

Um olhar para as relações entre História da Matemática e Modelagem Matemática que foram identificadas em práticas pedagógicas

A look at the relationships between History of Mathematics and Mathematical Modeling that have been identified in pedagogical practices

Ana Caroline Frigéri Barboza¹
Érica Gambarotto Jardim Bergamim²
Lilian Akemi Kato³

Resumo: Esta pesquisa tem por objetivo investigar os objetivos da História da Matemática (HM) e as perspectivas da Modelagem Matemática (MM) que se mostram presentes no desenvolvimento de práticas pedagógicas que as articulam. Trata-se de uma pesquisa constituída em duas partes: na primeira, evidenciam-se relações teóricas, decorrentes dos objetivos da HM e das perspectivas da MM em oito trabalhos que, de algum modo, apresentam articulações entre elas em práticas pedagógicas; na segunda parte, analisam-se, de modo qualitativo interpretativo, duas práticas que possibilitaram apresentar como essas relações teóricas se mostraram no desenvolvimento delas. Os resultados apontam para predominâncias de relações nos seguintes enfoques: *HM como ferramenta e MM na perspectiva educacional e HM como meta e MM na perspectiva sociocrítica*.

Palavras-chave: Perspectivas da Modelagem Matemática. Objetivos da História da Matemática. Relações entre tendências metodológicas.

Abstract: This research aims to investigate the objectives of the History of Mathematics (HM) and the perspectives of Mathematical Modeling (MM) that are present in the development of pedagogical practices that articulate them. It is two-part research: in the first part, theoretical relationships arising from the objectives of HM and the perspectives of MM in eight works that, in some way, present articulations between them in pedagogical practices; in the second part, two practices that made it possible to present how these theoretical relationships were shown in their development are analyzed in a qualitative interpretative way. The results point to a predominance of relationships in the following approaches: *HM as a tool and MM from a educational perspective and HM as a goal and MM from a sociocritical perspective*.

Keywords: Perspectives of Mathematical Modeling. Objectives of the History of Mathematics. Relations between methodological trends.

1 Introdução

No âmbito da Educação Matemática, articulações entre tendências metodológicas destacam-se como objetos de algumas pesquisas, como as de Wichnoski e Klüber (2019), Madruga (2021) e Silva, Nunes e Sales (2022). Mais especificamente, podemos citar os estudos de Bergamim, Barboza e Kato (2023) e Bergamim e Kato (2024) que, nessa direção, abordaram possíveis articulações existentes entre História da Matemática (HM) e Modelagem Matemática (MM), evidenciando, dentre alguns aspectos, potencialidades dessas articulações para processos de ensino e de aprendizagem de Matemática.

¹ Universidade Estadual de Maringá • Mandaguari, PR — Brasil • ✉ anac_fbarboza@hotmail.com • ORCID <https://orcid.org/0000-0002-6994-0004>

² Secretaria de Educação do Estado do Paraná • Maringá, PR — Brasil • ✉ ericagambarotto@hotmail.com • ORCID <https://orcid.org/0000-0002-2954-3506>

³ Universidade Estadual de Maringá • Maringá, PR — Brasil • ✉ lilianakemikato@gmail.com • ORCID <https://orcid.org/0000-0001-8770-3873>

Wichnoski e Klüber (2019, p. 539), ao discutirem sobre articulações entre Investigação Matemática e outras tendências metodológicas, afirmam que “qualquer tentativa de inter-relacioná-las requer clareza das particularidades, das regiões de inquérito, da epistemologia e dos objetivos de ensino de cada uma das Tendências”. Esse alerta é coerente e deve ser considerado quando buscamos articular quaisquer tendências, em particular, HM e MM, que são o foco desta investigação. Com isso em vista, apresentamos, neste texto, nosso olhar para as relações teóricas entre essas duas tendências em práticas pedagógicas.

Essa investigação justifica-se por considerarmos que, quando se propõe estabelecer articulações entre HM e MM, as intencionalidades pedagógicas para fazê-las devem estar claras e os objetivos do uso da HM e da MM devem se complementar e se conectar de algum modo à luz dos objetivos pedagógicos. Com isso, considerando pesquisas que abordam os objetivos de se fazer uso da HM (Jankvist, 2009) e as perspectivas da MM (Kaiser & Sriraman, 2006), olhamos para duas práticas pedagógicas desenvolvidas em um curso de extensão que proporcionou discussões sobre articulações entre HM e MM com (futuros) professores de Matemática, buscando responder à seguinte pergunta: Que objetivos da HM e que perspectivas da MM se mostram presentes no desenvolvimento de práticas pedagógicas que as articulam?

Destacamos que nosso entendimento pela expressão “práticas pedagógicas” se direciona a toda ação docente que possa estar atrelada a processos de ensino com foco na prática em sala aula como planejamento, desenvolvimento e discussões de atividades que contemplem articulações entre HM e MM. Com isso, para responder à problemática supracitada, nosso texto está organizado em algumas seções: a primeira aborda relações teóricas relacionadas aos objetivos de se fazer uso da HM e da MM; a segunda discorre sobre os processos metodológicos adotados; a terceira descreve as duas práticas pedagógicas e apresenta uma análise qualitativa interpretativa em relação a elas; e, por fim, na seção de considerações finais, trazemos algumas reflexões a respeito de todo o apresentado.

2 Algumas relações teóricas entre HM e MM

Conforme observamos em Bergamim, Barboza e Kato (2023), trabalhos que relatam práticas pedagógicas que articulam HM e MM estão presentes na literatura. Especificamente nesta seção, nosso interesse se volta a olhar para aspectos teóricos da HM e da MM que embasam as práticas pedagógicas em termos dos objetivos que se têm ao desenvolvê-las. Para isso, neste estudo preliminar, nos pautamos em duas pesquisas de visibilidade internacional: uma relacionada à HM (Jankvist, 2009) e outra à MM (Kaiser & Sriraman, 2006).

Em relação à HM, Jankvist (2009) indica dois objetivos principais ao se fazer uso da HM como recurso pedagógico: a *História como ferramenta* e a *História como meta*. Para esse autor, usamos a *História como ferramenta* quando o interesse é contribuir para a aprendizagem dos estudantes e, dessa forma, ela pode contribuir de modo a favorecer aspectos motivacionais e afetivos (despertar interesse e entusiasmo), cognitivos (por exemplo, explorar diversas representações de um conceito no decorrer da História e a identificação de obstáculos epistemológicos) e evolutivos (perpassar por processos semelhantes de construção dos conceitos e procedimentos matemáticos de acordo com a evolução histórica).

