización matemática en un curso de Álgebra Lineal para promover el desarrollo de la competencia de modelización matemática en estudiantes de ingeniería. Específicamente, seleccionado el curso de Álgebra Lineal porque, generalmente, en las carreras de ingeniería se enseñan los aspectos operativos y abstractos de sus contenidos, pero se excluye el proceso de modelización matemática, a pesar de que esta disciplina tiene una amplia gama de aplicaciones en ingeniería (Álvarez-Macea y Costa, 2019). A su vez, elegimos este curso por su reconocida relevancia en diversas áreas, así como también, por las dificultades que enfrentan los estudiantes de ingeniería al estudiarlo (Bianchini, de Lima, & Gomes, 2019).

En este estudio, presentamos una tarea de modelización matemática que promueve la competencia de modelización matemática en estudiantes de ingeniería. En concreto, el objetivo de investigación es identificar el desarrollo de las subcompetencias de la competencia de modelización matemática en estudiantes de ingeniería de un curso de Álgebra Lineal, cuando resuelven una tarea de modelización matemática sobre la construcción de casas sostenibles y que involucra el contenido de matrices.

Esta investigación es relevante para la Educación Matemática en el nivel superior porque presenta una propuesta novedosa para que estudiantes de ingeniería consoliden su aprendizaje de conceptos matemáticos del curso de Álgebra Lineal y desarrollen la competencia de modelización matemática mientras resuelven un problema real. Dicho problema ha sido diseñado considerando el contexto de los estudiantes, en particular, la ciudad donde viven y la carrera de ingeniería que están estudiando.

## 2 Referentes teóricos

El concepto de competencia de modelización matemática está estrechamente relacionado con el proceso de modelización matemática (Maaß, 2006). La competencia de modelización se refiere a la habilidad de una persona para realizar las operaciones requeridas (o deseadas) para avanzar en el modelado (Niss, Blum & Galbraith, 2007). Hay dos enfoques para definir la competencia en modelización matemática: el enfoque de arriba hacia abajo y el de abajo hacia arriba (Niss y Blum, 2020). En el enfoque de arriba hacia abajo, la competencia de modelización matemática se considera una habilidad integral que implica la capacidad de desmatematizar los modelos matemáticos existentes y la habilidad de activar el modelo en un contexto dado (Niss y Højgaard, 2011). En tanto, en el enfoque de abajo hacia arriba, la competencia de modelización matemática se compone de la capacidad y la disposición para resolver tareas de modelización matemática (Kaiser, 2007). En el enfoque de abajo hacia arriba, existen competencias de modelización globales y subcompetencias de modelización matemática (Kaiser, 2007; Maaß, 2006). Las competencias globales de modelización se definen como las habilidades necesarias para realizar todo el proceso de modelización e incluyen competencias sociales. Por su parte, las subcompetencias de modelización matemática se componen de las subcompetencias necesarias para realizar cada paso del ciclo de modelización (Cevikbas, Kaiser & Schukajlow, 2022).

Las subcompetencias de la modelización matemática se relacionan con el ciclo de modelización, del cual existen diferentes descripciones que incluyen las diferentes competencias esenciales para realizar pasos individuales del ciclo de modelización. Basados en la investigación de Blum y Kaiser (1997) y en estudios empíricos posteriores, Maaß (2006)

distingue cinco subcompetencias de la competencia de modelización matemática relacionadas con el ciclo de modelización: (1) simplificación (comprender problemas del mundo real y desarrollar un modelo del mundo real), (2) matematización (crear un modelo matemático a partir de un modelo del mundo real), (3) trabajo matemático (resolver problemas matemáticos dentro de un modelo matemático), (4) interpretación (interpretar los resultados matemáticos en un modelo del mundo real o en una situación del mundo real), y (5) validación (cuestionar la solución desarrollada y llevar a cabo el proceso de modelización nuevamente, si es necesario). En la Tabla 1 se presentan las subcompetencias de modelización matemática y sus descriptores (Blum & Kaiser 1997; Maaß, 2006). Estas subcompetencias forman la base para el desarrollo de una competencia más general de la competencia de modelización matemática (Hankeln, Adamek & Greefrath, 2019).

