

El Esquema de integral definida: algunas dificultades en su desarrollo y su posible tematización

The Definite Integral Schema: some difficulties in its development and its possible thematization

Claudio Fuentealba¹
Andrea Cárcamo²

Resumen: El objetivo de este trabajo es analizar el desarrollo del Esquema de integral desde el punto de vista de la teoría APOE enfocándonos en el análisis de los errores para inferir posibles dificultades en su desarrollo y su posible tematización. Los participantes de este estudio fueron 36 estudiantes universitarios con instrucción previa en Cálculo Integral. Todos los estudiantes respondieron un cuestionario conformado por 6 tareas y dos ellos fueron entrevistados. Los resultados, por un lado, muestran la existencia de dificultades asociadas a la encapsulación y desencapsulación de los Objetos integral definida y Segundo Teorema Fundamental de Cálculo y, por otro, que la tematización del Esquema se produce al extender o generalizar la noción de integral definida a integrales impropias.

Palabras clave: Esquema de integral. Teoría APOE. Dificultades. Tematización.

Abstract: The objective of this work is to analyze the development of the Integral Schema from the point of view of APOS theory, focusing on the analysis of errors to infer possible difficulties in its development and its possible thematization. The participants of this study were 36 university students with previous instruction in Integral Calculus. All the students answered a questionnaire made up of 6 tasks and two of them were interviewed. The results, on the one hand, show the existence of difficulties associated with the encapsulation and decapsulation of the Objects definite integral and Second Fundamental Theorem of Calculus and, on the other hand, that the thematization of the Schema is produced by extending or generalizing the notion of definite integral to improper integrals.

Keywords: Schema. Integral. APOS theory. Difficulties. Thematization.

1 Introducción

El Cálculo es fundamental para el desarrollo de la matemática superior y sus aplicaciones, combinando el conocimiento del Álgebra y la Geometría elemental. Sus dos conceptos principales son la derivada, que examina la variación en un intervalo o instante, y la integral, que determina la acumulación de dicha variación. A pesar de su importancia, el Cálculo es conocido por ser un curso desafiante que desalienta a muchos estudiantes de seguir carreras científicas o tecnológicas (Berry & Neyman, 2003; Steen, 1988).

Las investigaciones muestran que muchos estudiantes universitarios, incluso aquellos con altas calificaciones, tienen una comprensión débil de los conceptos básicos del Cálculo (Carlson *et al.*, 2002; Selden *et al.*, 2000). Además, los libros de texto y las investigaciones sobre la comprensión de estos conceptos han tenido poco impacto en los procesos de enseñanza y aprendizaje. Esto plantea dudas sobre si el currículo tradicional de Cálculo está preparando adecuadamente a los estudiantes para aplicar estos conceptos en futuros cursos o en su vida profesional (Bressoud *et al.*, 2013). Por tanto, no cabe duda de que el estudio de la comprensión

¹ Universidad Austral de Chile • Valdivia, Región de los Ríos — Chile • ✉ cfuentealba@uach.cl • [ORCID](https://orcid.org/0000-0001-8071-5150)
<https://orcid.org/0000-0001-8071-5150>

² Universidad Austral de Chile • Valdivia, Región de los Ríos — Chile • ✉ andrea.carcamo@uach.cl • [ORCID](https://orcid.org/0000-0001-5782-3479)
<https://orcid.org/0000-0001-5782-3479>

de los conceptos básicos del Cálculo, como sus métodos de enseñanza, necesitan ser continuamente investigados. Considerando lo anterior, en este trabajo nos propusimos estudiar el desarrollo del Esquema de concepto de integral enfocándonos, principalmente, en la identificación de dificultades en la construcción cognitiva de algunos elementos constitutivos del Esquema y en la tematización de este.

2 La investigación sobre el concepto de integral

La integral es un concepto fundamental en matemáticas avanzadas y ciencias aplicadas, desempeñando un papel crucial en áreas como series, ecuaciones diferenciales y análisis complejo (Boyce & DiPrima, 2012; Brown & Churchill, 2009). Además, tiene numerosas aplicaciones en el mundo real, permitiendo definir y calcular fenómenos naturales en física e ingeniería (Serway & Jewett, 2008). Debido a su importancia, en la última década se ha incrementado la investigación sobre la comprensión del concepto de integral definida y su uso por estudiantes de Cálculo (Bajracharya & Thompson, 2014; Kouropatov & Dreyfus, 2013).

Estudios relevantes han identificado diversas dificultades en la comprensión de la integral. Grundmeier *et al.* (2006) observaron que la comprensión de la integral como área tiene poca influencia en la capacidad de los estudiantes para utilizar integrales definidas. Sealey (2006) señaló que los estudiantes tienen problemas para conectar el concepto de integral definida como área con el de acumulación. Haddad (2013) identificó dificultades en la distinción entre los conceptos de área, antiderivada e integral, mientras que Thompson y Silverman (2008) encontraron que la mayoría de los estudiantes no reconocen la suma de Riemann como la encapsulación de un proceso de acumulación.