Por sua vez, usamos a *História como meta* quando o interesse é discutir o próprio desenvolvimento da Matemática, ou seja, conhecer sobre o desenvolvimento da Matemática é o objetivo em si. “Ao usar a história como meta, a aprendizagem dos aspectos de desenvolvimento e evolução da matemática serve como um objetivo em si ou serve para ilustrar outros aspectos históricos da disciplina” (Jankvist, 2009, p. 239, tradução nossa). Assim, ao fazer uso da História como meta, estamos interessados em discutir o desenvolvimento da

Matemática e sua influência na sociedade bem como o caminho inverso, a influência de aspectos sociais no desenvolvimento da Matemática. Nesse sentido, diante desses dois objetivos de fazer uso da HM, entendemos que um mesmo episódio histórico pode ser usado de diferentes formas, a depender do objetivo pedagógico ao se fazer uso dele, como pode ser observado em Gosztonyi (2021).

Quanto à MM, Kaiser e Sriraman (2006) apresentam um levantamento bibliográfico composto por trabalhos que contêm atividades de MM, no qual apontam perspectivas que englobam diferentes objetivos e intencionalidades ao se propor tais atividades. São seis as perspectivas de MM apresentadas pelas autoras: *realística*, *contextual*, *educacional (didática e conceitual)*, *sociocrítica*, *epistemológica* e *cognitiva*. Em linhas gerais, a *perspectiva realística* visa à promoção de competências de modelagem na resolução de problemas do mundo real. A *perspectiva contextual* se direciona à contextualização e aplicabilidade de conteúdos matemáticos, levando-se em consideração aspectos motivacionais.

A *perspectiva educacional*, por sua vez, se subdivide em duas classificações (*didática e conceitual*) e remete-se à integração de modelos matemáticos no ensino de Matemática; quando o foco se direciona para a aprendizagem que se dá por meio da construção/desenvolvimento dos modelos, a classificação é a didática, e, quando a intenção é discutir os conceitos envolvidos nos modelos, a classificação é a conceitual. Em vista da *perspectiva sociocrítica*, esta se direciona à compreensão crítica de aspectos relacionados à Matemática a partir de reflexões sobre esta e seus usos na sociedade. Já a *perspectiva epistemológica* tem como objetivo principal a promoção do desenvolvimento da Matemática enquanto teoria. Por fim, a *perspectiva cognitiva* se relaciona ao interesse de se olhar para os processos cognitivos que atividades de MM suscitam.

Em relação às perspectivas apresentadas, estamos de acordo com o que é exposto por Almeida, Silva e Vertuan (2013, p. 29) quando afirmam que “conhecer as diferentes perspectivas e refletir sobre os aspectos que são postos em maior evidência em cada uma delas é potencializar a prática de modelagem em sala de aula”, pois isso mostra que há diferentes modos para se conduzir uma prática pedagógica de MM em função dos objetivos pretendidos. Além disso, segundo os autores, “[...] é possível que uma mesma atividade de modelagem contemple mais de uma alternativa simultaneamente. Todavia, a definição da perspectiva para cada situação está vinculada a propósitos e interesses subjacentes à implementação de atividades de modelagem” (Almeida, Silva & Vertuan, 2013, p. 29).

Diante do exposto, entendemos que, ao olharmos para práticas pedagógicas que articulam HM e MM, os objetivos, ao se fazer uso delas, devem ser evidenciados, no sentido de que as particularidades de ambas devem ser contempladas. Levando isso em consideração, nesta seção olhamos para como esses objetivos se entrelaçam ou se complementam em trabalhos que, de algum modo, relacionam HM e MM no desenvolvimento de práticas pedagógicas. Isso é o que buscamos expor na sequência e, para tal, nos guiamos pelas lentes dos entendimentos teóricos apresentados por Kaiser e Sriraman (2006) e Jankvist (2009).

Com esse interesse em vista, tomamos como *corpus* para este estudo oito trabalhos (apresentados com os códigos T1 a T8) que abordam práticas pedagógicas que articulam HM e MM. Desses, sete estão citados na pesquisa de Bergamim, Barboza e Kato (2023) e o outro foi adicionado a partir de outra busca: T1 – Farmaki e Paschos (2007); T2 – Souza (2011); T3 – Kjeldsen e Blomhøj (2012); T4 – F. Matos, Ribeiro, Machado, Ferreira, S. Matos e Silva (2013); T5 – L. Zontini e D. Zontini (2014); T6 – Ramunno, Carezzato e Villar (2021); T7 – Gosztonyi (2021); T8 – Alvim (2023).

Da leitura desse *corpus* e com a intenção de identificarmos relações teóricas segundo

Kaiser e Sriraman (2006) e Jankvist (2009), no Quadro 1 apresentamos os excertos exemplares⁴ extraídos dos trabalhos que nos possibilitam indicar os objetivos da HM e as perspectivas da MM adotados. Por motivos de extensão, apresentamos apenas um excerto para representar cada aspecto e, somente quando necessário⁵, dois. Além disso, selecionamos os excertos, levando em consideração aqueles que abordavam HM e MM (não necessariamente juntas) e que mostravam como elas fundamentam a prática pedagógica relatada.

Quadro 1: Relações entre os objetivos da HM e as perspectivas da MM

Qual(is) objetivo(s) da HM aparece(m) nas práticas pedagógicas?	Qual(is) perspectiva(s) da MM aparece(m) nas práticas pedagógicas?	Obj. da HM e persp. da MM
T1 - “Adaptamos a ideia de integração da história da matemática na práxis educativa, <u>utilizando ideias “genéticas” que representam passos cruciais na construção de vários conceitos matemáticos [...]</u> ” (p. 84, tradução nossa, grifos nossos)	T1 - “No presente artigo, utilizamos as ideias genéticas de Oresme [...] para desenvolver modelos matemáticos que podem ser empregados para a solução de problemas relacionados ao movimento linear ” (p. 83, tradução nossa, grifos nossos)	HM como <u>ferramenta</u> MM nas perspectivas contextual e <u>educacional conceitual</u>
T2 - “ <u>Para que nossos alunos compreendessem melhor o conceito de função, procuramos na história da matemática estudos sobre o movimento, com destaque para a visualização gráfica do movimento variado de um objeto em função do tempo, apresentado pelo filósofo Nicole Oresme</u> ” (p. 134, grifos nossos)	T2 - “ <i>Após diagnosticar as dificuldades dos alunos do 1º ano do ensino médio quanto à aprendizagem do conceito função, pensamos que, para se obter uma aprendizagem significativa, era imprescindível relacionar o conceito que envolve a função com suas aplicações práticas. Desta forma, optamos por trabalhar nas aulas de matemática a Modelagem, com o objetivo de identificar possíveis contribuições que atividades de Modelagem Matemática poderiam oferecer na aprendizagem do conceito de funções aos alunos do Ensino Médio</i> ” (p. 20, grifos nossos)	HM como <u>ferramenta</u> MM nas perspectivas <u>educacional didática</u> , contextual e <u>educacional conceitual</u>
T3 - “A história , por outro lado, pode fornecer casos do passado onde o que hoje chamaríamos de modelagem matemática e modelos foram utilizados em práticas científicas e onde a sua função e status foram debatidos entre cientistas de diferentes culturas científicas . Assim, a história pode servir como um meio para os alunos se envolverem em situações nas quais podem experimentar e serem desafiados a refletir e criticar o uso da modelagem e a importância do contexto para a função e o status da modelagem e dos modelos em práticas científicas [...] ” (p. 2158, tradução nossa, grifos nossos)	T3 - “Ilustramos como um grupo de alunos de ciências da Universidade de Roskilde, por meio do seu trabalho com este caso histórico, percebeu que diferentes culturas científicas têm opiniões diferentes sobre o valor de um modelo como instrumento para a obtenção de conhecimento científico; que o poder explicativo de um modelo está ligado não apenas ao contexto da sua utilização, mas também à posição filosófica e teórica subjacente mantida pelo(s) modelador(es) e pelos cientistas que discutem o modelo e a sua utilização ” (p. 2157, tradução nossa, grifos nossos)	HM como meta MM nas perspectivas sociocrítica e <u>realística</u>

