Situações de generalização em Sequências Recursivas: aproximações e distanciamentos para a construção do conceito de Função Afim no Ensino Fundamental

Generalization situations in Recursive Sequences: approximations and distinctions for the Construction of the Concept of Affine Function in Elementary School

Andreza Santana da Silva Mendes[1]
Rosinalda Aurora de Melo Teles[2]

Resumo: Adotando o referencial constituído pelas Teorias dos Campos Conceituais e dos Registros de Representação Semiótica, com a finalidade de correlacionar situações de generalização de padrão em sequências recursivas lineares de primeira ordem com função afim, foram analisados integralmente todos os capítulos de duas coleções de Matemática. A partir das categorias: sequência recursiva numérica ou geométrica, homogênea ou não homogênea, foram analisados 23 itens. A abordagem das situações de generalização em sequências recursivas lineares sinaliza potencial para a compreensão da relação entre as variáveis dependente e independente da função afim. Também aponta que há lacunas quanto à abordagem de sequências recursivas lineares geométricas do tipo decrescentes e na construção da generalização dessas sequências nos anos iniciais do ensino fundamental.

Palavras-chave: Sequências recursivas lineares. Livro didático. Teoria dos Campos conceituais. Teoria dos Registros de Representação Semiótica.

Abstract: Adopting the framework of the Conceptual Fields and Semiotic Representation Registers theories, in order to correlate situations of pattern generalization in linear recursive sequences of the first order with an affine function, all the chapters of two mathematics collections were fully analyzed. From the categories: numerical or geometric recursive sequence, homogeneous or non-homogeneous, 23 items were analyzed. The approach to generalization situations in linear recursive sequences shows potential for understanding the relationship between the dependent and independent variables of the affine function. It also points out that there are gaps in the approach to geometric linear recursive sequences of the decreasing type and in the construction of the generalization of these sequences in the early years of elementary school.

Keywords: Linear recursive sequences. Textbooks. Theory of Conceptual Fields. Theory of Semiotic Representation Registers.

1 Introdução

A presença de padrões na natureza ou em situações cotidianas, constituem-se como fenômenos fascinantes que permeiam vários aspectos do mundo natural, do micro ao macrocosmo, tais como a disposição das células de uma colmeia, o crescimento de uma planta ou mesmo as pétalas de uma flor. As abelhas constroem as suas colmeias com células hexagonais, maximizando o espaço com a menor quantidade de cera possível, refletindo um padrão matematicamente eficiente. O outro exemplo de padrões em processos naturais é as ondas. Desde as ondas sonoras até as ondas oceânicas e oscilações de luz. As ondas seguem padrões específicos de frequência, amplitude e propagação. Na Matemática, "a ciência dos

[1] Universidade Federal de Pernambuco • Recife, PE — Brasil • ✉ andrezass19@hotmail.com • ORCID https://orcid.org/0000-0001-9675-3557
[2] Universidade Federal de Pernambuco • Recife, PE — Brasil • ✉ rosinaldateles@yahoo.com.br • ORCID https://orcid.org/0000-0002-7289-3501

ISSN 2764-3158

padrões" (Devlin, 2002, p. 09), os padrões assumem uma relação pela qual de modo pessoal, o sujeito organiza e expressa por uma lei matemática um arranjo de qualquer natureza (Pimentel & Vale, 2012).

Esses padrões estão dispostos em sequências matemáticas que podem ser numéricas ou geométricas, descritas por uma lei. As sequências lineares são tipos específicos de sequências numéricas que seguem uma relação linear entre os seus termos. Essa relação implica que cada termo subsequente da sequência pode ser obtido adicionando (ou subtraindo) uma constante fixa ao termo anterior. As sequências matemáticas podem ser de ordem repetitiva ou recursiva. Na primeira, os termos da sequência se repetem seguindo um, único, padrão. Já na sequência recursiva, há uma relação de recorrência que permite estabelecer mudanças de um termo para o outro, em que o termo seguinte (a_{n+1}) possui dependência com o termo anterior (a_n), por exemplo, na sequência {1, 4, 7, 10, ...}, o segundo termo é composto pela adição do primeiro termo ao número três, e assim acontece para os demais termos, sucessivamente, sendo possível estabelecer a lei de recorrência para qualquer termo *a* de ordem *n:* $a_n = a_{n-1} + 3$, para $n \geq 2$ e $a_1 = 1$.

Do ponto de vista do ensino de Matemática, os dois tipos de sequências devem ser estudados desde os anos iniciais do ensino fundamental. A Base Nacional Comum Curricular – BNCC (Brasil, 2018), propõe para o 1º ano: "(EF01MA10) Descrever, após o reconhecimento e a explicitação de um padrão (ou regularidade), os elementos ausentes em sequências recursivas de números naturais, objetos ou figuras". (p. 278) ou ainda para o 2º ano: "(EF02MA10) Descrever um padrão (ou regularidade) de sequências repetitivas e de sequências recursivas, por meio de palavras, símbolos ou desenhos" (p. 282). Habilidades próximas a essas continuam a ser indicadas claramente ao longo dos anos do Ensino Fundamental, com exceção do 5º, 6º e 9º anos.

Embora o estudo de função seja amplamente difundido em pesquisas na área da Educação Matemática, ainda há muito a ser explorado, principalmente, no que tange a sua relação com outros conhecimentos matemáticos, antes da sua formalização. Oliveira (1997) argumenta que as dificuldades na aprendizagem desse conceito decorrem da falta de ênfase nas suas noções iniciais, as quais são fundamentais e podem ser abordadas através do trabalho que envolve o objeto de conhecimento matemático, sequência. A compreensão dessas sequências, na busca por padrões que se transformem em uma lei matemática que a descreva, possibilita estabelecer generalizações e propriedades específicas na relação entre os termos e a ordem em que estes se dispõem. Nesse sentido, é fundamental o desenvolvimento dessa habilidade ainda no ensino fundamental, para que, nos estudos subsequentes, o estudante consiga estabelecer relações entre variáveis dependentes e independentes no estudo da função afim, possibilitando a descrição e a generalização de sua lei de formação.