A pesar de estos avances, aún existe escasa evidencia empírica sobre cómo las estructuras mentales se articulan y configuran el concepto de integral, así como de los errores y dificultades presentes en dichas construcciones. Este estudio se enfoca en analizar los errores que cometen los estudiantes al resolver tareas sobre el concepto de integral para identificar posibles dificultades en términos de la teoría APOE. Además, se busca caracterizar los distintos niveles de desarrollo del Esquema de integral y su tematización, con el objetivo de proporcionar información valiosa a los docentes de Cálculo para mejorar sus diseños instruccionales y abordar las dificultades en el aprendizaje de este concepto fundamental.

3 La teoría APOE

La teoría APOE (Acción-Proceso-Objeto-Esquema) ofrece un modelo para comprender y estudiar cómo los estudiantes aprenden conceptos matemáticos y cómo estos pueden ser enseñados de manera efectiva (Trigueros, 2005). Esta teoría propone que la comprensión de un concepto matemático implica la transición por cuatro estructuras mentales: Acción, Proceso, Objeto y Esquema. Estas transiciones se realizan mediante mecanismos de abstracción reflexiva, que incluyen interiorización, encapsulación, desencapsulación, reversión, coordinación, tematización y destematización (Arnon *et al.*, 2014).

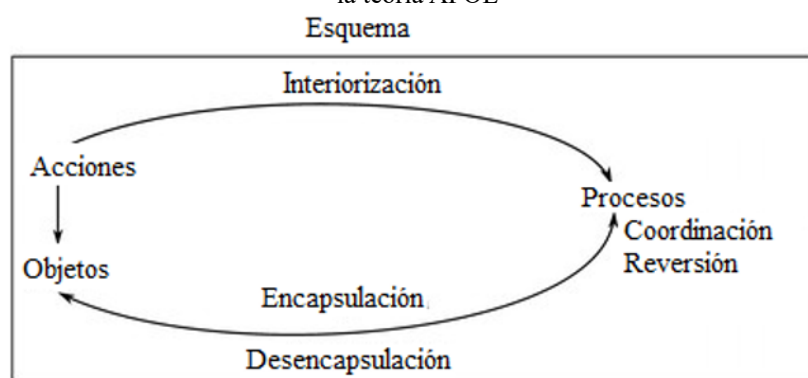
El proceso de construcción del conocimiento matemático comienza con Acciones, que son transformaciones externas de Objetos previamente construidos. Estas Acciones se perciben como respuestas a estímulos externos y son el punto de partida para la comprensión de conceptos matemáticos. A través del mecanismo de interiorización, las Acciones se transforman en Procesos, que son Acciones internalizadas sobre las cuales el estudiante tiene control y puede imaginar, saltar o revertir los pasos involucrados sin necesidad de estímulos externos.

Cuando un estudiante puede concebir un Proceso como un todo susceptible de transformación, este se encapsula en un Objeto cognitivo mediante el mecanismo de

encapsulación. Los Objetos pueden ser desencapsulados para volver a los Procesos que les dieron origen cuando sea necesario. Es importante notar que los Procesos no solo son el resultado de la interiorización de Acciones, sino que también pueden construirse por medio de la coordinación o reversión de otros Procesos.

La estructura mental más compleja en la teoría APOE es el Esquema, que consiste en una colección coherente de Acciones, Procesos, Objetos y otros Esquemas, junto con sus interrelaciones. Los Esquemas se pueden aplicar en la resolución de problemas matemáticos, y su coherencia se refleja en la habilidad del estudiante para reconocer su aplicabilidad en diferentes situaciones (Trigueros, 2005). La construcción de un Esquema es un proceso dinámico y complejo que está en constante desarrollo y evolución. Contrario a lo que se podría pensar, la formación de un Esquema no necesariamente comienza después de la construcción de Objetos, sino que puede iniciar incluso cuando el estudiante solo realiza Acciones, destacando la naturaleza no lineal del aprendizaje matemático según la teoría APOE.

Figura 1: Estructuras y mecanismos mentales involucrados en la comprensión de un concepto matemático según la teoría APOE



Fuente: Arnon *et al.* (2014, p. 18)

3.1 El desarrollo de un Esquema y su tematización

La teoría APOE propone el estudio del desarrollo de un Esquema matemático mediante la triada Intra-, Inter- y Trans- de estructuración (Piaget & García, 1983). Estos niveles se caracterizan por las relaciones que un estudiante puede establecer entre los componentes del Esquema y otras estructuras cognitivas. Trigueros (2005) señala que los estudiantes evocan un Esquema para resolver problemas matemáticos, utilizando las estructuras y relaciones disponibles en ese momento, lo que resulta en diferentes niveles de desarrollo del Esquema entre los estudiantes.

En el nivel Intra-, los estudiantes se enfocan en componentes aislados del Esquema, estableciendo relaciones internas centradas en similitudes y diferencias (Arnon *et al.*, 2014). El nivel Inter- se caracteriza por la comprensión de transformaciones entre las estructuras del Esquema, permitiendo la comparación de casos particulares. En el nivel Trans-, se alcanza una comprensión global del Esquema como una estructura coherente, surgiendo la necesidad de determinar las razones detrás de las transformaciones entre sus componentes.