La subcompetencia de simplificación consiste en plantear una versión simplificada del problema, identificar información relevante y establecer relaciones entre las variables. La subcompetencia de matematización implica tratar las relaciones entre variables de manera matemática y usar símbolos matemáticos para representar la situación real. La subcompetencia de trabajo matemático requiere que los estudiantes apliquen sus conocimientos y habilidades matemáticas para resolver problemas. La subcompetencia de interpretación abarca la explicación de los resultados matemáticos en contextos no matemáticos, la generalización de soluciones, entre otros. Finalmente, la subcompetencia de validación se enfoca en examinar y reflexionar sobre la solución propuesta y, de ser necesario, modificarla o proponer alternativas (Wang, Xie & Liu, 2023).

**Tabla 1:** Subcompetencias de modelización matemática (Blum & Kaiser 1997; Maaß, 2006; Kaiser, 2007)

Subcompetencia	Descriptores
Simplificación. Comprender problemas del mundo real y construir un modelo de la realidad.	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Hace suposiciones sobre el problema y simplifica la situación.</li> <li>• Reconoce las cantidades que influyen en la situación, las nombra e identifica variables clave.</li> <li>• Construye relaciones entre las variables.</li> <li>• Busca información disponible y distingue entre la información relevante y la irrelevante.</li> </ul>
Matematización. Crear un modelo matemático a partir de un modelo del mundo real.	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Matematiza cantidades relevantes y sus relaciones.</li> <li>• Simplifica cantidades relevantes y sus relaciones.</li> <li>• Elige notaciones matemáticas apropiadas y representa situaciones en lenguaje matemático.</li> </ul>
Trabajo matemático. Resolver problemas matemáticos dentro de un modelo matemático.	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Utiliza estrategias como la división del problema en subproblemas, estableciendo relaciones con problemas similares, reformulando el problema, variando las cantidades o los datos disponibles, etc.</li> <li>• Aplica conocimientos matemáticos para resolver el problema.</li> </ul>
Interpretación. Interpretar resultados matemáticos en un modelo del mundo real o en una situación real.	<ul style="list-style-type: none"> <li>• Interpreta resultados matemáticos en contextos extra matemáticos.</li> <li>• Generaliza soluciones que se desarrollaron para una situación específica.</li> <li>• Identifica soluciones para el problema usando un lenguaje matemático apropiado o comunica las soluciones del problema.</li> </ul>

Validación. Cuestionar las soluciones y, si es necesario, efectuar otro proceso de modelización.

- Verifica críticamente y reflexiona sobre las soluciones encontradas.
- Revisa algunas partes del modelo o vuelve a pasar por el proceso de modelización si las soluciones no se ajustan a la situación.
- Reflexiona sobre otras formas de resolver el problema o si las soluciones pueden desarrollarse de manera diferente.
- Generalmente se cuestiona el modelo.

---

**Fuente:** Elaboración propia

En nuestra revisión de literatura, no hemos encontrado investigaciones que se centren en el desarrollo de la competencia de modelización matemática en cursos de matemática de la enseñanza superior. Sin embargo, existen investigaciones sobre el uso de la modelización matemática en cursos de matemática de este nivel. Por ejemplo, estudios realizados en el curso de Cálculo, destacan la modelización como una facilitadora del aprendizaje, ya que contribuye a la atribución de significado a los conceptos matemáticos en el proceso de enseñanza (Beltrão & Igliori, 2012). Además, el estudio de Borssoi, Silva y Ferruzzi (2021) señalan que la modelización tiene potencial para integrar las áreas STEM, promover el trabajo cooperativo y desarrollar habilidades de resolución de problemas. Por su parte, investigaciones realizadas en el curso de Álgebra Lineal, plantean que la modelización matemática es un contexto significativo y productivo para la enseñanza del Álgebra Lineal porque favorece su aprendizaje, así como también, el desarrollo de la competencia de modelización matemática (Ramírez-Montes, Carreiran & Henriques, 2021a), aunque destacan la necesidad de reforzar en los estudiantes el proceso de validación de un modelo matemático, ya que algunos estudiantes no logran esta habilidad (Ramírez-Montes, Henriques & Carreira, 2021b).

### 3 Metodología

La metodología de nuestro estudio es la investigación basada en el diseño que es el estudio sistemático del diseño, desarrollo y evaluación de intervenciones educativas (Plomp, 2013). Esta investigación busca indagar en las posibilidades de mejora educativa mediante la creación y el estudio de nuevas formas de aprendizaje (Gravemeijer & van Eerde, 2009). En la investigación basada en el diseño, Cobb y Gravemeijer (2008) distinguen tres fases: (1) la preparación del experimento, (2) el experimento de enseñanza y (3) el análisis retrospectivo, una vez completada la recopilación de datos. A continuación, describimos estos pasos para el ciclo del experimento de enseñanza que se presenta en esta investigación.