Uma sequência pode ser definida como uma função cujo domínio é o conjunto $\mathbb{N}$ dos números naturais. Usando a notação $(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n, \dots)$ para definir a sequência, isto é, $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Dessa forma, temos uma função onde cada número natural *n* corresponde a um número real a_n (Lima, Carvalho, Wagner & Morgado, 2006).

Desta definição, podemos concluir que a sequência é uma especificidade de função a qual o domínio está restrito ao conjunto dos números naturais. O que destoa da abrangência da função afim, já que o seu domínio consiste no conjunto dos números reais, conforme a definição de Lima, Carvalho, Wagner e Morgado (2006, p. 87): "Uma função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ chama-se afim quando existem constantes a e $b \in \mathbb{R}$ tais que $f(x) = ax + b$ para todo $x \in \mathbb{R}$".

As sequências recursivas lineares podem ter diferentes ordens. Essa ordem é determinada em função de quantos termos anteriores são necessários para determinar o termo geral. Isto é, nas sequências recursivas lineares de primeira ordem o termo geral depende exclusivamente de um único termo, o anterior, como é o caso de uma Progressão Aritmética (PA), em que se adiciona ou subtrai um mesmo valor a partir do termo anterior. Já na sequência recursiva linear de segunda ordem, cada termo é escrito em função dos dois termos antecessores, a partir do terceiro termo. Um caso bem conhecido desse tipo de sequência é a sequência de Fibonacci, cujos termos são: {1, 1, 2, 3, 5, ...} em que o 3º termo é o resultado da adição dos dois termos anteriores: 1 + 1 = 2; O 4º termo é o resultado da adição do segundo termo com o terceiro. Ou seja, 1 + 2 = 3, e assim sucessivamente.

Por conseguinte, a sequência recursiva linear de primeira ordem, pode ser descrita a partir da representação: $x_{n+1} = a_n x_n + b_n$ em que a_n e b_n correspondem a sequências pré-determinadas, isto é, são valores numéricos que estão relacionados a generalização dos termos da sequência, a sequência recursiva linear de segunda ordem, pode ser definida usando a representação: $x_{n+2} = a_n x_{n+1} + b_n x_n + c_n$, (Wasques, Esmi & Barros, 2020). Sendo assim, esse tipo de sequência teria dois termos dependentes e um independente.

De acordo com Castro (2016), podemos ter outras ordens de sequências lineares, como a terceira e quarta, aos quais os termos gerais estão em função de três termos ou quatro termos antecessores, respectivamente. Além disso, existem as sequências recursivas não lineares, nas quais o expoente dos termos anteriores ao termo geral é diferente de 1, como por exemplo, $x_{n+1} = (x_n)^2$.

Nessa pesquisa, restringimos o estudo às sequências recursivas por recorrência linear de primeira ordem. Tendo em vista que, como já explicitado acima, uma recorrência é chamada linear por poder ser associada à função polinomial do primeiro grau, e de primeira ordem, pela recorrência estabelecida para o termo seguinte depender do termo imediatamente anterior. O nosso interesse dá-se pelo fato de buscarmos relacionar a generalização das sequências recursivas lineares com as propriedades da função afim.

As sequências recursivas lineares de primeira ordem podem ser homogêneas ou não homogêneas. Elas são homogêneas quando não possuem termos independentes de a_n, ou seja, na descrição da lei de recorrência, não existe nenhum termo que adiciona ou subtrai o termo a_n, como o exemplo: $a_{n+1} = 2a_n$. Já as não homogêneas são as que possuem termo independente, como é o caso da sequência $a_{n+1} = 2a_n - 3$.

Com essas propriedades identificamos a relação das sequências recursivas lineares de primeira ordem homogêneas com o caso particular da função afim – a função linear $f(x) = ax$, e das sequências recursivas lineares de primeira ordem não homogêneas com a função afim representada por $f(x) = ax + b$.

Assim, a partir das leis de recorrência das sequências recursivas lineares de primeira ordem podemos descrever uma lei de formação que contempla o termo geral da sequência que não necessite conhecer o termo anterior, podendo generalizar a qualquer termo. O que permite descrevê-la como uma função afim ou o seu caso particular, a função linear.

Várias pesquisas fazem alusão à relação de sequências recursivas lineares aplicadas a conteúdos matemáticos trabalhados no ensino médio, como combinatória, probabilidade, matemática financeira (Silva, 2015; Castro, 2016; Carvalho, 2019; Cruz, 2021), assim como suas aplicações em progressões aritméticas e geométricas (Oliveira & Freire, 2024). Este último, voltado a problemas encontrados nos livros didáticos do ensino médio.

Mas, embora esses estudos apontem que existe correlação entre a função, maneira pela qual as sequências são definidas, não são evidenciadas, explicitamente, as suas relações com a função afim. Além disso, os conteúdos abordados estão voltados a apresentação das definições matemáticas formais, que não são contempladas no ensino fundamental, mas que podem sim relacionar-se com a formalização do conceito de função afim de maneira preliminar, quando trabalhamos com situações de generalização de sequências recursivas lineares de primeira ordem.

Portanto, tendo em vista que o estudo das sequências recursivas lineares é essencial para o desenvolvimento da capacidade de reconhecer e generalizar padrões numéricos, contribuindo para construção de uma base sólida para compreender conceitos mais avançados, como funções lineares, também dada a importância de olhar para esse objeto no livro didático e respectivo manual do professor, formulamos a seguinte questão de pesquisa para esse artigo: Como se relacionam as situações de generalização em sequências recursivas lineares de primeira ordem com as propriedades da função afim, presentes em livros didáticos do ensino fundamental?

Por conseguinte, esse artigo, recorte de uma pesquisa de doutorado em construção, desenvolvida pela primeira autora, orientada pela segunda, objetiva correlacionar situações de generalização de padrão em sequências recursivas lineares de primeira ordem com a função afim, em livros didáticos do ensino fundamental.

Com a finalidade de categorizar situações de generalização do padrão de sequências recursivas lineares de primeira ordem em livros didáticos de matemática, o estudo adota como referencial teórico as Teorias dos Campos Conceituais (TCC) e do Registro de Representações Semióticas (TRRS). As contribuições de cada uma das teorias para o estudo serão detalhadas na seção seguinte.