⁴ Usamos os recursos tipográficos negrito, sublinhado e itálico para destacarmos trechos dos excertos que nos levaram a identificar determinados objetivos da HM e perspectivas da MM.

⁵ No T4, particularmente, não houve um excerto que representasse todas as perspectivas identificadas.

T4 - “Na tentativa de melhorar o aprendizado de alunos [...] e desenvolver novas didáticas e técnicas de ensino, nós alunos de licenciatura plena em matemática do IFPA, <u>reproduzimos em forma de aulas e experimentos sólidos e práticos, a história sobre a bomba d’água mais antiga já registrada. A técnica utilizada era tentar obter uma correlação entre o assunto que o professor de matemática da turma estava abordando, neste caso trigonometria, com o funcionamento a montagem e os princípios físicos utilizados para um melhor funcionamento da bomba</u>” (p. 2-3, grifos nossos)	T4 - “Esta atividade se deu em forma de oficina, com a <i>utilização da modelagem matemática como auxílio no ensino</i>” (p. 1) T4 - “Como qualquer montagem de equipamento tem suas adaptações a serem feitas, [...] neste momento usamos as comparações com o protótipo montado por nós bolsistas, para descobrir onde cada um estava errando. <u>As observações eram feitas pelos construtores, tomando cuidado para que eles percebessem o que estavam errando e desde a montagem percebessem a modelagem matemática</u>” (p. 7, grifos nossos)	HM como <u>ferramenta</u> MM nas perspectivas <u>educacional didática e realística</u>
T5 - “Com base nesse texto iniciamos uma discussão coletiva sobre o significado de algumas palavras e termos matemáticos; na sequência os alunos se dividiram em grupos de quatro integrantes e continuaram a discussão guiada pelas seguintes perguntas: 1. Quais seriam as formas de evitar o problema na visão de Malthus? Imagine-se no tempo de Malthus e descreva algumas soluções apontadas por ele. 2. Quais fatores podem interferir no crescimento da população? 3. Você acha que o problema apontado por Malthus ainda existe atualmente? Em caso afirmativo, sugira soluções para os tempos de hoje. As respostas dessas perguntas foram compartilhadas com a turma e comparadas com a resposta de Malthus, contida no final do texto e que só foi revelada depois de ouvirmos as respostas dos alunos” (p. 4, grifos nossos)	T5 - “Tomamos como base a perspectiva sociocrítica da modelagem [...] Por assumir essa postura a atividade foi conduzida de modo que além de trabalhar conteúdos matemáticos fosse estimulado o debate sobre os temas que foram surgindo e que faziam parte da realidade do estudante” (p. 2-3, grifos nossos)	HM como <u>meta</u> MM na perspectiva <u>sociocrítica</u>
T6 - “Como motivação inicial desse projeto, <u>foi apresentada uma seção da tese proposta por Thomas Malthus (1872) em seu trabalho original <i>An Essay on the Principle of Population</i>. A partir da leitura dessa seção, os alunos foram levados a identificar hipóteses, postulados, resultados e limitações das ideias de Malthus</u>” (p. 3-4, grifos nossos)	T6 - “Por fim, em relação à atividade analisada, após a sua aplicação, é possível identificar que os alunos compreenderam os modelos exponencial e logístico, tanto no contexto de crescimento populacional quanto no contexto da pandemia de Covid-19. Além disso, é possível identificar nas respostas dos alunos a <i>desencapsulação do ensino de matemática, uma vez que foram capazes de identificar os parâmetros desses modelos e de interpretar, de forma crítica, os dados e notícias fornecidos pela grande mídia.</i> Assim, <i>a modelagem matemática se</i>	HM como <u>ferramenta</u> MM nas perspectivas <u>sociocrítica e educacional didática</u>

	<i>mostrou uma alternativa para aproximar o contexto atual dos educandos de uma prática pedagógica de sala de aula, rompendo os muros da escola e contribuindo para o seu pleno desenvolvimento e para o exercício da cidadania [...]</i> (p. 7, grifos nossos)	
T7 - “O último argumento apresentado na seção anterior pode ser reformulado no que diz respeito ao desafio de enfrentar a pandemia: a história da inoculação e a polêmica entre Bernoulli e d'Alembert ajudam a perceber que crises semelhantes existiram no passado e fazem parte da história humana, que a matemática pode contribuir para o enfrentamento desse tipo de crise e que as crises também são motivadoras para o desenvolvimento das ciências ” (p. 114, tradução nossa, grifos nossos)	T7 - “Ecos entre as polêmicas histórica e moderna podem ser identificados em vários pontos. <u>Um desses pontos diz respeito às dificuldades da construção de um modelo estatístico, incluindo a escolha e a disponibilidade de dados convenientes, e os problemas de confiabilidade do modelo matemático.</u> Outra ligação pode ser descoberta no confronto de escolhas individuais e coletivas sublinhado por d'Alembert: os conflitos entre as preferências individuais e as medidas oficiais relativas à saúde pública e a legitimidade dos modelos matemáticos como suportes para essas escolhas. [...]” (p. 116, tradução nossa, grifos nossos)	HM como meta MM nas perspectivas <u>realística</u> e <u>sociocrítica</u>
T8 - “A inserção de fatos, problemas e métodos históricos, introduzidos na parte do texto, que trata das atividades de modelagem matemática propostas nesta tese, <u>pretende que a história possa se tornar subsídio, mas sem descartar sua importância em si, para uma melhor compreensão dos conceitos da disciplina Cálculo diferencial e integral, tornando o conteúdo mais significativo para o aluno, assim o auxiliando na sua análise crítica de pensamento</u> ” (p. 37, grifos nossos)	T8 - “ <u>Nas sequências de atividades de modelagem propostas para o ensino do Cálculo, usando a história como um potencial agente cognitivo no ensino, é importante identificar e evidenciar como ao longo da história do Cálculo a modelagem sempre marcou forte presença. Nas atividades de modelagem matemática entrelaçadas com a história do Cálculo, tem-se como objetivo também, evidenciar as figuras que propuseram e solucionaram problemas antecedentes ao desenvolvimento do Cálculo, que alicerçaram a fundamentação do Cálculo. Entenderam assim as limitações dos modelos, justificadas conforme a época, demonstrando e contextualizando a falta de ferramental matemático para as soluções</u> ” (p. 215, grifos nossos)	HM como <u>ferramenta</u> MM na perspectiva <u>educacional conceitual</u>

Fonte: As autoras.