#### 3.1 Fase 1: La preparación del experimento

En esta fase, desarrollamos una tarea destinada a estudiantes de ingeniería con el propósito de fomentar la competencia en modelización matemática dentro del curso de Álgebra Lineal. Para diseñar esta tarea, nos basamos en el ciclo de modelización matemática de Blum y Leiss (2007), las subcompetencias de modelización matemática (ver Tabla 1), el proceso de diseño de tareas de modelización según Galbraith (2007), investigaciones previas sobre aplicaciones de Álgebra Lineal (como la de Ramírez-Montes *et al.*, 2021b), ejercicios propuestos en libros de texto de Álgebra Lineal (por ejemplo, Larson, 2013) y los Objetivos de Desarrollo Sostenible (ODS) establecidos por la UNESCO (2020).

La tarea de modelización se centró en desarrollar un modelo matemático para calcular el costo total de un proyecto piloto dirigido a mejorar las condiciones de vivienda en la ciudad donde residen los participantes del estudio, con la finalidad de hacer estas viviendas más

sostenibles y energéticamente eficientes. Además, la tarea incluyó preguntas reflexivas sobre los beneficios y desafíos del proyecto y su relación con los ODS. La Figura 1 muestra la tarea de modelización diseñada.

**Figura 1:** Tarea de modelización diseñada en esta investigación

### Viviendas Sustentables. Un proyecto piloto para Valdivia

Las viviendas sustentables están alineadas con el ambiente y los Objetivos de Desarrollo Sostenible (ODS). Sin embargo, constituye un desafío lograr que sean accesibles para las familias en términos de costos. Es importante considerar que este tipo de viviendas ofrece beneficios y ahorros a largo plazo. Con estos antecedentes, una empresa constructora en Valdivia está haciendo un proyecto piloto para mejorar las condiciones de las casas de modo que sean más sustentables y energéticamente eficientes. Inicialmente, se propone realizar un presupuesto para transformar 7 casas en el sector de El Bosque, 5 casas en el sector de Isla Teja y 12 casas en el sector de Collico.



Los materiales que se pretenden implementar en estas casas son: pintura ecológica, panel solar, sanitario ahorrador de agua, impermeabilizante y ventana termopanel. Estos materiales se pueden obtener por unidades estándar de venta (según cantidad asociada).

La empresa constructora ha determinado que para las casas del sector de El Bosque se requieren 6 galones de pintura ecológica, 3 paneles solares, 2 sanitarios ahorradores de agua, 14 galones de impermeabilizante y 6 ventanas termopanel. En tanto, para las casas del sector de Isla Teja son necesarios 9 galones de pintura ecológica, 4 paneles solares, 3 sanitarios ahorradores de agua, 21 galones de impermeabilizante y 8 ventanas termopanel. Finalmente, para las casas del sector Collico se precisan 3 galones de pintura ecológica, 2 paneles solares, 1 sanitario ahorrador de agua, 7 galones de impermeabilizante y 4 ventanas termopanel.

Con respecto al costo de los materiales, un galón de pintura ecológica cuesta \$ 50.000, un panel solar \$ 1.500.000, un sanitario ahorrador de agua \$ 350.000, el galón de impermeabilizante \$ 35.000 y una ventana termopanel \$ 800.000.

Suponga que la empresa constructora le ha solicitado asesoría con la finalidad de determinar los pro y contras de este proyecto piloto. Para ello, les solicitan un informe que responda a las siguientes preguntas:

1. ¿Cuánto material de cada tipo debe comprar la empresa para ejecutar el proyecto piloto?
2. ¿Cuál es el costo de acondicionar cada tipo de casa según sector de localización?
3. ¿Cuál es el costo total del proyecto?
4. Mencione tanto los aspectos positivos como negativos para la viabilidad de este proyecto piloto.
5. ¿Con cuál o cuáles de los 17 ODS se vincula este proyecto piloto? ¿Por qué?