La transición entre niveles no implica necesariamente un incremento de conocimiento, sino una reinterpretación total del Esquema, requiriendo la reconstrucción de lo previamente construido (Piaget & García, 1983). Para analizar los niveles de desarrollo del Esquema, se utilizan las relaciones lógicas (conjunción, contrarrecíproco y equivalencia) que los estudiantes

establecen entre los elementos matemáticos al resolver tareas (Sánchez-Matamoros *et al.*, 2006).

La tematización es el mecanismo mental que transforma un Esquema en un Objeto sobre el cual se pueden aplicar nuevas Acciones y Procesos (Arnon *et al.*, 2014). Implica la coherencia de la estructura cognitiva construida por el estudiante, permitiéndole reconocer las relaciones incluidas en el Esquema y decidir qué tareas pueden abordarse con él (Arnon *et al.*, 2007). Un estudiante en el nivel Trans- de desarrollo de un Esquema está en condiciones de tematizarlo, lo que representa el más alto nivel de comprensión del concepto matemático en cuestión.

3.2 La descomposición genética

La descomposición genética (DG) es un modelo hipotético de aprendizaje que describe las estructuras y mecanismos mentales necesarios para la construcción de un concepto matemático específico en la mente de un estudiante. Arnon *et al.* (2014) señalan que la elaboración de una DG se basa en el conocimiento del investigador sobre diversos aspectos, incluyendo el aprendizaje y la enseñanza del concepto, conocimientos matemáticos, resultados de investigaciones previas, desarrollo histórico del concepto y la teoría APOE.

Para describir el proceso de construcción conceptual, una DG debe incluir una descripción de las estructuras mentales previas de los estudiantes, permitiendo así predecir cómo se construirá el nuevo concepto. Es importante destacar que no existe una única DG para un concepto dado; pueden coexistir múltiples DGs, siempre que cada una describa adecuadamente las construcciones realizadas por los estudiantes en su proceso de aprendizaje.

Arnon *et al.* (1991) enfatizan que la DG, como modelo hipotético de aprendizaje, no solo guía la investigación, sino que también debe ser validada experimentalmente. Este proceso de validación es crucial para asegurar la precisión y utilidad del modelo en la comprensión y facilitación del aprendizaje matemático.

4 Metodología

Esta sección la hemos estructurado en cuatro subsecciones en la que describimos: los participantes del estudio, los elementos matemáticos que, a nuestro juicio, configuran el concepto de integral, la DG que planteamos y los instrumentos de recolección de datos.

4.1 Participantes

Los participantes de este estudio fueron 36 estudiantes universitarios del curso de Cálculo Integral, pertenecientes a la carrera de Ingeniería Civil de una universidad privada chilena. Todos los participantes habían aprobado al menos una asignatura que cubría los tópicos tradicionales de Cálculo Integral, cuya enseñanza se basó en el ciclo ACE (Actividades, discusión de Clases, Ejercicios) propuesto por la teoría APOE (Arnon *et al.*, 2014).

La selección intencional de estudiantes que ya habían cursado una o más asignaturas de Cálculo Integral se fundamentó en dos criterios principales: (1) el interés por observar y caracterizar los niveles de desarrollo del Esquema de Integral alcanzados por los estudiantes después de un proceso de instrucción intencionado, y (2) la reconocida dificultad asociada a los mecanismos de encapsulación de Procesos y de tematización de un Esquema (Arnon *et al.*, 2014).

En cuanto a las características demográficas y académicas, los participantes mostraron poca variabilidad en términos de rango etario, formación previa y nivel académico. Es importante señalar que de los 36 participantes, solo dos fueron seleccionados para participar en

las entrevistas clínicas.

4.2 Los elementos matemáticos

Para determinar los elementos matemáticos utilizados en la construcción de instrumentos y en el proceso de análisis, se realizó una revisión exhaustiva de seis libros de texto comúnmente empleados como bibliografía obligatoria en el curso de Cálculo Integral en universidades chilenas. Estos textos, en su mayoría, pertenecen a editoriales de prestigio internacional. Además, se examinaron trabajos específicos que abordan el desarrollo del Esquema de integral y sus elementos constituyentes (Aldana, 2011; Rojas & Trigueros, 2020).

Basándose en esta revisión y considerando la necesidad de correlacionar los elementos matemáticos con la Descomposición Genética (DG), se establecieron los siguientes elementos matemáticos, que fueron incorporados en el planteamiento de la DG, la construcción de instrumentos y el proceso de análisis de datos:

- La aproximación del área de una función positiva en un intervalo acotado $[a,b]$ (ACA).
- El área de una función positiva en un intervalo acotado $[a,b]$ como límite de una suma de Riemann (ALS).
- La integral definida (LID).
- Propiedades de la integral definida (PID).
- Teoremas fundamentales del Cálculo (TFC).
- Extensión del concepto de integral (ECI).

Esta selección de elementos matemáticos proporciona un marco estructurado para el análisis del desarrollo del Esquema de integral en estudiantes universitarios, permitiendo una evaluación sistemática de su comprensión y aplicación de los conceptos fundamentales del Cálculo Integral.