Ao olharmos para o apresentado no Quadro 1, evidenciamos que, quando a HM é usada como ferramenta, as perspectivas de MM que se apresentam são a *contextual* (2), a *educacional conceitual* (3), a *educacional didática* (3), a *realística* (1) e a *sociocrítica* (1). Por sua vez, quando a HM é usada como meta, as perspectivas de MM que aparecem são a *sociocrítica* (3) e a *realística* (2). Nesse sentido, notamos que houve predominância da perspectiva educacional, tanto conceitual quanto didática, quando o objetivo estava relacionado à HM como ferramenta, e predominância da perspectiva sociocrítica quando o objetivo se vinculou à HM como meta.

Essa identificação, encontrada nos trabalhos, entre os objetivos e as perspectivas, mostra-se em consonância com o que é apontado quanto às particularidades individuais das

duas tendências. Ao se fazer uso da HM como ferramenta, esta visa à aprendizagem dos conceitos matemáticos estudados e, portanto, mostra-se consonante com a perspectiva educacional da MM que aspira à introdução ou mobilização de conceitos matemáticos. Do mesmo modo, ao se fazer uso da HM como meta, busca-se olhar para o desenvolvimento da Matemática (conhecer a HM em si), o que se mostra convergente com a MM na perspectiva sociocrítica, pois esta enfatiza o olhar crítico sobre o uso da Matemática na sociedade. Isso destaca que as intencionalidades pedagógicas da HM e da MM referentes às práticas pedagógicas expostas mostram-se alinhadas, ainda que de forma implícita, o que pode fortalecer articulações entre elas.

De posse dessas duas relações teóricas, encontradas neste estudo preliminar, seguimos para a segunda parte da investigação que visa olhar, com essas lentes calibradas, como essas relações se mostram presentes em duas práticas pedagógicas que articulam HM e MM.

3 Aspectos metodológicos

Conforme apontado na Seção 2, na realização do estudo preliminar, seguimos procedimentos metodológicos já apresentados na referida seção. Tendo esclarecido isso, com o objetivo de investigar os objetivos da HM e as perspectivas da MM que se mostram presentes no desenvolvimento de práticas pedagógicas que as articulam, classificamos nossa investigação como de natureza qualitativa. Segundo Bicudo (2021, p. 550), o rigor da pesquisa qualitativa

[...] é pautado na busca dos sentidos e significados expressos na linguagem que traz relatos de vivências subjetivas e de ocorrências sócio-históricas. Estas são disponibilizadas em documentos, em imagens estáticas ou dinâmicas, em obras de arte, etc.; são textos para serem lidos, compreendidos e interpretados. A interpretação está ligada à linha filosófica, assumida pela pessoa investigadora e sua equipe; porém, há que ser explicitada em detalhes, para cada caso, uma vez que não há uma generalidade a priori exposta em termos de método a ser seguido ou como uma autoridade que afiance suas afirmações.

Nesse sentido, em função do nosso objetivo, o intuito é apresentar uma interpretação, com base no referencial teórico dessa investigação, sobre ações relativas ao desenvolvimento de duas práticas pedagógicas. Essas práticas foram desenvolvidas no curso de extensão “Práticas Formativas com HM e MM”⁶, o qual contou com a presença de 14 participantes: oito alunos de Licenciatura em Matemática, três professores de Matemática atuantes na educação básica e três alunos de mestrado com pesquisa vinculada à HM ou à MM.

Esse curso de extensão foi desenvolvido no âmbito da tese de uma das autoras, com duração de aproximadamente 40 horas, e teve por objetivo *proporcionar aos participantes vivenciar práticas formativas nas quais pudessem refletir sobre práticas pedagógicas nas aulas de Matemática envolvendo a HM e a MM*. Sua organização se deu mediante três contextos: contexto 1 – discussão sobre textos que abordaram HM ou MM; contexto 2 – desenvolvimento de duas práticas pedagógicas (elaboradas pela pesquisadora) no curso de extensão e as reflexões geradas; e, contexto 3 – planejamento e desenvolvimento de práticas pedagógicas (que buscaram articular HM e MM) na educação básica e as reflexões geradas. Particularmente, voltamo-nos para o contexto 2, no que diz respeito a olhar para como a HM e a MM se relacionam nas duas práticas pedagógicas desenvolvidas no curso de extensão. Nesse contexto, os participantes assumiram o papel de alunos que desenvolvem práticas pedagógicas que

⁶ A produção e coleta dos dados nesse curso de extensão foram aprovadas pelo Comitê Permanente de Ética em Pesquisa Envolvendo Seres Humanos, da Universidade Estadual de Maringá, conforme número do parecer 5.415.188, em maio de 2022.

articulam HM e MM. Aliás, informamos que eles foram separados em três grupos, mas neste texto consideramos apenas um deles para a apresentação e análise dos dados, por considerarmos que as ações desse grupo são representativas dos demais.

Ressaltamos, também, que o planejamento dessas duas práticas pedagógicas foi construído a partir de uma revisão sistemática de literatura, posteriormente publicada (Bergamim & Kato, 2024), que mostrou as potencialidades de práticas que articulam HM e MM. No planejamento e desenvolvimento delas, as relações teóricas entre os objetivos de se fazer uso da HM e as perspectivas da MM, apresentadas na Seção 2, não eram de nosso conhecimento, pois esse estudo foi feito especificamente para essa investigação, em momento posterior à produção dos dados relativos às duas práticas pedagógicas. Isso ocorreu, pois, ao analisarmos as relações supracitadas, conjecturamos que os dados que tínhamos à disposição, decorrentes das discussões dos encaminhamentos das duas práticas, poderiam nos ajudar a evidenciar como essas relações se mostram no desenvolvimento destas.