2 A Teoria dos Campos Conceituais e a Teoria dos Registros de Representações Semióticas: contribuições para a categorização das situações de generalização de padrões nas sequências recursivas

A teoria cognitivista dos Campos Conceituais, proposta pelo francês Gerárd Vergnaud na década dos anos 80, tem como foco o desenvolvimento cognitivo dos conceitos com base em situações diversas e que acontecem progressivamente (Vergnaud, 1990). Ele defende que um conceito não se aprende em um único momento, mas sim progressivamente, ampliando o conhecimento até então adquirido sobre esse conceito. São elementos importantes para essa teoria: campo conceitual, esquemas, situações, conceito, invariantes operatórios e representações.

Para Vergnaud (1983, 1988, 1990), um Campo Conceitual é o conjunto de situações que necessitam de conceitos, procedimentos e representações, diferentes, mas, estritamente interligados. Além disso, esse conjunto de situações demanda o domínio de variados conceitos de distintas naturezas.

Moreira (2002) destaca que Vergnaud (1983a) apresenta três argumentos fundamentais para a formulação de um campo conceitual:

> 1) um conceito não se forma dentro de um só tipo de situações; 2) uma situação não se analisa com um só conceito; 3) a construção e apropriação de todas as propriedades de um conceito ou todos os aspectos de uma situação é um processo de muito fôlego que se estende ao longo dos anos, às vezes uma dezena de anos, com analogias e mal-entendidos entre situações, entre concepções, entre procedimentos, entre significantes (Moreira, 2002, p. 9).

Tomando por base esses três argumentos, destacamos que o conceito de função afim para ser aprendido necessita de variadas situações e de naturezas distintas, que podem inclusive ser situações de generalização de padrões em sequências recursivas lineares de primeira ordem. A partir dessas situações, é possível explorar outros conceitos, como a correspondência entre grandezas, adição e multiplicação. Como mencionado anteriormente neste texto, um conceito não é construído rapidamente; isso pode levar anos. Portanto, a abordagem de sequências recursivas desde os primeiros anos do ensino fundamental, favorece a construção do conceito de função afim, ao longo da escolaridade básica, mesmo antes da sua formalização no 9º ano.

Vergnaud (1990) apresenta duas ideias quando se refere às situações: a de variedade e a de história. A primeira enfatiza a importância de diferentes situações para a construção de um campo conceitual, já a história leva em consideração as experiências enfrentadas pelos estudantes, o enfrentamento de situações que conferiram novos sentidos a conceitos que até então não tinham, ou que se modificaram os sentidos, seja ampliando ou alterando.

Vergnaud (1990) define conceito por meio de um tripé (S, I, R), em que: S representa o conjunto de situações que geram sentido ao conceito, I representa o conjunto de invariantes pelo qual um conceito é operado, isto é, podem ser propriedades ou relações ao qual o sujeito organiza sua atividade para resolver as situações e R retrata o conjunto de representações simbólicas que exprimem os invariantes e esquemas mobilizados.

As situações são responsáveis por conferir sentido aos conceitos, sendo que esse sentido surge da interação do sujeito tanto com a situação quanto com os significados envolvidos (Moreira, 2002). Os invariantes operatórios são os “teoremas em ação” e os “conceitos em ação”, sendo o primeiro “uma proposição que é considerada verdade” e o segundo “um objeto, um predicado, ou uma categoria que é considerada relevante” (Vergnaud, 1998, p. 168).

As representações para Vergnaud (1985) podem assumir posições distintas, no tripé, ela assume o papel de representações simbólicas que tem a função de comunicar a organização da atividade. Mas, a representação na TCC também assume o papel de organizadora da ação, ou seja, ela passa, também, a fazer parte das estruturas cognitivas que não são sempre expressas simbolicamente.

A TCC, nesta pesquisa, possibilita a organização e categorização de situações referentes a sequências recursivas lineares, de tal forma que seja possível correlacionar os seus invariantes[3] com os de função afim, no momento em que buscamos generalizar o padrão descrito na sequência, primeiramente por uma lei de recorrência, e após, por intermédio da lei de formação ou do termo geral, conforme descrito no Quadro 1. A TCC, portanto, foi o suporte teórico para selecionarmos os invariantes que se relacionam em situações de generalização do padrão nas sequências recursivas lineares de primeira ordem: homogênea ou não homogênea, tendo em vista que esses invariantes se relacionam respectivamente com a função linear e com a função afim. Sejam essas situações expostas na representação numérica ou geométrica.

Quadro 1: Correlação entre invariantes da função afim e das sequências recursivas lineares no processo de generalização do padrão

	Sequências Recursivas Lineares de primeira ordem	**Função Afim**

[3] Usaremos o termo invariantes como sinônimo para as propriedades matemáticas apresentadas nas sequências recursivas lineares e para a função afim. E não se confunde aos invariantes operatórios já explicitados no artigo.

ISSN 2764-3158

Geométrica ou Numérica	Lei de recorrência - Homogênea (sem termo independente)	Caso particular – Função linear ($f(x) = ax$)
	Lei de recorrência - Não homogênea (Com termo independente)	Função afim ($f(x) = ax + b$)

Fonte: As autoras.

Com base na correlação apresentada no Quadro 1, a Teoria dos Registros de Representações Semióticas foi o referencial utilizado para identificar transformações que acontecem na apresentação das situações com sequências, sejam elas numéricas ou geométricas, da lei de recorrência para a lei de formação da função afim. Dessa forma, destacamos elementos da TRRS, com a finalidade de apresentar as transformações entre as representações expostas nas situações e as que são esperadas de acordo com as resoluções presentes no manual do professor dos livros didáticos analisados.

A TRRS também considerada como uma teoria cognitivista foi desenvolvida pelo francês Raymond Duval. Os seus elementos compõem a atividade do sujeito frente às representações. São eles: atividades cognitivas – formação de uma representação identificável, tratamento e conversão; atividades ligadas à conversão – heterogeneidade nos dois sentidos e variação de congruência semântica. Estas duas últimas, por não fazer parte de nossa análise nessa pesquisa, não serão abordadas.