4.3 La descomposición genética

La DG propuesta en este trabajo se basó en las investigaciones de Aldana (2011) y Rojas y Trigueros (2020), sin embargo, presenta varias modificaciones en términos de las estructuras y los mecanismos mentales propuestos para construir el concepto de integral y su generalización en las integrales impropias. Concretamente, nuestra DG está dividida en tres partes que se presentan a continuación:

1. El área como aproximación en funciones e intervalos acotados (condiciones de Riemann)

1. Acción de calcular una aproximación por defecto del área de una región plana determinada por una función positiva en un intervalo acotado $[a,b]$.
2. Acción de calcular una aproximación por exceso del área de una región plana determinada por una función positiva en un intervalo acotado $[a,b]$.
3. Interiorización de las Acciones anteriores (1 y 2) en Procesos que permiten aproximar el área de una región plana determinada por una función positiva en un intervalo acotado $[a,b]$.
4. Coordinación de los Procesos originados por la interiorización de las Acciones 1 y 2.
5. Encapsulación de la coordinación de Procesos 4 en el Objeto integral definida $\int_a^b f(x)dx$ que representa el área de una función acotada y positiva en un intervalo acotado $[a,b]$.

II. Teorema Fundamental del Cálculo

6. Desencapsulación del Objeto 5 en el Proceso de cálculo de una integral definida en intervalos cerrados con extremo inferior fijo y superior variable $[a, x]$ (Primer Teorema Fundamental del Cálculo).

7. Encapsulación del Proceso 6 en el Objeto función integral $F(x) = \int_a^x f(t)dt$.

8. Acción de calcular una función primitiva o antiderivada.

9. Interiorización de la Acción 8 en el Proceso que determina una función primitiva de una función determinada.

10. Coordinación del Proceso 9 con el Proceso asociado a la evaluación de una función primitiva en los extremos del intervalo de integración $[a, b]$.

11. Encapsulación del Proceso resultante de la coordinación 10 en el Objeto Segundo Teorema Fundamental del Cálculo (Regla de Barrow).

III. Generalizaciones y extensiones del concepto de integral definida

12. Desencapsulación del Objeto 11 para calcular integrales definidas de funciones no positivas.

13. Desencapsulación del Objeto 5 para calcular áreas entre curvas (funciones).

14. Coordinación de los Procesos 12 y 13 para la determinación de integrales definidas de funciones definidas en intervalos no acotados (Integrales Impropias de Primera Especie) y funciones no acotadas en un intervalo (Integrales Impropias de Segunda Especie).

La Descomposición Genética (DG) planteada en este estudio no solo permitió caracterizar el desarrollo del Esquema de integral y su tematización en términos de elementos matemáticos y relaciones lógicas, sino que también facilitó la identificación de errores y las dificultades subyacentes. En este contexto, se entiende por dificultad aquello que inhibe al estudiante para realizar correctamente o comprender rápidamente una tarea o parte de ella (Centeno, 1988). Los errores se relacionan directamente con estas dificultades que surgen en el aprendizaje de las matemáticas en cualquier nivel educativo.

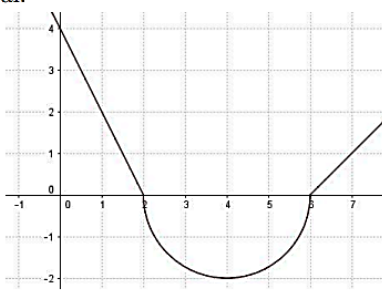
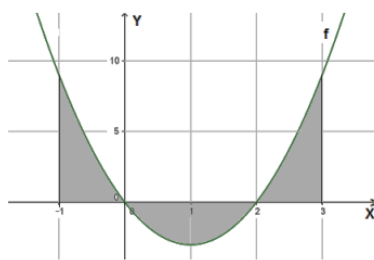
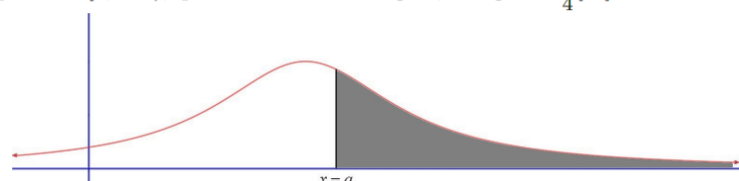
Socas (1997) argumenta que las dificultades se interconectan y refuerzan en redes complejas, manifestándose en los estudiantes como errores. Además, postula coincidentemente con Homa (2021), en que el error no es simplemente resultado de una falta específica de conocimiento o una distracción, sino que refleja la manifestación de un esquema cognitivo inadecuado en el estudiante. En consonancia con esta perspectiva, en este estudio se considera como error cualquier práctica matemática (acción, argumentación, etc.) efectuada por un estudiante que no sea válida desde el punto de vista de la matemática escolar (Godino *et al.*, 2003).

4.4 El cuestionario

La construcción del cuestionario se basó en la Descomposición Genética (DG) propuesta, los elementos matemáticos, las relaciones lógicas y los modos de representación vinculados al concepto de integral, así como en tareas de investigaciones previas sobre el aprendizaje de este concepto. La validación se realizó mediante el método de validación por expertos, involucrando a tres investigadores seniors en Didáctica de la Matemática, quienes valoraron positivamente las tareas pero sugirieron una revisión de los enunciados. El cuestionario final, presentado en el Cuadro 1, se aplicó a 36 estudiantes durante

aproximadamente 90 minutos, con consentimiento informado de participación voluntaria.