Dada essa intenção, nosso processo analítico se deu por meio de uma análise qualitativa interpretativa dos dados, com apoio no referencial teórico apresentado sob a perspectiva de “Qual(is) *objetivo(s) da HM* aparece(m) nas práticas pedagógicas?” e “Qual(is) *perspectiva(s) da MM* aparece(m) nas práticas pedagógicas?”. Ressaltamos que nosso entendimento sobre as duas práticas selecionadas é de práticas pedagógicas de MM com a participação da HM, nesse sentido, em um primeiro momento, olhamos para a participação da HM nas etapas das práticas de MM, isto é, como a HM se mostrou presente no desenvolvimento destas, conforme apresentado nos Quadros 2 e 3.

A partir disso, dado o aspecto da HM como ferramenta ou da HM como meta, olhamos para a MM, intencionados a observar coerências ou diferenças com o que foi destacado como relações teóricas entre HM e MM: *HM como ferramenta e MM na perspectiva educacional e HM como meta e MM na perspectiva sociocrítica*. Para realizarmos essa análise, selecionamos excertos representativos de diálogos dos participantes quanto ao desenvolvimento das práticas que possibilitaram mostrar aspectos que evidenciam o alcance dos objetivos delas. Com isso, mostramos como as relações que predominaram no estudo preliminar apareceram no desenvolvimento das duas práticas pedagógicas bem como explicitamos outras relações.

4 Descrição e análise dos dados

Diante do apresentado anteriormente, nesta seção explicitamos informações sobre as duas práticas pedagógicas. A primeira, intitulada “Medindo a circunferência da Terra”, teve por objetivo possibilitar um processo de ensino e de aprendizagem que gerasse compreensão dos tópicos matemáticos estudados e atitudes desejáveis para a formação do aluno. Em vista disso, buscou-se por um modelo matemático descrito na História (modelo de Eratóstenes) que pudesse ser analisado e reformulado pelos participantes de modo que, ao fazerem isso, considerando aspectos do presente, atribuissem significado e desenvolvessem atitudes de autonomia e criticidade em relação ao conteúdo abordado.

Ao olharmos para o objetivo dessa prática pedagógica, observamos que ele se alinha à HM como ferramenta e à perspectiva educacional da MM, pois o foco se direciona para a compreensão do conteúdo envolvido. Isso, a propósito, será melhor detalhado no Quadro 2. Para atingir esse objetivo, houve uma discussão com os participantes sobre o tema Terra Plana e, a partir do engajamento deles, foi apresentado que, no século II a.C. Eratóstenes já havia mostrado que a Terra deveria ter um formato esférico e que seu modelo matemático histórico, inclusive, possibilitou se estimar a medida da circunferência da Terra com precisão considerável. Diante dessa discussão inicial, foi solicitado que investigassem e tentassem

responder à seguinte pergunta: Como estimar o comprimento da circunferência da Terra, hoje?

A fim de responderem a essa pergunta, os participantes estipularam hipóteses bem como conteúdos matemáticos que poderiam ajudar na resolução do problema, analisaram também como Eratóstenes havia feito a estimativa por meio da trigonometria que conhecemos hoje e compararam as condições daquela época com as de hoje para definirem o modelo que representasse uma solução para o problema elencado. Quanto à validação do modelo apresentado, visto que os participantes já sabiam qual era a medida da circunferência da Terra a ser encontrada, validaram o processo, considerando essa informação.

Apresentamos, na sequência, o Quadro 2, que evidencia as informações elencadas acima bem como nos possibilita refletir acerca do(s) objetivo(s) da HM e da(s) perspectiva(s) da MM presentes nessa primeira prática pedagógica.

Quadro 2: Desenvolvimento da prática pedagógica “Medindo a circunferência da Terra”

Etapas do desenvolvimento	Excertos que representam a participação da HM
Familiarização com o tema - O que conhecemos sobre o Movimento Terraplanista? - Reportagem: 7% dos brasileiros acreditam que a Terra é plana. - Quem foram os primeiros estudiosos a fazer afirmações sobre o formato esférico da Terra? Como as civilizações antigas descobriram o formato da Terra?	<i>Pedro: Mas, Érica, você deve saber com a parte de ciência e história. Lá atrás, quando a gente estuda, a gente sabe que já teve um momento que a Terra foi considerada plana, que já foi considerado o geocentrismo e tudo mais.</i> <i>Érica: Isso.</i> <i>Pedro: Então, acho que talvez isso é um erro histórico, que as pessoas estão levando para elas. Porque isso está na nossa História, então é importante, mas as pessoas não superaram esse momento histórico.</i> <i>[...]</i> <i>Pedro: E aí entra naquelas questões de epistemologia e tudo mais. Então, talvez, a parte da história poderia auxiliar bastante a entender.</i>
Problemática: Como estimar o comprimento da circunferência da Terra, hoje?	
Hipóteses - Quando não é solstício de verão, a vareta gera sombra nos dois lugares distintos. - A sombra deve ser medida em locais que não são próximos. - Considerar cidades no mesmo meridiano, aproximadamente. - A vareta deve estar perpendicular ao solo para medir a sombra. - Considerar a distância norte-sul entre as cidades e não com as curvas da estrada do Google Maps.	<i>Alice: Bom, a pergunta é como que a gente faria hoje, né? [...]</i> Bom, copiar o Eratóstenes acho que não dá. <i>Risos.</i> <i>Paulo: Vamos copiar ele [em tom de convite].</i> <i>Miguel: É, acho que para copiar ele. Ele estava a uma distância de...</i> <i>Alice: 800 metros considerando as cidades lá.</i> <i>Miguel: Então, para fazer uma coisa assim, a gente precisaria de pessoas bem distantes para ser significativo.</i> <i>Paulo: Sim.</i>
Resolução por meio da Matemática - Cálculo do ângulo de incidência do sol na vareta com a tangente. - A diferença entre os ângulos de incidência nos dois locais gera o ângulo central.	<i>Alice: Só que a questão é: a gente pensou que no nosso caso as duas cidades teriam sombra e aí nós teríamos essa configuração. Aí a gente falou: vamos tentar achar uma relação entre esses ângulos. Então, o que nós pensamos? Esse ângulo é o que nós queremos. Vou chamar ele de α. E a gente pode ter um outro ângulo que a gente consegue a partir da medição, foi o que nós fizemos. Então vou</i>

- Uso da proporcionalidade entre ângulo e arco correspondente.	<i>chamar ele de β. Se nós olharmos pra esse ângulo aqui, ele é um ângulo externo desse triângulo que tem ângulos alfa e beta [esses ângulos são adjacente ao triângulo mencionado], então ele tem de ser $\alpha + \beta$. Só que essa é um [reta] transversal cortada por duas paralelas, esse ângulo e o outro ângulo de incidência lá em cima vai ser alterno interno. E aí ele é $\alpha + \beta$. Então, nós chegamos à conclusão de que era só você pegar o ângulo maior, subtrair o menor que a gente encontrava o ângulo central. E foi isso que a gente pensou. Aí a gente foi e escolheu a outra cidade.</i>
Socialização dos resultados <i>Érica: Aí uma coisa que eu queria ouvir de vocês, como vocês acham que essa atividade pode auxiliar vocês, ou mostrar algumas coisas para os alunos, ou despertou em vocês sobre a discussão contra argumentos que afirmam que a Terra é plana?</i> <i>Miguel: <u>Acho que o ponto da medição é o fundamental, porque a gente chega em ângulos diferentes. Como que eu vou ter uma Terra plana se os ângulos são diferentes, se os ângulos de incidência são diferentes? Não faz sentido matematicamente falando.</u></i>	

Fonte: As autoras.