**Fuente:** Elaborada por los autores

### 3.2 Fase 2: El experimento de enseñanza

Efectuamos un experimento de enseñanza en el aula con la participación de 33 estudiantes de primer año de la carrera de ingeniería en construcción que cursaban Álgebra Lineal (18-20 años) y que habían estudiado previamente los contenidos de matrices. Los estudiantes formaron nueve grupos de entre 3 a 4 integrantes. A cada grupo, el docente del curso le entregó la tarea de modelización en papel (Figura 1) y la resolvieron teniendo en cuenta el instrumento “plan de solución” que apoya a los estudiantes en la resolución de problemas de modelización matemática (Schukajlow, Kolter & Blum, 2015). Se les dio como tiempo máximo para su resolución 2 horas y 30 minutos. Cada grupo entregó un informe escrito con una propuesta de solución a la tarea planteada. Los datos recopilados fueron protocolos escritos de los informes del desarrollo de la tarea de modelización de los grupos y grabaciones de audio.

### 3.3 Fase 3: El análisis retrospectivo

Para el análisis de los datos recopilados, utilizamos una rúbrica que se diseñó basada en las subcompetencias de modelización matemática desplegadas a partir del proceso de modelización matemática (Tabla 1). Consideramos las cinco subcompetencias que menciona

Maaß (2006): simplificación, matematización, trabajo matemático, interpretación y validación. Para cada subcompetencia, definimos indicadores con cuatro niveles para su medición donde 0 es el valor mínimo y 3 es el valor máximo. La validación de la rúbrica se realizó mediante un juicio de expertos. En el apartado discusión de resultados, presentamos sólo los resultados relativos a la pregunta 3 de la tarea de modelización propuesta a los estudiantes de esta investigación.

#### 4 Discusión de los resultados

Los resultados dan indicios de que la mayoría de los estudiantes mostraron progreso en el desarrollo de cuatro subcompetencias de modelización matemática: simplificación, matematización, trabajo matemático e interpretación. Estos resultados se exemplifican con el trabajo realizado por los estudiantes del Grupo 1.

##### 4.1 Subcompetencia de simplificación

Cada grupo de estudiantes (de 3 a 4 integrantes) discutieron la información que se les entregó de un proyecto piloto en la ciudad de Valdivia (Chile) sobre viviendas sustentables (Tarea de modelización, Figura 1). El desafío principal que debían resolver era determinar: *¿Cuál es el costo total del proyecto piloto?* Para esto, ellos reconocieron que las cantidades que influían en la situación correspondían a: cantidad de casas a transformar por sector, cantidad de materiales por una casa según sector y precio de cada unidad de material. Ellos organizaron estas cantidades de diferentes formas (una tabla, varias tablas o un diagrama). Por ejemplo, el Grupo 1 simplificó la información entregada en tres tablas, las que denominó: *número de casas a acondicionar por sector*, *costo de los materiales a usar* y *cantidad de materiales a usar por casa acondicionada en los distintos sectores* (ver Figura 2).

**Figura 2:** Protocolo escrito del Grupo 1 sobre cómo organizaron la información de la tarea de modelización.

Número de casas a acondicionar por sector			Costo de los materiales a usar		
Nº de Casas	El Bosque	Isla Teja	Collico		Precio
	7	5	12	Galon de Pintura Ecológico	\$ 50.000
				Panel Solar	\$ 1.500.000
				Sanitario	\$ 350.000
				Impermabilizante	\$ 35.000
				Ventana Termopanel	\$ 800.000

  

Cantidad de materiales a usar por casa acondicionada en los distintos sectores					
	Galones de pintura ecológica	Panel solar	Sanitario	Impermabilizante	Ventana Termopanel
El Bosque	6	3	2	14	6
Isla Teja	9	4	3	21	8
Collico	3	2	1	7	4

**Fuente:** Datos de la investigación.

Cada tabla presentada por el Grupo 1 es de doble entrada y muestra claramente la información relevante para resolver el problema. De esto, inferimos que los estudiantes dan evidencia de la subcompetencia de simplificación porque, de acuerdo con Wang *et al.* (2023), ellos identificaron la información relevante del problema y establecieron relaciones entre estas.