Em relação às atividades cognitivas, quando mencionamos a formação de uma representação identificável compreende-se que está ligada a produção de representações semióticas dentro de um sistema semiótico com as mesmas regras, ou seja, se utilizo uma representação algébrica de um objeto, ela possui regras de manipulação dos signos diferentes da representação do mesmo objeto no registro gráfico.

O tratamento e a conversão são transformações que acontecem na representação de um objeto em um dado sistema e de um sistema para outro, respectivamente. Ou seja, a diferença de uma para outra é que, no tratamento, a transformação da representação do objeto ocorre no mesmo registro de representação; já na conversão, a transformação na representação do objeto acontece em registros diferentes, o de partida e o de chegada (Duval, 2009).

Para exemplificar, podemos afirmar que a transformação entre a lei de recorrência de uma sequência recursiva linear para a lei de formação de uma função afim é caracterizada pela transformação de tratamento, pois, mesmo modificando a escrita devido a especificidade de cada conteúdo, continuamos dentro do mesmo sistema de representação, o registro algébrico. Já, na transformação que acontece na generalização do padrão de uma sequência recursiva geométrica para sua lei de recorrência, é chamada de conversão, pois ao modificarmos as representações para uma mesma sequência, estamos em dois registros de representações diferentes: o de partida no registro figural (geométrico) e o de chegada, no registro algébrico.

Dentre as representações que poderemos encontrar nas situações de generalização de padrões em sequências recursivas lineares de primeira ordem, no ensino fundamental, temos: linguagem natural (RLN), numérica (RN), algébrica (RA) e figural (RF).

Esse olhar analítico pautado na TRRS, além de assegurar as transformações de representações que ocorrem nas situações com o objeto matemático, sequências recursivas lineares de primeira ordem, auxilia no cumprimento do nosso objetivo de correlacionar situações de generalização de padrão em sequências recursivas lineares de primeira ordem com a função afim, em livros didáticos do ensino fundamental, já que partimos do pressuposto que as situações são compostas por representações, e que assim como a variabilidade de situações para Vergnaud é o que permite a compreensão do conceito, para Duval é a variabilidade de representações que permitem a apreensão do objeto matemático, aqui, os dois objetos que buscamos correlacionar. Por isso, descrevemos a seguir o percurso metodológico adotado para desenvolver essa análise.

3 O método: da apresentação dos livros às categorias de análise

Nesse estudo usamos a análise de conteúdo (Bardin, 2016) para sistematizar, organizar, categorizar e interpretar as situações por abordagem qualitativa e quantitativa, por meio da técnica categorial, que nos permite operar com os dados desmembrando-os em unidades, categorias com reagrupamentos semelhantes. Três operações básicas que compõem o método de análise de conteúdo de Bardin (2016): 1) Pré – análise (escolha dos livros a partir dos guias de livro didáticos do plano nacional do livro didático, assim como uma leitura transversal e diagonal dos materiais para coleta dos dados, conforme o objetivo); 2) Exploração do material (Seleção dos dados, recorte das situações que contemplam os termos referenciados: sequência e generalização, no âmbito recursivo linear); e 3) Tratamento dos resultados obtidos e interpretação para subsidiar e organizar a nossa análise (pautado na construção das categorias usando a TCC e a TRRS).

Foram selecionadas, para compor o corpus de análise, duas coleções aprovadas pelo plano nacional do livro didático (PNLD) nos anos de 2019 – anos iniciais e 2020 – anos finais do ensino fundamental que possuíam mesmo autor e publicadas pela mesma editora. Consideramos que mesmo sendo coleções distintas, o fato de terem o mesmo autor e serem produzidas pela mesma editora verberam na mesma perspectiva, ao olharmos para as situações que contemplaremos nas análises. As coleções são da editora Ática e de autoria do Luiz Roberto Dante: Anos iniciais do ensino fundamental: Coleção Ápis – Matemática (PNLD – 2019); e Anos finais do ensino fundamental: Coleção Teláris – Matemática (PNLD – 2020);

Buscando mapear todas as situações de sequências recursivas lineares presentes nos nove livros didáticos, foram realizadas buscas ao longo de todos os capítulos, uma vez que, especialmente nos anos iniciais, esses tipos de situações estão conectados com outros conteúdos da matemática.

Em relação à estrutura dos capítulos e quantitativo de páginas, na Coleção Ápis – anos iniciais, cada um dos cinco volumes é composto por 8 capítulos, com cerca de 240 páginas cada um. Enquanto na coleção Teláris – anos finais, cada um dos quatro volumes contém em média 9 capítulos, com cerca de 300 páginas cada volume.

Foram analisadas as versões dos livros destinados ao professor, ou seja, contendo orientações e informações específicas para a utilização do recurso didático. Os materiais complementares estão nas próprias páginas, com o material do estudante em versão miniatura, embora existam outras indicações e suplementos ao professor numa parte separada no início do livro. De maneira geral os livros compõem tópicos, por capítulo, que estão voltados a uma abertura com situações cotidianas para explorar o conteúdo, atividades sejam elas, resolvidas, problemas a resolver ou atividades de exploração e investigação, curiosidades, resumo com definições estudadas no capítulo com atividades de revisão, e no caso dos anos finais ainda tem atividades retiradas de testes oficiais, como olimpíadas, ENEM, e outras.

A busca realizada nos livros didáticos foi separada por questões e itens. Há questões com mais de um item e, que em alguns casos, correspondiam a objetivos diferentes em relação ao que era solicitado. Nessa consulta geral, inicialmente, percebemos que os objetivos dos itens dos livros didáticos dos anos iniciais não buscavam uma generalização para

ISSN 2764-3158

qualquer termo ou um termo geral. O que questionavam era a regularidade presente em sequências, a partir dos primeiros termos conhecidos a fim de continuar para os primeiros próximos termos. Nesse caso, apenas operações de adição ou subtração que eram usadas, como adicionar um a um ou subtrair um a um para dar uma sequência crescente ou decrescente de números.