Cuadro 1: Tareas que conformaban el cuestionario

Tarea	Elementos matemáticos
La gráfica de g consta de dos segmentos de rectas y una semicircunferencia. Úsela para evaluar cada integral. (a) $\int_0^2 g(x)dx$ (b) $\int_2^6 g(x)dx$ (c) $\int_0^7 g(x)dx$ 	ACA ALS LID PID
Sabiendo que $\int f(x)dx = x^3 - 3x^2 + C$, calcule el área de la región sombreada 	ALS LID PID TFC
Determine m de modo que la región sobre la recta $y = mx$ y bajo la parábola $y = 2x - x^2$ tenga un área $A = 36 [u^2]$.	ALS LID PID TFC
Obtenga el valor de la siguiente integral definida: $\int_0^\pi \sin(x)e^{1-\cos(x)}dx$	LID PID TFC
Calcule la siguiente integral definida $\int_a^0 xe^{-x^2}dx$ considerando que $a < 0$. A partir de lo anterior, establezca, justificadamente, si es posible asignar un número real al valor de la integral $\int_{-\infty}^0 xe^{-x^2}dx$	ACA ALS LID PID TFC ECI
Considere la función $f(x) = \frac{1}{x^2 - 4x + 5}$ con $Dom(f) = \mathbb{R}$ y determine $\int f(x)dx$. Con esta información calcule el valor de $a \in \mathbb{R}$ de modo que el área bajo la gráfica de $f(x)$ para $x \in [a, +\infty)$, que se muestra en la figura, sea igual a $\frac{\pi}{4}[u^2]$. 	ACA ALS LID PID TFC ECI

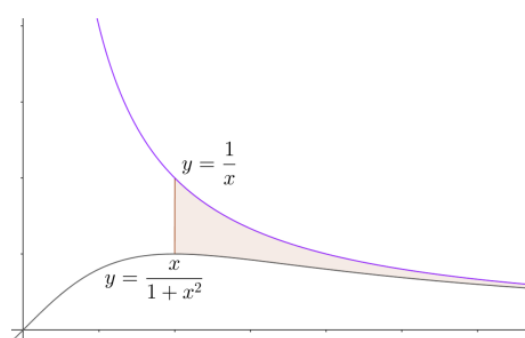
Fuente: Elaboración propia

4.5 La entrevista clínica

Las entrevistas clínicas se diseñaron con un enfoque semiestructurado, utilizando un guion predeterminado. Se priorizó establecer un ambiente de confianza con los

dos estudantes entrevistados, com o objetivo de que percibieran la entrevista como una oportunidad para explicar sus razonamientos detrás de las respuestas proporcionadas en el cuestionario. Además de profundizar en las tareas del cuestionario, se incorporaron dos nuevas interrogantes relacionadas con integrales impropias. Estas preguntas adicionales, presentadas en el Cuadro 2, tenían como propósito evaluar la capacidad de los estudiantes para movilizar relaciones lógicas entre los elementos matemáticos en un contexto diferente.

Cuadro 2: Interrogantes de las entrevistas

Interrogantes
Calcular, de ser posible, el área limitada por las curvas $y = \frac{1}{x}$ e $y = \frac{x}{1+x^2}$ en el intervalo $[1, +\infty[$.  Analice las siguientes integrales impropias y determine su valor en caso de ser convergentes: a) $\int_{-\infty}^{+\infty} x e^{-x^2} dx$ b) $\int_0^1 \frac{x}{(x^2 - 1)^2} dx$

Fuente: Elaboración propia

5 Análisis y resultados

El análisis de los datos se inició utilizando las herramientas proporcionadas por la teoría APOE para determinar el nivel de desarrollo del Esquema de integral manifestado por cada uno de los 36 estudiantes en la resolución del cuestionario. Para asignar a cada estudiante a un nivel específico de desarrollo, se emplearon los descriptores propuestos por Sánchez-Matamoros *et al.* (2006). Este análisis detallado de los protocolos de resolución del cuestionario para cada estudiante (E1, E2,..., E36) permitió clasificarlos en diferentes niveles de desarrollo del Esquema de integral, como se presenta en la Tabla 1.

Tabla 1: Niveles de desarrollo del Esquema de integral exhibida por los estudiantes.

	Nivel de desarrollo		
	Intra-Integral	Inter-Integral	Trans-Integral
Estudiantes	E3, E4, E8, E6, E12, E17, E19, E21, E24, E32	E1, E2, E5, E7, E10, E11, E13, E14, E16, E18, E20, E22, E23, E25, E26, E27, E8, E29, E30, E31, E33, E34, E35, E36	E9, E15
Total	10	24	2

Fuente: Elaboración propia

A continuación, se presenta un análisis de las respuestas seleccionadas del cuestionario aplicado al estudiante E25. Este análisis permitió determinar que el desarrollo del Esquema de integral del estudiante corresponde a un nivel Inter-Integral.