A partir do Quadro 2, podemos observar que o desenvolvimento da prática de MM se volta para discussões relacionadas aos conteúdos envolvidos na construção do modelo para o problema. Nesse sentido, os destaques dados nos excertos são representativos da HM como ferramenta, pois, na fase inicial, por exemplo, observamos que determinado participante remete-se à HM para discutir que, em algum momento da História, a Terra já foi considerada plana, com isso, observamos que a História apareceu na fala do próprio participante e pode ser entendida como algo que despertou seu interesse, no sentido de se motivar para aprender sobre o que será explorado. Por outro lado, também podemos observar que a discussão realizada nessa etapa possibilita entendimentos relacionados à HM como meta, pois aborda o desenvolvimento da HM. No estabelecimento de hipóteses, observamos que os participantes compararam as condições da época de Eratóstenes com as condições atuais relacionadas ao problema para começarem a definir o que deveria ser levado em conta para resolvê-lo, ou seja, a HM auxiliou no que se refere à definição das estratégias matemáticas adotadas.

Por sua vez, no processo de resolução, novamente observamos que os participantes se pautaram no modelo de Eratóstenes para construir o modelo deles, então primeiro entenderam as estratégias matemáticas envolvidas no referido modelo, pensaram nas condições atuais do problema e depois pensaram nas variações do modelo e nas estratégias adotadas para conseguirem resolvê-lo. Nessa parte, notamos o objetivo da HM como ferramenta favorecendo o processo de aprendizagem do conteúdo envolvido. Na parte da socialização, observamos que o que chamou a atenção do participante foi mostrar, por meio da Matemática, que a Terra não é plana, o que foi feito com base no modelo matemático histórico. Novamente, a ênfase se direciona para a aprendizagem de conceitos matemáticos que ajudam a discutir sobre um tema polêmico inserido na sociedade. Desse modo, conforme o objetivo, encaminhamentos e discussões dessa primeira prática, entendemos que a perspectiva de MM que mais se destaca é a educacional, uma vez que a mobilização de conceitos matemáticos se fez necessária para a compreensão do tema, promovendo, com isso, atribuição de significados aos conceitos utilizados que também podem ser vistos como ferramentas para se modelar o problema.

A segunda prática pedagógica, intitulada “Discutindo a dinâmica de populações”, teve por objetivo evidenciar os aspectos humanos, sociais, científicos e culturais atrelados ao desenvolvimento dos modelos matemáticos e as relações da Matemática com outras áreas de

conhecimento. Tendo em vista esse objetivo, buscou-se por modelos matemáticos presentes na História que possibilitassem discutir seus papéis na sociedade e as influências de aspectos sociais e humanos atrelados ao seu desenvolvimento para, assim, ser possível entender a respeito do desenvolvimento da Matemática. Os modelos escolhidos foram o de Malthus e o de Verhulst, que abordam a dinâmica de populações.

Ao olharmos para o objetivo dessa prática, observamos que ele se direciona para o uso da HM como meta, pois a intenção se volta para o desenvolvimento de modelos matemáticos e a relação deles com o desenvolvimento da Matemática em conjunto com outras áreas de conhecimento. Também notamos que a intencionalidade envolvida no objetivo se alinha à perspectiva sociocrítica da MM, uma vez que enfatiza o olhar para o uso da Matemática e o papel dos modelos na sociedade, como poderá ser observado no Quadro 3, que apresenta algumas discussões realizadas pelos participantes no desenvolvimento da prática pedagógica.

Para ser atingido o objetivo pretendido, inicialmente foi sugerido que os participantes realizassem a leitura de reportagens que abordavam sobre o tema Populações. A partir dessa familiarização com o tema e a verificação do interesse dos participantes, foi apresentado, a eles, que o tema da prática pedagógica a ser desenvolvida seria “Análise crítica sobre a dinâmica de uma população”, e, com isso, foi solicitado que escolhessem uma população e propusessem um problema relacionado a essa temática.

A partir desse momento, os participantes começaram a pesquisar algumas populações de interesse e dados acerca delas que lhes possibilitassem estabelecer um problema. Após sua definição e estabelecimento de modelos que os auxiliariam na resolução do referido problema, foi realizada uma discussão coletiva quanto a *Mas e antes como será que se fazia esse tipo de estudo, como será que se analisava o comportamento das populações em termos sociais, de consequências, de causas? Vocês já ouviram falar alguma coisa sobre, já estudaram alguma coisa?*. Com as discussões advindas desses questionamentos, foram disponibilizados, aos participantes, um texto de fonte primária, publicado por Malthus, que explicava como este produziu seu modelo, e um vídeo que apresentava o modelo de Verhulst, outro modelo que abrange a dinâmica de populações. A intenção com a disponibilidade do texto e do vídeo foi de que, após lerem o texto e assistirem ao vídeo, discutissem os dois, estabelecendo relações com os modelos que haviam proposto e com a análise crítica acerca da população escolhida.

Apresentamos, na sequência, o Quadro 3, que evidencia as informações elencadas acima bem como nos possibilita refletir acerca do(s) objetivo(s) da HM e da(s) perspectiva(s) da MM presentes nessa segunda prática pedagógica.

Quadro 3: Desenvolvimento da prática pedagógica “Discutindo a dinâmica de populações”

Etapas do desenvolvimento	Excertos que representam a participação da HM
Familiarização com o tema - Disponibilização de reportagens. - O que mais chamou a atenção de vocês? Tem informação que vocês não sabiam e que ficaram sabendo agora? - Tema: Análise crítica de uma dinâmica populacional.	Não foi identificado.
Problemática: Identificar fatores que impactam no crescimento ou decréscimo da população de Portugal e fazer uma previsão para os próximos anos.	