O que caracteriza em um pensamento aritmético e não algébrico, isto é, um raciocínio indutivo, já que não se busca um termo geral nas situações. Conforme explicita Pimentel e Vale (2012), a generalização envolve dois tipos de pensamentos: o raciocínio indutivo e o raciocínio dedutivo. O indutivo "parte da observação de dados, sobre os quais formula hipóteses explicativas, e, com base na experimentação em vários outros casos, generaliza a conclusão a um conjunto mais vasto. O segundo surge da necessidade de verificar a validade dessa generalização" (p. 38). Sendo assim, subtende-se que no raciocínio indutivo está a capacidade de descobrir o padrão, a partir de hipóteses conhecendo alguns termos da sequência, mas só chega a validar a generalização quando se busca qualquer termo geral, ou seja, no raciocínio dedutivo. Embora não foram apresentadas situações de generalização nessa coleção, consideramos que mesmo nessa etapa escolar é possível situações de generalização que trabalham a favor do desenvolvimento dos dois raciocínios, sem usar simbolismo algébrico.

A análise dos livros didáticos dos anos finais do ensino fundamental, indicou que as questões objetivavam uma generalização, seja para um termo distante dos que eram apresentados, ou mesmo uma lei matemática que regesse aquela sequência. Sendo essa lei matemática por recorrência ou por termo geral, que se relacionam em recorrência homogênea (função afim) ou recorrência não homogênea (função linear). Foram mapeados 23 itens que contemplavam a situação de generalização de sequências recursivas lineares, seja pelo termo geral ou pela lei de recorrência, conforme disposição no Tabela 1.

Tabela 1: Disposição da quantidade dos itens analisados na coleção Teláris

6º ano	7º ano	8º ano	9º ano	Total
5	9	7	2	23

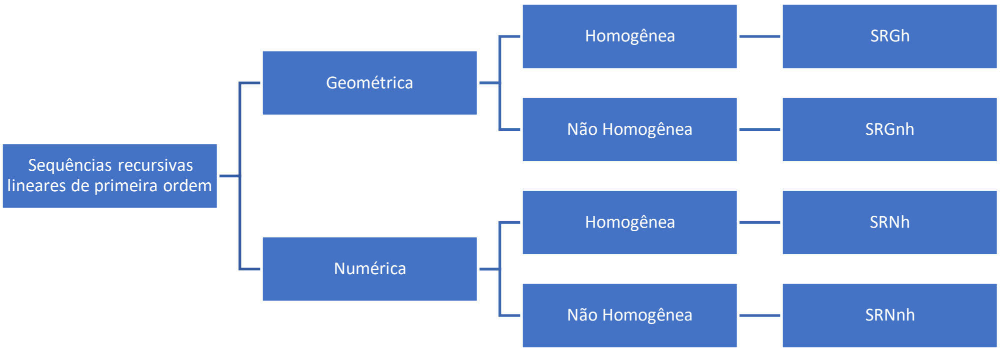
Fonte: Dados da pesquisa.

As maiorias das questões estão presentes no 7º e 8º anos devido ao estudo das sequências recursivas, conforme orientação da BNCC (Brasil, 2018), como no 9º ano não existem habilidades específicas para o trabalho com sequências o quantitativo de itens é consideravelmente inferior.

Para subsidiar as análises posteriores, abordaremos os critérios elaborados a partir das propriedades relacionadas às sequências recursivas lineares de primeira ordem com a função afim, aos quais chamaremos de invariantes (quadro 1). Correlacionando com as transformações ocorridas nas representações de partida e de chegada, conforme a TRRS. Consideramos quatro subclasses de situações vinculadas a classe de generalização de padrão em sequências recursivas lineares de primeira ordem, com base na representação de partida e forma algébrica da representação de chegada (Figura 1).

Figura 1: Subclasses da situação sequências recursivas lineares de primeira ordem

ISSN 2764-3158



Fonte: Elaborado pelas autoras.

Em cada uma dessas quatro subclasses é possível generalizar as sequências recursivas lineares usando o registro de representação algébrica no formato de termo geral ou de fórmula de recorrência das sequências. Por isso, usaremos essas subclasses como categorias de análise para agrupamento dos 23 itens, conforme consta na seção de discussão e análise.

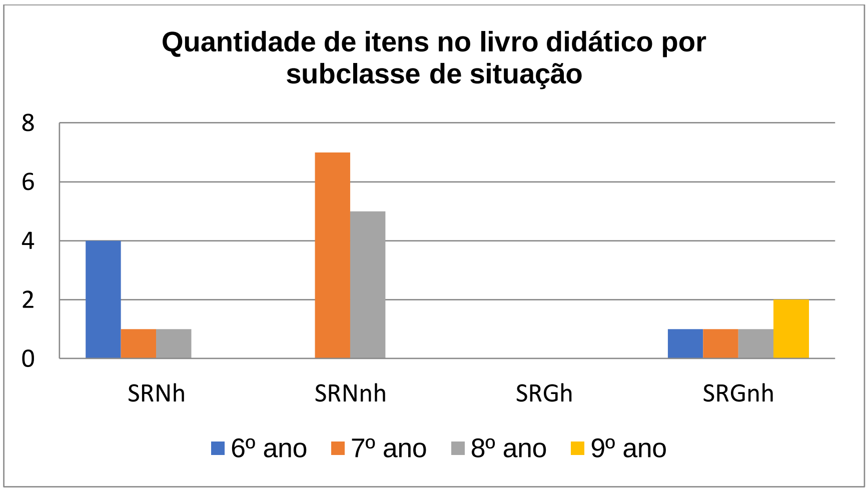
4 Discussão e análise

As quatro situações estabelecidas para análise são: 1) Sequências recursivas numéricas homogêneas (SRNh); 2) Sequências recursivas numéricas não homogêneas (SRNnh); 3) Sequências recursivas geométricas homogêneas (SRGh); e 4) Sequências recursivas geométricas não homogêneas (SRGnh).

Em cada uma dessas situações analisaremos as representações compostas nas resoluções do manual do professor para definir se a generalização esperada deve acontecer por fórmula de recorrência ou termo geral, assim como se a transformação na representação abordada configura-se como tratamento ou conversão, e quais os sentidos das conversões.

No Gráfico 1 apresenta-se o quantitativo de itens para cada um dos quatro tipos de situações estabelecidas em cada ano final do ensino fundamental por livro didático.

Gráfico 1: Itens dispostos no livro didático por tipos de situações estabelecidas



Fonte: Dados da pesquisa.