Figura 2: Resposta del estudiante E₂₅ a la Tarea N°1

(A) $\int_0^2 g(x) dx$ Es el triángulo con vértices en (0,0), (2,0) y (4,0), además es Δ rectángulo $\int_0^2 g(x) dx = \frac{4 \cdot 2}{2} = 4$

(B) $\int_2^6 g(x) dx$ Del 2 al 6 es una semicircunferencia, pero esto bajo el eje X, es negativa la altura de los rectángulos $\int_2^6 g(x) dx = -\frac{1}{2} \cdot \pi \cdot \frac{6-2}{2} = -\pi$

(C) $\int_0^7 g(x) dx$ Para calcular este integral hay que separar $\int_0^7 g(x) dx = \int_0^2 g(x) dx + \int_2^6 g(x) dx + \int_6^7 g(x) dx$
La última integral no es conocida, pero es un Δ rectángulo isósceles de lado 1 cm.
 $\int_6^7 g(x) dx = \frac{1 \cdot 1}{2} = \frac{1}{2}$
 $\int_0^7 g(x) dx = 4 - \pi + \frac{1}{2} = \frac{9 - \pi}{2}$

Fuente: Elaboración propia

El estudiante E₂₅ demuestra una conexión correcta de los elementos matemáticos involucrados en la Tarea N°1, utilizando adecuadamente la conjunción lógica. Esto se evidencia en su respuesta al apartado (b), donde reconoce que la integral corresponde al área encerrada por una semicircunferencia. Además, relaciona este concepto con la aproximación de la integral mediante la suma de áreas de rectángulos, señalando que "es negativa la altura de los rectángulos". Consecuentemente, aplica un signo negativo a esta integral, reconociendo que no representa un área (ACA-ALS-LID).

Para resolver correctamente el apartado (c) de la tarea, el estudiante emplea la propiedad de linealidad de la integral (PID). De manera similar, utiliza los mismos elementos matemáticos y sus conexiones en la Tarea N°2, con la diferencia de que considera positiva la sección de área ubicada bajo el eje X, como se observa en la Figura 3.

Figura 3: Respuesta del estudiante E₂₅ a la Tarea N°2

$$\begin{aligned} A' &= \int_{-1}^{0^{(+)}} f(x) dx - \int_0^{2^{(-)}} f(x) dx + \int_2^{3^{(+)}} f(x) dx \\ &= F(x)|_{-1}^0 - F(x)|_0^2 + F(x)|_2^3 \\ \text{pero } \int f(x) dx &= x^3 - 3x^2 + C, \text{ luego } F(x) = x^3 - 3x^2 \\ A' &= F(0) - F(-1) - [F(2) - F(0)] + F(3) - F(2) \\ A' &= \widetilde{F(0)} - \widetilde{F(-1)} - \widetilde{F(2)} + \widetilde{F(0)} + \widetilde{F(3)} - \widetilde{F(2)} \\ A' &= 2F(0) + F(3) - F(-1) - 2F(2) \\ A' &= 2 \cdot [0^3 - 3 \cdot 0^2] + [3^3 - 3 \cdot 3^2] - [(-1)^3 - 3 \cdot (-1)^2] - 2 \cdot [2^3 - 3 \cdot 2^2] \\ A' &= -[-1 - 3] - 2 \cdot [8 - 12] \\ A' &= 4 + 4 \\ A' &= 8 [u^2] \quad \text{El área sombreada es de } 8 [u^2] \end{aligned}$$

Fuente: Elaboración propia

El estudiante E₂₅ mantiene un desempeño sólido en las tareas 3 y 4, conectando correctamente los diversos elementos matemáticos necesarios para su resolución. Sin embargo, en la Tarea N°5, el estudiante comete un error que se observa con frecuencia en los protocolos

de resolución de otros estudiantes (Figura 4).

Figura 3: Respuesta del estudiante E₂₅ a la Tarea N°5

$$\int_a^0 x \cdot e^{-x^2} dx \quad (a < 0)$$

$$\int x \cdot e^{-x^2} dx = \int e^u \cdot \frac{1}{2} du = \frac{1}{2} \int e^u du = \frac{1}{2} \cdot e^u + C = \frac{1}{2} e^{-x^2} + C$$

$$\boxed{u = -x^2} \Rightarrow \boxed{du = -2x dx} \cdot \frac{1}{2}$$

$$\boxed{\frac{1}{2} du = x dx}$$

Luego:

$$\int_a^0 x \cdot e^{-x^2} dx = F(x) \Big|_a^0 = F(0) - F(a)$$

$$= \frac{1}{2} \cdot e^{0^2} - \left(\frac{1}{2} e^{-a^2} \right)$$

$$= \frac{1}{2} e^0 + \frac{1}{2} e^{-a^2}$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{-a^2}$$

Aplicando esto:

$$\int_{-\infty}^0 x \cdot e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{-(-\infty)^2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} e^{-\infty} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} e^{\infty}$$

No es posible asignar un número real a $\int_{-\infty}^0 x \cdot e^{-x^2} dx$

No se puede calcular

Fuente: Elaboración propia

Como se observa en la Figura 4, el estudiante conecta correctamente los primeros cinco elementos matemáticos (ACA, ALS, LID, PID, TFC). Sin embargo, no logra extender el concepto de integral definida a un intervalo no acotado a la izquierda, afirmando erróneamente que "no se puede calcular". Este error se debe a la falta de aplicación del límite cuando "a tiende a $-\infty$ " sobre la primitiva evaluada en $[a, 0]$, evaluando incorrectamente $-\infty$ como extremo inferior. Este error sugiere una transición del nivel Intra-Integral al Trans-Integral y posibles dificultades en la encapsulación y desencapsulación de los Objetos integral definida y Segundo Teorema Fundamental del Cálculo (construcciones 5, 11 y 13 de la DG).