#### 4.2 Subcompetencia de matematización

La mayoría de los grupos de estudiantes matematizó las cantidades que influían en el problema, es decir, las tradujo a un lenguaje simbólico. Por ejemplo, el Grupo 1, transformó la información que representó en tablas (Figura 2) a la notación matemática de matrices. El Grupo 1 escribió que *de las tablas se desprenden las matrices*: N, P y C. La matriz N corresponde al número de casas a acondicionar, la matriz P al precio de los materiales y la matriz C a la cantidad de materiales. Finalmente, escribieron que el producto entre las matrices  $(NC)P$  les *indicará el costo total de proyecto* (Figura 3), es decir, el modelo matemático que propusieron fue  $(NC)P$ . De esto, inferimos que los estudiantes dan evidencia de la subcompetencia de matematización (Blum & Kaiser 1997; Maaß, 2006) porque encontraron un modelo matemático adecuado para responder al problema planteado haciendo una traducción correcta de la información que le entregaron a un modelo matemático.

**Figura 3:** Protocolo escrito del Grupo 1 sobre cómo matematizaron la información de la tarea de modelización.

De las tablas creadas se desprenden las matrices  
 Número de casas a acondicionar (N), Precio de los Materiales (P), Cantidad  
 de materiales (C)

$$N = \begin{bmatrix} 7 & 5 & 12 \end{bmatrix}^{1 \times 3}$$

$$P = \begin{pmatrix} 50.000 \\ 1500.000 \\ 350.000 \\ 35.000 \\ 800.000 \end{pmatrix}^{5 \times 1}$$

$$C = \begin{bmatrix} 6 & 3 & 2 & 14 & 6 \\ 9 & 4 & 3 & 21 & 8 \\ 3 & 2 & 1 & 7 & 4 \end{bmatrix}^{3 \times 5}$$

$(N \cdot C) \cdot P$  nos indicará el costo total del proyecto.

**Fuente:** Datos de la investigación.

#### 4.3 Subcompetencia de trabajo matemático

Los grupos de estudiantes, para responder a la pregunta de encontrar el costo total del proyecto, dividieron la información en subproblemas y aplicaron sus conocimientos matemáticos de matrices. Por ejemplo, el Grupo 1 (ver Figura 4), usando sus conocimientos de multiplicación de matrices, calcularon el producto entre las matrices N (número de casas a acondicionar) y C (cantidad de materiales) de lo que obtuvieron correctamente una matriz de orden  $1 \times 5$ . Por consiguiente, calcularon el producto entre las matrices  $(NC)P$  de donde obtuvieron una matriz de orden 1. De esto, inferimos que los estudiantes dan evidencia de la subcompetencia de trabajo matemático ((Blum & Kaiser 1997; Maaß, 2006) porque de acuerdo con Wang *et al.* (2023) aplicaron sus conocimientos matemáticos, específicamente, de multiplicación de matrices, para resolver el problema planteado.

**Figura 4:** Protocolo escrito del Grupo 1 su sobre trabajo matemático de la tarea de modelización.

Se realizan los cálculos

$$\begin{aligned}
 N \cdot C &= \begin{bmatrix} 7 & 5 & 12 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 6 & 3 & 2 & 14 & 6 \\ 9 & 4 & 3 & 21 & 8 \\ 3 & 2 & 1 & 7 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 42+45+36 & 21+20+24 & 14+15+12 & 38+105+84 & 42+40+48 \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} 123 & 65 & 41 & 287 & 130 \end{bmatrix} \\
 (N \cdot C) \cdot P &= \begin{bmatrix} 123 & 65 & 41 & 287 & 130 \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 50.000 \\ 1500.000 \\ 350.000 \\ 35.000 \\ 800.000 \end{pmatrix} \\
 &= (6.150.000 + 97.500.000 + 14.350.000 + 100.450.000 + 104.000.000) \\
 &= (232.045.000)
 \end{aligned}$$

Fuente: Datos de la investigación.

#### 4.2 Subcompetencia de interpretación

Los grupos de estudiantes interpretaron el resultado matemático al contexto de la tarea de modelización que se les planteó. Por ejemplo, el Grupo 1 interpretó matriz de orden 1 que obtuvo, es decir, (232.045.000). En concreto, el Grupo 1 puntuó que *la operatoria de matrices (NC)P nos indica que el costo total del proyecto es: \$ 232.045.000*. Cuando se les preguntó al Grupo 1, a que operatoria de matrices se referían, una integrante precisó que “*a la multiplicación de matrices*” (ver Figura 5). De esto, inferimos que los estudiantes dan evidencia de la subcompetencia de interpretación ((Blum & Kaiser 1997; Maaß, 2006) porque identificaron una solución para el problema y la comunicaron al escribir una respuesta adecuada para determinar el costo total del proyecto piloto.