Hipóteses - A população de Portugal não tem regularidade na taxa de crescimento por conta da migração. - A taxa média de crescimento da população de 2011 a 2021 foi de - 0,238% e permanecerá constante nos próximos anos (hipótese provisória).	Alice: <u>Mas, dá pra gente estipular as variáveis, por exemplo, quando, não lembro o nome dele, que faz o modelo de crescimento populacional, ele parte de algumas hipóteses, a gente pode estabelecer também as nossas.</u> Miguel: Por isso que eu falei, acho que a gente pode colocar pontos sobre o que poderia ser feito para aumentar essa população. <u>Até porque essa hipótese dele foi meio que refutada depois porque ele disse que ia chegar num momento que não ia ter mais comida na Terra, considerando que a população sempre fosse aumentando, aumentando, aumentando.... E ela não segue esse padrão, a população.</u> Helena: E se fazer assim: da forma como está, em quanto tempo nós conseguimos ver alguma coisa? Alice: <u>Eu acho que essa atividade tem alguma relação com esse modelo.</u> Miguel: <u>Do... Malthus? Eu não sei se é do Malthus ou se é do Smith, eu não lembro de quem que é.</u> Alice: <u>Do Malthus.</u>
Resolução por meio da Matemática	Alice: Aqui, olha, é essa aqui que eu tinha visto, aquela variação vai ser isso aqui então aqui ela aqui. Olha lá, gente, elevado a t. É juros composto mesmo, então? Laura: Acho que é. Miguel: É, é juro composto. [...] Alice: Gente, estou chocada, a gente chegou no negócio da população, gente. Miguel: <u>Esse outro eu não conheço.</u> Alice: <u>Esse aí não parece ser famoso não, mas o que ele fez?</u> Miguel: <u>Crescimento logístico.</u> Laura: Ah, eu vi alguma coisa sobre isso. Miguel: <u>Onde ela cresce até um limite máximo sustentável, depois ela tende a se estabilizar.</u> Laura: É. O gráfico é assim [mostrando o sinal do s] Alice: <u>Ahh! Mas, é parecido com o dele também, né?!</u> Laura: Ele fala que, a hora que chega no tanto máximo que o ambiente aguenta, aí começa gente morrer, começa a ter pandemia.
Socialização dos resultados Lucas: Sim, e pensando na sala de aula, né? [...] De olhar para a história da matemática, pesquisar algo do passado, pensar no uso da modelagem matemática como alternativa pedagógica para o ensino e aprendizagem de matemática, eu penso que vai muito além de pensar a matemática de ensinar técnicas operatórias, né, é propiciar reflexão acerca de vários conceitos e contextos na busca de muito mais que ensinar matemática, que seria educar nossos alunos por meio da matemática, né? Pensar numa situação matemática de sala de aula, estar educando os alunos por meio da matemática, para que eles possam chegar a isso que a Érica falou, né, <u>a matemática é uma construção humana e uma atividade humana.</u> Alice: Seria... Eu acho né... <u>pensar mais na matemática como instrumento mesmo, sabe, que você, olha... conhecendo isso, eu consigo analisar isso, eu consigo ver isso, eu consigo entender isso [...]</u> Estela: <u>Dá para a gente também desconstruir aquela ideia de algo muito linear, né?</u>	

Fonte: As autoras.

Com base no Quadro 3, notamos que o desenvolvimento da prática de MM se volta para

discussões relacionadas aos aspectos sociais que influenciam no desenvolvimento da Matemática e que, no caso, estavam relacionados à temática População, tanto no passado como no presente, o que se direciona à HM como meta. Na fase inicial, apesar de nas reportagens constar um texto que abordava aspectos históricos relacionados ao estudo de modelos matemáticos históricos acerca de dinâmica de populações, isso não foi discutido pelos participantes. Por sua vez, podemos notar que, no estabelecimento de hipóteses, essas discussões ficam mais evidentes, pois, no diálogo dos participantes, é possível percebermos que eles têm ciência de que o modelo de Malthus foi questionado, o que propicia discutir as refutações que são inerentes ao desenvolvimento da Matemática.

Na fase de resolução, os participantes conseguiram prever que poderiam usar a fórmula dos juros compostos, $M = C(1 + i)^t$, sendo M a população final, C , a população inicial, t , o período e i , a taxa de crescimento, reconhecendo o modelo de Malthus atrelado a essa fórmula. A partir dessa percepção dos participantes, estes foram instigados a olhar para o contexto em que Malthus elaborou o modelo e conhecer o modelo de Verhulst, que é baseado no modelo de Malthus mas apresenta outra interpretação para o comportamento do crescimento da população, conforme pode ser observado no diálogo dos participantes. Nesse diálogo, por exemplo, podemos ver que é possível discutirmos o fato de que muitos resultados relacionados ao desenvolvimento da Matemática não são conhecidos pelos participantes. Isso ficou evidente quando os participantes manifestaram que não conheciam o modelo de Verhulst, o que propicia uma discussão sobre por que o resultado de Malthus é mais conhecido que o de Verhulst se em termos de dinâmica populacional humana, os próprios participantes perceberam que o modelo de Verhulst é mais apropriado para se descrever tal comportamento.

Já na socialização, participantes de outros grupos fizeram reflexões acerca do que foi apresentado pelo grupo selecionado. No discurso apresentado, podemos ver que ideias relacionadas a como a Matemática se desenvolve aparecem quando dois participantes trazem ideias que remetem à Matemática como instrumento que ajuda a se entender e propor solução para problemas da humanidade e por isso ela é uma atividade humana. Além disso, foi mencionado sobre se questionar o aspecto linear do desenvolvimento da Matemática, no sentido de evidenciar que os modelos matemáticos estudados possibilitaram olhar para a necessidade de revisita-los, questioná-los e reformulá-los de acordo com o contexto.

Entendemos que os encaminhamentos realizados e as discussões decorrentes deles mostram que a prática pedagógica está consonante em relação à HM como meta e à MM na perspectiva sociocrítica. Ainda que o uso de conceitos matemáticos tenha se mostrado relevante para a compreensão dos modelos de dinâmicas populacionais (HM como ferramenta e MM na perspectiva educacional, por exemplo), o foco foi a discussão sobre os papéis desses modelos na sociedade que influenciam dinâmicas sociais.

Finalmente, nas duas práticas pedagógicas apresentadas, observamos que, para além da consonância com os objetivos da HM e as perspectivas da MM, conforme identificamos na Seção 2, também foi possível se estabelecer outras relações bem como notar comparações entre passado e presente, embora com ênfases diferentes. Na primeira, o foco da comparação foi olhar as variáveis envolvidas no que foi produzido por Eratóstenes e como as relações entre elas se modificam para a construção do modelo que auxilia na resolução do problema atual, como visto no seguinte discurso: *“ele [Eratóstenes] chegou nisso aqui, mas como que a gente chega nesse ângulo? A gente precisa saber dessas medidas [altura e sombra] para chegar nesse ângulo”*. Na segunda prática, o foco foi o entendimento dos contextos do passado e do presente que devem ser considerados para se interpretar o fenômeno em estudo: *“Olha, gente, nós não chegamos nisso [as previsões de Malthus sobre escassez de alimentos], mas isso está acontecendo e não é por falta de espaço de terra, é má distribuição, mas tudo bem”*.