Pela disposição dos dados, podemos perceber que a subclasse de situação SRGnh foi a que manteve continuidade de apresentação de itens ao longo dos quatros anos finais do ensino fundamental, a subclasse de situação com a maior quantidade de itens é SRNnh e a que não a apresenta nenhum item é a SRGh. Além disso, a quantidade de itens envolvendo sequências numéricas é consideravelmente maior do que em sequências geométricas recursivas, o que nos possibilita inferir que o livro não busca articular visivelmente álgebra e geometria, e quando assim o faz, generaliza fórmulas de soma ou diagonais de polígonos, usando uma sequência geométrica, que nos casos abordados determinam uma recorrência não homogênea, isto é, com a presença de termo independente. Isso compromete a relação entre as sequências recursivas geométricas lineares com o caso particular da função linear – a função afim -, já que não é abordada nenhuma situação na coleção.

Destacamos que as sequências recursivas lineares de primeira ordem mais requisitadas para generalização dos itens são as não homogêneas, ou seja, aquelas em que existe a presença do termo independente. Logo, se relaciona com a lei de formação da função linear, em que temos a presença dos coeficientes angular e linear.

Destacamos que, a partir da análise com o olhar da TRRS, todos os itens são conversões. Os sentidos de conversão entre as representações partem dos registros: Linguagem natural para Algébrico (RLN → RA); Numérico para Algébrico (RN → RA); Figural para Algébrico (RF → RA); e Figural para Numérico (RF → RN).

É importante destacar que alguns itens utilizam a representação tabular como auxiliar na passagem de uma representação a outra, exclusivamente nos sentidos RN → RA e RF → RA. Assim, estão dispostas as conversões com base nos tipos de situações estabelecidas na Tabela 2.

Tabela 2: Sentidos de conversões por tipos de situações estabelecidas

Sentido de conversão	**Situações**			
	SRNh	**SRNnh**	**SRGh**	**SRGnh**
RLN → RA	4	-	-	-
RN → RA	2	12	-	-
RF → RA	-	-	-	4
RF → RN	-	-	-	1

Fonte: Dados da pesquisa.

A conversão no sentido RN → RA é a que mais aparece nos itens, o que já era esperado levando em consideração que as maiores quantidades de itens são as sequências recursivas numéricas. Os itens que contemplam a conversão no sentido RLN → RA estão presentes no livro didático do sexto ano, e solicita a generalização por meio da fórmula geral para a sequência de alguns múltiplos, considerando que os termos da sequência aumentam de acordo com a multiplicação por um número natural qualquer. Portanto, a lei de formação não possui termo independente, como mostra a Figura 2.

Figura 2: Excerto de SRNh – 6º ano: Coleção Teláris

8 **Generalizações.** Os múltiplos de 5 são obtidos fazendo:

$$\underbrace{5 \cdot 0}_{0}, \underbrace{5 \cdot 1}_{5}, \underbrace{5 \cdot 2}_{10}, \underbrace{5 \cdot 3}_{15}$$

e assim por diante.

Se n representa um número natural qualquer (0, 1, 2, 3, 4, 5, ...), então podemos indicar os múltiplos de 5 por **5 · *n***. Essa é uma **generalização** ou uma **forma geral** de indicar os múltiplos de 5.

Escreva no caderno como podemos indicar a generalização:

a) dos múltiplos de 6; $6 \cdot n$

b) dos múltiplos de 8; $8 \cdot n$

c) dos múltiplos de 11; $11 \cdot n$

d) dos múltiplos de 15. $15 \cdot n$

ISSN 2764-3158

Fonte: Dante (2018, p. 97).

Já a conversão no sentido RF → RN contempla um item em que é solicitado um termo qualquer da sequência recursiva figural, ou seja, a resposta solicitada na questão é de caráter numérico, no entanto, para chegar mais rápido a generalização para este determinado termo usa-se como representação auxiliar a representação algébrica que determina o termo geral da sequência iniciada.

Nos próximos excertos contemplaremos os tipos de situações correlacionadas aos sentidos de conversão RN → RA e RF → RA apresentados na Tabela 2. Na Figura 3, apresenta-se um excerto para o tipo de situação SRNh, em que o item corresponde a uma sequência recursiva numérica homogênea no sentido RN → RA com a representação tabular como auxiliar.

Figura 3: Excerto de SRNh – 7º ano: Coleção Teláris

31 Copie e complete as tabelas no caderno, relacionando cada sequência numérica à sequência dos números naturais não nulos.

a) **Sequências**

Número natural não nulo	1	2	3	4	...	n	...
Quíntuplo do número	5	10	15	20	...	$5n$	...

Fonte: Dante (2018, p. 104).

Nesse caso, como a sequência numérica aumenta de cinco em cinco unidades, ela não possui termo independente, sendo necessária apenas a multiplicação da ordem do termo que se deseja por cinco. A generalização aparece como termo geral da sequência, e podemos descrever como uma função afim (caso particular da função linear) $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ cuja lei de formação é $f(n) = 5n$, com $n \in \mathbb{N}^*$ e 5 como coeficiente angular.

O excerto da Figura 4 compõe uma questão com quatro itens, em que é solicitada a generalização das sequências numéricas tanto na fórmula de recorrência como pelo termo geral, mas em todos os itens as situações são do tipo não homogênea (SRNnh) e no sentido de conversão RN → RA.

Figura 4: Excerto de SRNnh – 7º ano: Coleção Teláris

5 Veja os exemplos de sequências numéricas e fórmulas.

- 0, 6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, ...

Fórmula do termo geral: $a_n = 6(n - 1)$ para $n = 1, 2, 3, \ldots$

- 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, ...

Fórmula de recursividade: $a_1 = 1$ e $a_n = a_{n-1} + 2$, para $n = 2, 3, 4 \ldots$

Descubra uma regularidade em cada sequência dada a seguir e, no caderno, escreva uma fórmula do termo geral (itens **a** e **b**) ou uma fórmula de recorrência (itens **c** e **d**). Depois, calcule os próximos 2 termos da sequência.