**Figura 5:** Protocolo escrito del Grupo 1 sobre cómo interpretaron su resultado matemático para dar respuesta a la situación planteada.

La operatoria de matrices  $(N \cdot C) \cdot P$  nos indica que el costo total del proyecto es: \$ 232.045.000

Fuente: Datos de la investigación.

La resolución de este problema permitió a la mayoría de los estudiantes fortalecer su comprensión de la multiplicación de matrices al aplicarla en un contexto real. En este sentido, coincidimos con Beltrão *et al.* (2012) en que la modelización matemática facilita el aprendizaje y contribuye a que los estudiantes atribuyan un significado a la matemática que ya aprendieron o están aprendiendo.

#### 5 Consideraciones finales

El objetivo de nuestra investigación fue identificar el desarrollo de las subcompetencias

de la competencia de modelización matemática en estudiantes de ingeniería en un curso de Álgebra Lineal. Los resultados evidenciaron que los estudiantes desarrollaron parcialmente esta competencia, ya que mostraron progresar en cuatro de las cinco subcompetencias clave. Específicamente, mostraron habilidades en simplificación, matematización, trabajo matemático e interpretación.

La tarea de modelización propuesta a los estudiantes de ingeniería en el curso de Álgebra Lineal les proporcionó una nueva visión sobre los contenidos abordados en el curso y contribuyó a que vayan desarrollando la competencia de modelización matemática, esencial para su éxito profesional. Además, esta tarea promovió el desarrollo de otras habilidades, como el trabajo colaborativo entre pares y el conocimiento de los Objetivos de Desarrollo Sostenible.

Destacamos que la tarea de modelización planteada fue efectiva para introducir a los estudiantes en el desarrollo de la competencia de modelización matemática. Sin embargo, concordamos con Durandt y Lautenbach (2020) en la necesidad de más práctica y exposición a tareas más complejas y abiertas para lograr un desarrollo más completo de la competencia de modelización matemática.

Esta investigación exploratoria abre nuevas líneas de trabajo para profundizar en el desarrollo integral de la competencia de modelización matemática en cursos universitarios de matemáticas y también, en la competencia de sostenibilidad. Ambas competencias son fundamentales para futuros ingenieros que desean contribuir a resolver los desafíos de nuestro mundo dinámico.

## Agradecimientos

Este trabajo ha sido desarrollado gracias a la ANID por medio del proyecto FONDECYT Regular N°241155.

## Referencias

- Alpers, B. (2017). The mathematical modelling competencies required for solving engineering statics assignments. In: G. A. Stillman, W. Blum & G. Kaiser (Org.), *Mathematical Modelling and Applications. Crossing and Researching Boundaries in Mathematics Education* (pp. 189–199). Springer.
- Álvarez-Macea, F. & Costa, V. (2019). Enseñanza del Algebra Lineal en carreras de ingeniería: un análisis del proceso de la modelización matemática en el marco de la Teoría Antropológica de lo Didáctico. *Eco Matemático*, 10(2), 65-78.
- Aravena, M., Díaz, D., Rodríguez, F. & Cárcamo, N. (2022). Estudio de caso y modelado matemático en la formación de ingenieros. Caracterización de habilidades STEM. *Ingeniare. Revista chilena de ingeniería*, 30(1), 37-56.
- Beltrão, M. E. P. & Igliori, S. B. C. (2012). O uso da modelagem e aplicações da matemática no ensino de cálculo em um curso superior de tecnologia. *V Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática*, 18.
- Beltrón, J., Hernández, L. & Carrasco, T. (2019). Competencia modelación matemática: concepciones y situación diagnóstica en carreras de Ingeniería. *Revista Cubana de Educación Superior*, 38(2).
- Bianchini, B. L., de Lima, G. L. & Gomes, E. (2019). Linear algebra in engineering: an analysis of Latin American studies. *ZDM*, 51(7), 1097-1110.