Los estudiantes clasificados en el nivel Intra-Integral muestran errores al enfrentar integrales de funciones con intervalos negativos en su dominio (Tareas N°1 y N°2), considerando que la integral definida siempre representa un área positiva. Esto indica una transición del nivel Intra-Integral al Inter-Integral y dificultades en la encapsulación y desencapsulación del Objeto Segundo Teorema Fundamental del Cálculo (construcciones 11 y 12 de la DG).

Para caracterizar la tematización del Esquema de Integral, se realizaron entrevistas clínicas a los estudiantes clasificados en el nivel Trans-Integral. El objetivo fue profundizar en las construcciones relacionadas con la sección "Generalizaciones y extensiones del concepto de integral definida" de nuestra Descomposición Genética (DG). Según nuestros datos, estas construcciones proporcionan evidencia del tratamiento del Esquema de integral como Objeto.

A continuación, se presentan algunos desarrollos del estudiante E₁₅ y sus respuestas a las preguntas formuladas durante la resolución de nuevas tareas, ilustrando este proceso de tematización.

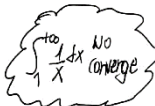
Entrevistador: ¿Es posible calcular el área entre las dos curvas en el intervalo $[1, +\infty)$?

E₁₅: No lo sé, tendría que analizarlo. Me plantearé la integral para intentar calcularlo (piensa un minuto). Si separo las integrales. La primera integral no converge, por tanto,

Entrevistador: ¿Qué quieres decir con no converge? ¿Es posible calcular el área?

E₁₅: Aún no lo sé, pero veo que no puedo separar porque sería como separar en dos límites cuando uno de ellos no existe y eso no lo podría hacer.

$$A = \int_1^{+\infty} \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2} \right) dx$$



Primero voy a calcular la primitiva y luego voy analizar.

Primitiva

$$I = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2} \right) dx = \int \frac{1}{x} dx - \int \frac{x}{1+x^2} dx$$

$$I = \ln|x| - \int \frac{x}{1+x^2} dx$$

$$I_1 = \int \frac{x}{1+x^2} dx = \frac{1}{2} \int \frac{du}{u} = \frac{1}{2} \ln|u| + C = \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C$$

$u = 1+x^2$
 $du = 2x dx \Rightarrow \frac{1}{2} du = x dx$

$$I = \ln(x) - \frac{1}{2} \ln(1+x^2) + C = \ln\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) + C$$

Entrevistador: ¿Y qué vas hacer con la primitiva?

E15: Voy a evaluarla para un intervalo $[1, b]$ y luego veré qué sucede al hacer que b tienda a $+\infty$.

$$\int_1^b \left(\frac{1}{x} - \frac{x}{1+x^2} \right) dx = F(x) \Big|_1^b = \ln\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right) \Big|_1^b = \ln\left(\frac{b}{\sqrt{1+b^2}}\right) - \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

Entrevistador: ¿Supongo que esta es tu primitiva evaluada entre $x=1$ y $x=b$? (apuntado lo escrito por E15) ¿y ahora qué vas hacer con ella?

E15: Solo tendría que analizar que sucede si b crece mucho, es decir, si tienda $+\infty$ (el estudiante escribe)

El estudiante E15 demuestra flexibilidad en el uso de todos los elementos matemáticos definidos, adaptando los Procesos encapsulados en los Objetos integral definida y Segundo Teorema Fundamental del Cálculo (construcciones 5 y 11 de la DG). Además, coordina los Procesos 12 y 13 de la DG, lo que le permite determinar el área acotada por ambas funciones.

La capacidad de los estudiantes E9 y E15 para extender o generalizar la noción de integral definida a intervalos no acotados o funciones no acotadas, basándose en sus conocimientos previos sobre integral definida y límite, es el indicador clave que evidencia el tratamiento del Esquema de integral como Objeto, es decir, su tematización.

6 Conclusiones

El análisis de los cuestionarios reveló marcadores significativos de transición entre los niveles de desarrollo del Esquema de integral. La progresión del nivel Intra-Integral al Inter-Integral se evidencia cuando los estudiantes logran generalizar la integral definida a funciones en intervalos negativos. El avance del nivel Inter-Integral al Trans-Integral se manifiesta en la capacidad de extender conocimientos a integrales impropias de primera y segunda especie.

Se identificaron oportunidades de mejora en construcciones clave de la DG, particularmente en la encapsulación y desencapsulación de los Objetos integral definida y Segundo Teorema Fundamental del Cálculo (construcciones 5 y 11). La incorporación de actividades adicionales en el ciclo ACE promete fortalecer estas estructuras mentales.

Las entrevistas clínicas corroboraron la tematización del Esquema en los estudiantes clasificados en el nivel Trans-Integral. Estos demostraron notable consistencia y flexibilidad al extender y generalizar la noción de integral definida al análisis de integrales impropias. Su capacidad para tratar el Esquema de integral como un Objeto, aplicando nuevas acciones y procesos como el análisis de la integral con un proceso de límite, confirma un alto nivel de comprensión y dominio del concepto.