Exemplos de fórmulas:

a) 0, 5, 10, 15, 20, 25, ▇, ▇, ...
$a_n = 5(n - 1)$; 30, 35.

b) 1, 6, 11, 16, 21, 26, ▇, ▇, ...
$a_n = 5(n - 1) + 1$; 31, 36.

c) 2, 7, 12, 17, 22, 27, ▇, ▇, ...
$a_1 = 2$ e $a_n = a_{n-1} + 5$; 32, 37.

d) 1, 5, 9, 13, 17, 21, ▇, ▇, ...
$a_1 = 1$ e $a_n = a_{n-1} + 4$; 25, 29.

Fonte: Dante (2018, p. 128).

Os dois primeiros itens (a, b) devem ser resolvidos algebricamente com o termo geral, se desenvolvermos teremos:

ISSN 2764-3158

- Item a: $a_n = 5n - 5$, ou seja, temos que o termo independente o -5, que se justifica pelo valor do primeiro elemento da sequência, o zero. Poderíamos descrever como uma função linear $f: \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ cuja lei de formação é $f(n) = 5n - 5$, com $n \in \mathbb{N}^*$, 5 como coeficiente angular e -5 como coeficiente linear.
- Item b: $a_n = 5n - 4$. Como o primeiro termo da sequência é 1, então o termo independente na fórmula geral é -4. A função correspondente a esse termo geral é: $f(n) = 5n - 4$, com $n \in \mathbb{N}^*$, 5 como coeficiente angular e -4 como coeficiente linear.

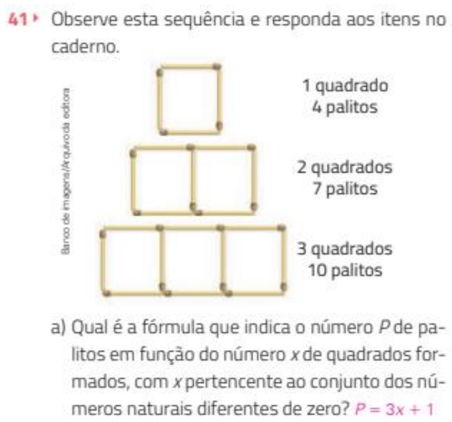
Essas transformações de termo geral da sequência para a lei de formação da função, com base na TRRS, são denominadas de tratamento, já que continuamos no mesmo registro de representação algébrica, alterando apenas a representação variável para cada conteúdo.

Já os itens c e d apresentam como generalização para as sequências numéricas a fórmula de recorrência, que relaciona um termo ao seu anterior. Ao utilizarmos a TRRS para transformar a fórmula de recorrência na lei de formação de uma função linear, o custo cognitivo para essa passagem não é o mesmo que dos itens anteriores, como veremos.

- Item c: $a_n = a_{n-1} + 5$. Utilizando essa fórmula, para descobrirmos o enésimo termo, teríamos que saber o seu anterior, o que teria um custo maior de busca, caso o enésimo termo fosse o centésimo, por exemplo. Dessa forma, temos que realizar o tratamento para o termo geral, sabendo que a sequência cresce em cinco unidades cada termo e que o primeiro termo é igual a dois ($a_1 = 2$), então multiplicamos a variação de crescimento por n, e depois subtraímos a variação de crescimento por dois, logo, chegaríamos ao termo geral: $a_n = 5n - 3$. A função afim correspondente é, então, representada por $f(n) = 5n - 3$.
- Item d: $a_n = a_{n-1} + 4$. A sequência cresce em quatro unidades a cada termo, e inicia pelo termo 1. Dessa forma, seguindo a mesma orientação ao item anterior temos o termo geral: $a_n = 4n - 3$. A função afim correspondente é representada por $f(n) = 4n - 3$.

O excerto da figura 5 apresenta um item cuja situação é do tipo SRGnh e o sentido de conversão é RF → RA; isto é, apresenta uma sequência recursiva com padrão geométrico, que pode ser lido como uma sequência numérica que relaciona cada termo figural da sequência à quantidade de palitos que formam o termo. Dessa maneira, utiliza como representação auxiliar a representação numérica.

Figura 5: Excerto de SRGnh – 9º ano: Coleção Teláris



Fonte: Dante (2018, p. 131).

A generalização neste item se deu pelo termo geral da sequência, que contempla o crescimento de três unidades de palitos em cada figura, como a primeira figura contém quatro palitos adiciona-se um como termo independente. Dessa forma, a relação figura (variável dependente) a quantidade de palitos (variável independente) pode ser descrita como uma função linear $f(x) = 3x + 1$, cujo domínio pertence ao conjunto dos números naturais, e a imagem é um subconjunto dos números naturais.

Ao relacionarmos a generalização das sequências recursivas lineares, seja pelo termo geral ou pela fórmula de recorrência, com a lei de formação da função linear, compreendemos que, à medida que situações como essas venham a ser trabalhadas ao longo da escolaridade e antes da formalização da função afim, pode-se estabelecer a compreensão progressiva da relação entre duas variáveis como uma função. Após a formalização da função afim, é possível compreender que sequências recursivas e funções são dois objetos de conhecimento matemáticos diferentes, que se relacionam e se distanciam ao analisar os seus invariantes próprios. Além disso, embora algumas sequências sejam casos particulares de função com domínio no conjunto numérico natural, nem todas as sequências podem ser consideradas funções. Assim como nem toda função pode ser descrita como uma sequência de valores, que seriam classificadas como imagem.

Vale salientar que, nos 23 itens analisados, todas as sequências recursivas lineares são crescentes, o que pode impactar tanto no estudo de sequências quanto nos casos das funções lineares decrescentes, em que o coeficiente angular é negativo.

5 Considerações finais

Para correlacionar situações de generalização de padrão em sequências recursivas lineares de primeira ordem com a função afim, em livros didáticos do ensino fundamental, observamos que, embora nos anos iniciais não haja uma utilização explícita de simbolismo algébrico, as atividades na coleção analisada não contemplaram a generalização para encontrar termos além dos primeiros apresentados nas sequências, isto é, bastava adicionar ou subtrair a partir dos primeiros termos para completar a sequência, sem a necessidade de generalizar para um termo geral.