- Borssoi, A. H., Silva, K. A. P. & Ferruzzi, E. C. (2021). Modelagem Matemática e Educação STEM no Ensino Superior. In: M. Rosa & V. Franco Neto (Org.), *Anais do Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática* (pp. 2090-2103). SBEM
- Blum, W. & Kaiser, G. (1997) Vergleichende empirische Untersuchungen zu mathematischen Anwendungsfa" higkeiten von englischen und deutschen Lernenden. Unpublished.
- Blum W. & Leiss D. (2007). How do students and teachers deal with modelling problems?. In: C. Haines, P. Galbraith, W. Blum & S. Khan (Org.), *Mathematical modelling (ICTMA12): Education, Engineering and Economics* (pp. 222-231). Chichester, UK: Horwood Publishing.
- Brito-Vallina, M., Alemán-Romero, I., Fraga-Guerra, E., Para-García, J. & Arias-de Tapia, R. (2011). Papel de la modelación matemática en la formación de los ingenieros. *Ingeniería mecánica*, 14(2), 129-139.
- Cevikbas, M., Kaiser, G. & Schukajlow, S. (2022). A systematic literature review of the current discussion on mathematical modelling competencies: State-of-the-art developments in conceptualizing, measuring, and fostering. *Educational Studies in Mathematics*, 109(2), 205-236.
- Cobb, P. & Gravemeijer, K. (2008). Experimenting to support and understand learning processes. In: A.E. Kelly, R.A. Lesh, & J.Y. Baek (Org.). *Handbook of design research methods in education: Innovations in science, technology, engineering, and mathematics learning and teaching* (pp. 68-95). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Durandt, R. & Lautenbach, G. (2020). Strategic support to students' competency development in the mathematical modelling process: A qualitative study. *Perspectives in Education*, 38(1), 211-223.
- Galbraith, P. (2007). Authenticity and goals – Overview. In: W. Blum, P. L. Galbraith, H.-W. Henn & M. Niss (Org.), *Modelling and applications in mathematics education: The 14th ICMI study* (pp. 181–184). New York: Springer.
- Gravemeijer, K. & van Eerde, D. (2009). Design research as a means for building a knowledge base for teachers and teaching in mathematics education. *The Elementary School Journal*, 109(5), 510-524.
- Hankeln, C., Adamek, C. & Greefrath G. (2019). Assessing sub-competencies of mathematical modelling. Development of a new test instrument. In: G. A. Stillman & J. P. Brown (Org.), *Lines of inquiry in mathematical modelling research in education* (pp. 143–160). Cham, Switzerland: Springer.
- Kaiser, G. (2007). *Modelling and modelling competencies in school*. In: C. Haines, P. Galbraith, W. Blum & S. Khan (Org.), *Mathematical Modelling (ICTMA 12): Education, Engineering and Economics* (pp. 110–119). Horwood.
- Larson, R. (2013). *Fundamentos de Álgebra Lineal*. Ciudad de México, México: Cengage Learning.
- Maaß, K. (2006). What are modelling competencies? *ZDM*, 38(2), 113-142.
- Niss, M. & Blum, W. (2020). *The learning and teaching of mathematical modelling*. Routledge.
- Niss, M., Blum, W. & Galbraith, P. (2007). Introduction. In: W. Blum, P. L. Galbraith, H. Henn & M. Niss (Org.), *Modelling and applications in mathematics education. The 14th ICMI study* (pp.3–32). New York: Springer.

Niss, M. & Højgaard, T. (2011). *Competencies and mathematical learning—Ideas and inspiration for the development of mathematics teaching and learning in Denmark*. Roskilde University Press. English translation of Danish original (2002).

Plomp, T. (2013). Educational design research: An introduction. In: T. Plomp & N. Nieveen (Eds.), *Educational design research – Part A: An introduction* (pp. 10-51). Enschede, The Netherlands: SLO.

Ramírez-Montes, G., Carreira, S. & Henriques, A. (2021a). Mathematical modelling routes supported by technology in the learning of linear algebra: A study with Costa Rican undergraduate students. *Quadrante*, 30(1), 219-241.

Ramírez-Montes, G., Henriques, A. & Carreira, S. (2021b). Undergraduate students' learning of linear algebra through mathematical modelling routes. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, 21(2), 357-377.

Schukajlow, S., Kolter, J. & Blum, W. (2015). Scaffolding mathematical modelling with a solution plan. *ZDM*, 47, 1241-1254.

Unesco (2020). Educación para el Desarrollo Sostenible. Hoja de ruta. París: UNESCO.

Wang, T., Xie, Z. & Liu, J. (2023). Assessment of the Competency of Grade Four Students in Mathematical Modelling: An Example from One City in China. In: G. Greefrath, S Carreira & G: Stillman (Org.), *Advancing and Consolidating Mathematical Modelling: Research from ICME-14* (pp. 125-139). Cham: Springer International Publishing.