Agradecimentos

XXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXXX

Referências

- Aldanda, E. (2011). *Comprensión del concepto de integral definida en el marco de la Teoría APOE* [Tesis doctoral]. Universidad de Salamanca, España.
- Arnon, I., Cottrill, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Roa Fuentes, S., Trigueros, M., & Weller, K. (2014). *APOS theory: A framework for research and curriculum development in mathematics education*. Springer-Verlag.
- Berry, J., & Nyman, M. (2003). Promoting students' graphical understanding of the calculus. *The Journal of Mathematical Behavior*, 22(4), 479-495.
- Bajracharya, R., & Thompson, J. (2014). Student understanding of the fundamental theorem of calculus at the mathematics–physics interface. In T. Fukawa-Connelly, G. Karakok, K. Keene, & M. Zandieh (Eds.), *Proceedings of the 17th special interest group of the Mathematical Association of America on research in undergraduate mathematics education*. Denver, CO.
- Boyce, W., & DiPrima, R. (2012). *Ecuaciones diferenciales y problemas con valores en la frontera*. Editorial Limusa.
- Brown, J. W., & Churchill, R. V. (2009). *Complex variables and applications*. McGraw-Hill.
- Bressoud, D. M., Carlson, M. P., Mesa, V., & Rasmussen, C. (2013). The calculus student: Insights from the Mathematical Association of America national study. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 44(5), 685-698.
- Carlson, M., Jacobs, S., Coe, E., Larsen, S., & Hsu, E. (2002). Applying covariational reasoning while modeling dynamic events: A framework and a study. *Journal for Research in Mathematics Education*, 33(5), 352-378.
- Centeno, J. (1988). *Números decimales: ¿por qué? ¿para qué?*. Editorial Síntesis.
- Czarnocha, B., Dubinsky, E., Loch, S., Prabhu, V., & Vidakovic, D. (2001). The concept of definite integral: Coordination of two schema. In M. van den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Proceedings of the 25th Annual Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 2, pp. 297-304). Freudenthal Institute.
- Godino, J., Batanero, C., & Font, V. (2003). *Fundamentos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas para maestros*. Universidad de Granada.
- Grundmeier, T. A., Hansen, J., & Sousa, E. (2006). An exploration of definition and procedural fluency in integral calculus. *Problems, Resources, and Issues in Mathematics Undergraduate Studies*, 16(2), 178-191.
- Haddad, Y. M. (2013). *Mechanical behaviour of engineering materials*. Springer Science & Business Media.
- Homa, A. (2021, novembro). L Avaliação Diagnóstica Auxiliada por Computador: Identificação das dificuldades dos alunos dos cursos de engenharia na resolução de problemas com Derivadas ivro Didático do Ensino Superior e Função Afim: um estudo de tarefas que envolvem aspectos gráficos e/ou situações-problema. *Anais do VIII Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática* (pp.733 -743), Uberlândia, MG.

- Kouropatov, A., & Dreyfus, T. (2013). Constructing the integral concept on the basis of the idea of accumulation: Suggestion for a high school curriculum. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 44(5), 641-651.
- Piaget, J., & García, R. (1983). *Psychogenesis and the history of science*. Columbia University Press.
- Salinas, P., & Trigueros, M. (2020). El Esquema del Cálculo Diferencial e Integral para ser enseñado en simultáneo. *Revista electrónica de investigación en educación en ciencias*, 15(2), 12-26.
- Sánchez-Matamoros, G., García, M., & Llinares, S. (2006). *El desarrollo del esquema de derivada*. *Enseñanza de las Ciencias*, 24(1), 85-98.
- Sealey, V. (2006). Student understanding of definite integrals, Riemann sums and area under a curve: What is necessary and sufficient? *Proceedings PME-NA 28* (pp. 46-53). Universidad Pedagógica Nacional.
- Selden, A., Selden, J., Hauk, S., & Mason, A. (2000). Why can't calculus students access their knowledge to solve non-routine problems? *Issues in mathematics education*, 8, 128-153.
- Serway, R. A., & Jewett, J. W. (2008). *Physics for Scientists and Engineers with Modern Physics*. Cengage Learning.
- Socas, M. (1997). Dificultades, obstáculos y errores en el aprendizaje de las Matemáticas en la Educación Secundaria. En L. Rico *et al.* (Eds.), *La Educación Matemática en la Enseñanza Secundaria* (pp. 125-154). Horsori.
- Steen, L. A. (1988). Calculus for a New Century: A Pump, Not a Filter. *Papers Presented at a Colloquium* [MAA Notes Number 8]. Mathematical Association of America.
- Thompson, P. W., & Silverman, J. (2008). The concept of accumulation in calculus. In M. P. Carlson & C. Rasmussen (Eds.), *Making the connection: Research and teaching in undergraduate mathematics* (pp. 43-52). Mathematical Association of America.
- Thompson, P. W. (1994). Images of rate and operational understanding of the fundamental theorem of calculus. *Educational Studies in Mathematics*, 26(2-3), 229-274.
- Trigueros, M. (2005). La noción de esquema en la investigación matemática educativa a nivel superior. *Educación Matemática*, 17(1), 5-36.