No total foram encontrados 23 itens nos livros didáticos dos anos finais do ensino fundamental, cuja generalização estava baseada na fórmula de recorrência de sequências recursivas lineares ou mesmo a partir do termo geral. Considerando os invariantes para as sequências recursivas lineares de primeira ordem, em que há presença de termo independente (não homogênea) ou não (homogênea) quando dispomos a lei matemática que rege a sequência e a representação pela qual a sequência é apresentada, seja ela numérica ou geométrica, foram classificados quatro tipos de situações para generalização de sequências recursivas lineares: Sequências recursivas numéricas homogêneas (SRNh); Sequências recursivas numéricas não homogêneas (SRNnh); Sequências recursivas geométricas homogêneas (SRGh); e Sequências recursivas geométricas não homogêneas (SRGnh).

As sequências recursivas homogêneas, ao serem generalizadas podem ser relacionadas ao caso particular da função linear, a função afim. Já as que não são homogêneas se relacionam com a própria função linear, pois há presença do termo independente. Destacamos que o tipo de situação com maior quantidade de itens é SRNnh, a que não a apresenta nenhum item é a SRGh e a que mantém continuidade de apresentação de itens ao longo dos quatros anos finais do ensino fundamental foi SRGnh. Todos os itens analisados são sequências recursivas lineares crescentes.

Todos os itens são classificados como uma transformação de conversão, tendo em vista que a representação do objeto matemático no registro de partida corresponde a representação em outro registro de chegada. O sentido de conversão com maior quantidade de itens foi o RN → RA com um total de 14 itens em 23, o que já era esperado, pois o tipo de situação com predominância foi a SRNnh.

Concluímos, portanto, que a apresentação das situações de generalização em sequências recursivas lineares nas coleções de livros didáticos analisados, indica potencial para a compreensão da relação entre as variáveis dependente e independente na função afim, no momento de sua formalização. Embora, deixa a desejar quanto ao trabalho com as sequências recursivas lineares geométricas e na construção da generalização dessas sequências nos anos iniciais do ensino fundamental.

Estendemos a necessidade da abordagem dessas situações considerando as sequências recursivas lineares decrescentes que podem colaborar para a análise do coeficiente angular da função linear, algo que não pudemos constatar nas atividades analisadas dos livros didáticos.

Inferimos que esta pesquisa pode contribuir para o trabalho docente, considerando o material utilizado em sala de aula e a análise das situações presentes nele. Isso inclui relacionar aspectos essenciais para facilitar a compreensão progressiva dos estudantes, abrangendo diferentes invariantes e representações para os conteúdos. Além disso, há a oportunidade de explorar diversas situações de sequências recursivas lineares com base nessa análise, adaptando-as diretamente para o trabalho com os estudantes.

Referências

Brasil. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. (2018). *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília, DF.

Carvalho, M. D. L. de. (2019). *Estudo de sequências recursivas aplicadas ao Ensino Médio* (Dissertação de mestrado). Universidade Estadual do Piauí – UESPI, Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT, Teresina – PI.

Castro, F. J. de. (2016). *Matemática discreta: tópicos de recorrências lineares e suas aplicações* (Dissertação de mestrado). Universidade Estadual da Paraíba – CCEN-UEPB, João Pessoa – PB.

Cruz, S. S. L. (2021). *Equações de recorrência e aplicações: combinatória, probabilidade, teoria dos números, matemática financeira* (Dissertação de mestrado). Universidade Federal do Rio Grande do Norte, Programa de Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional PROFMAT, Natal – RN.

Dante, L. R. (2018). *Teláris Matemática, 6º ano: anos finais do ensino fundamental* (3ª ed.). São Paulo: Ática.

Dante, L. R. (2018). *Teláris Matemática, 7º ano: anos finais do ensino fundamental* (3ª ed.). São Paulo: Ática.

Dante, L. R. (2018). *Teláris Matemática, 9º ano: anos finais do ensino fundamental* (3ª ed.). São Paulo: Ática.

Devlin, K. (2002). *Matemática: a ciência dos padrões*. Porto: Porto Editora.

Duval, R. (2009). *Semiósis e pensamento humano* (L. A. Farias & M. R. A. da Silveira, Trad., 1ª ed.). São Paulo: Livraria da Física.

Lima, E. L., Carvalho, P. C. P., Wagner, E., & Morgado, A. C. (2006). *Matemática no*

ISSN 2764-3158

Ensino Médio (v. 1). Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Educação Matemática.

Moreira, M. A. (2002). A teoria dos campos conceituais de Vergnaud, o ensino de Ciências e a pesquisa nesta área. *Investigações em Ensino de Ciências, 7*, 7-29.

Oliveira, N. (1997). *Conceito de função: uma abordagem do processo ensino-aprendizagem* (Dissertação de mestrado). Pontifícia Universidade Católica, São Paulo – SP.

Pimentel, T., & Vale, I. (2012). Os padrões e o raciocínio indutivo em matemática. *Quadrante, 21*(2), 29-50.

Silva, I. C. da. (2015). *Recorrências: uma abordagem sobre sequências recursivas para aplicações no Ensino Médio* (Dissertação de mestrado). Universidade de Brasília, Brasília – DF.

Vergnaud, G. (1983a). Quelques problèmes theóriques de la didactique a propos d'un example: les structures additives. *Atelier International d'Eté: Récherche en Didactique de la Physique*, La Londe les Maures, França, 26 de junho a 13 de julho.

Vergnaud, G. (1985). Concepts et schèmes dans une théorie opératoire de la représentation. *Psychologie Française, 30*, 245-252.

Vergnaud, G. (1988). Multiplicative structures. In Hiebert, H., & Behr, M. (Eds.), *Research Agenda in Mathematics Education. Number Concepts and Operations in the Middle Grades* (pp. 141-161). Lawrence Erlbaum.

Vergnaud, G. (1990). La théorie des Chapms Conceptuels. *Recherches en didactique des mathématiques, 10*(2-3), 133-170.

Vergnaud, G. (1998). A comprehensive theory of representation for mathematics education. *Journal of Mathematical Behavior, 17*(2), 167-181.

Wasques, V. F., Esmi, E., & Barros, L. C. (2020). Sequências recorrentes lineares de primeira e segunda ordem de números fuzzy interativos. *Biomatemática, 30*, 159-176.

ISSN 2764-3158