5 Considerações finais

Esta investigação foi norteadada pela seguinte pergunta: Que objetivos da HM e que perspectivas da MM se mostram presentes no desenvolvimento de práticas pedagógicas que as articulam? Para tanto, norteamos-nos por relações teóricas estabelecidas em um estudo preliminar que mostrou que, quando a HM foi identificada como ferramenta, a perspectiva de MM que mais apareceu foi a educacional, e, quando a HM foi identificada como meta, a perspectiva de MM mais notada foi a sociocrítica.

A partir disso, olhamos duas práticas pedagógicas que articulam HM e MM, desenvolvidas com (futuros) professores de Matemática em um curso de extensão que tinha o objetivo de discutir esse tipo de prática. Ao analisarmos os objetivos, encaminhamentos e discussões propiciadas em cada uma dessas práticas, foi possível identificarmos como as relações teóricas supracitadas ocorreram: na primeira, temos o enfoque direcionado para a *HM como ferramenta* e para a *perspectiva educacional da MM*, pois o foco voltou-se para a compreensão do conteúdo envolvido; já na segunda prática pedagógica, temos um foco direcionado para a *HM como meta* e para a *perspectiva sociocrítica da MM*, visto que possibilitou discussões sobre o papel e o uso de modelos matemáticos na sociedade.

De outro viés, para além do explicitamente identificado, essas relações não são absolutas, uma vez que dependem dos objetivos pedagógicos do professor e da imprevisibilidade da prática pedagógica de MM. A exemplo disso, na primeira prática, ponderamos que pela natureza do tema (Terra Plana), podem ser favorecidas discussões relacionadas ao papel da Matemática na desconstrução do terraplanismo, direcionando à HM como meta e à perspectiva sociocrítica da MM. Quanto à segunda prática, na etapa da resolução do problema, observamos que há discussões relacionadas à aprendizagem de conceitos matemáticos, o que direciona o olhar para a HM como ferramenta e para a perspectiva educacional da MM. Com isso, o que identificamos é a predominância de determinados objetivos da HM e perspectivas da MM em função dos próprios objetivos pedagógicos presentes nas práticas relatadas.

Por fim, entendemos que esta investigação se faz relevante para as pesquisas da área da MM por evidenciar relações teóricas dela com outra tendência metodológica da Educação Matemática (a HM) e possibilitar a compreensão dessas relações no desenvolvimento de práticas pedagógicas que as articulam.

Agradecimentos

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – Brasil (CAPES) – Código de Financiamento 001.

Referências

- Almeida, L. W., Silva, K. P. & Vertuan, R. E. (2013). *Modelagem matemática na educação*. São Paulo, SP: Contexto.
- Alvim, R. B. (2023). *Ensino de cálculo: história, experimentação, geometria, neurociência e modelagem*. 2023. 252f. Tese (Doutorado em Ciências Naturais). Universidade Estadual do Norte Fluminense Darcy Ribeiro. Campos dos Goytacazes, RJ.
- Bergamim, E. G. J.; Barboza, A. C. F. & Kato, L. A. (2023). História da matemática e modelagem matemática: um olhar para práticas pedagógicas retratadas em trabalhos científicos. In: *Anais da 12ª Conferência Nacional sobre Modelagem na Educação Matemática* (pp. 1-16). Porto Alegre, RS.

- Bergamim, E. G. J. & Kato, L. A. (2024). Articulações entre história da matemática e modelagem matemática: algumas compreensões a partir de uma revisão sistemática de literatura. *Educação Matemática Pesquisa*, 26(1), 177-207.
- Bicudo, M. V. (2021). A lógica da pesquisa qualitativa e os modos de procedimentos nela fundados. *Revista Pesquisa Qualitativa*, 9(22), 540-552.
- Farmaki, V. & Paschos, T. (2007). Employing genetic ‘moments’ in the history of mathematics in classroom activities. *Educational Studies in Mathematics*, 66(1), 83-106.
- Gosztonyi, K. (2021). How history of mathematics can help to face a crisis situation: the case of the polemic between Bernoulli and d’Alembert about the smallpox epidemic. *Educational Studies in Mathematics*, 108(1), 105-122.
- Jankvist, U. T. (2009). A categorization of the “whys” and “hows” of using history in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, 71(3), 235-261.
- Kaiser, G. & Sriraman, B. (2006). A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 38(3), 302-310.
- Kjeldsen, T. H. & Blomhøj, M. (2012). Developing students’ reflections about the function and status of mathematical modeling in different scientific practices: history as a provider of cases. *Science & Education*, 22(9), 2157-2171.
- Madruga, Z. E. F. (2021). Concepções de modelagem matemática nas pesquisas em etnomodelagem. In: *Anais do 8º Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática* (pp. 1-15). Porto Alegre, RS.
- Matos, F. C.; Ribeiro, J. L.; Machado, Y. A. P.; Ferreira, R. S.; Matos, S. P. M. & Silva, C. I. S. (2013). O parafuso de Arquimedes: uma inovação no ensino de matemática sob a perspectiva da modelagem matemática no IFPA. In: *Anais do 11º Encontro Nacional de Educação Matemática* (pp. 1-9). Curitiba, PR.
- Ramunho, F. A. L.; Carezzato, M. M. & Villar, R. P. (2021). Modelagem matemática da pandemia do Covid-19 como estratégia de superação da encapsulação do ensino. In: *Anais do 13º Encontro Nacional de Pesquisa em Educação em Ciências* (pp. 1-8). Campina Grande, PB.
- Souza, V. R. (2011). *Funções no ensino médio: história e modelagem*. 2011. 173f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo, SP.
- Silva, A. M.; Nunes, J. M. V. & Sales, E. R. (2022). Perspectivas teóricas da educação matemática, possibilidades de articulações. *Revista Educação Matemática Pesquisa*, 24(3), 177-2018.
- Wichnoski, P. & Klüber, T. E. (2019). Investigação matemática: possíveis articulações com a história da matemática, TIC e resolução de problemas. *Revista Educação Matemática Pesquisa*, 21(2), 539-561.
- Zontini, L. R. S. & Zontini, D. D. (2014). Modelagem matemática com Malthus: uma atividade com o primeiro ano do Ensino Médio. In: *Anais do 6º Encontro Paranaense de Modelagem em Educação Matemática* (pp. 1-9). Curitiba, PR.