

Cálculo diferencial: explorando taxa de variação por meio de uma tarefa investigativa e metacognição

Differential calculus: Exploring rate of change through an investigative task and metacognition

Carlos José Ferreira Soares¹
Marli Teresinha Quartieri²

Resumo: Este trabalho teve o objetivo de analisar a evocação dos elementos metacognitivos ao trabalhar com taxa de variação, mediante a exploração de uma tarefa investigativa associada a metacognição, com um grupo de alunos do curso de Licenciatura em Matemática. Foi norteada pela abordagem qualitativa, os dados foram coletados por meio da observação participante, caderno de anotações, gravador de voz e questionários metacognitivos. Para a análise foi usada a análise descritiva qualitativa. Os resultados apontam que os alunos relacionaram taxa de variação ao conceito de derivada. A exploração da combinação de investigações matemáticas e metacognição instigou os alunos refletirem sobre a tomada de consciência da sua aprendizagem.

Palavras-chave: Investigação matemática. Metacognição. Taxa de variação.

Abstract: This study aimed to analyze the evocation of metacognitive elements when working with rate of change, through the exploration of an investigative task associated with metacognition, with a group of students from the Mathematics undergraduate course. It was guided by the qualitative approach, and the data were collected through participant observation, notebooks, voice recorders and metacognitive questionnaires. Qualitative descriptive analysis was used for the analysis. The results indicate that the students related rate of change to the concept of derivative. The exploration of the combination of mathematical investigations and metacognition encouraged the students to reflect on the awareness of their learning.

Keywords: Mathematical investigation. Metacognition. Rate of change.

1 Introdução

O cálculo é uma ação de contagem, realização de operações matemáticas aritméticas ou algébricas exploradas na resolução de diversos problemas. Pode ser usado em diferentes campos tais como geometria, estatística, economia, física, química, biologia, engenharia, dentre outros. Entendido como ações de efetuar operações matemáticas simples envolvendo as quatro operações básicas (adição, subtração, multiplicação e divisão) como também a resolução de problemas matemáticos avançados denominados de cálculo infinitesimal, que é mais conhecido como Cálculo Diferencial e Integral.

Rogawski e Adams (2018) corroboram com essas ideias destacando que o Cálculo Diferencial e Integral foi desenvolvido e aprimorado a partir do século XVII para contribuir na resolução de dois problemas de geometria relacionados em encontrar retas tangentes a curvas, parte do cálculo conhecida como Cálculo Diferencial; e calcular medidas de áreas sob curvas, denominado de Cálculo Integral. Além disso, para esses autores este campo do saber é vasto e os limites de fronteiras não são bem definidos.

¹ Universidade do Estado do Amazonas • Tefé, AM — Brasil • ✉ cjsoares@uea.edu.br • ORCID <https://orcid.org/0000-0002-0265-8944>

² Universidade do Vale do Taquari • Lajeado, RS — Brasil • mtquartieri@univates.br • ORCID <https://orcid.org/0000-0002-9621-3830>

O professor, de acordo com Soares (2021), tem papel importante nesse contexto, como mediador da aprendizagem dos alunos para favorecer a produção de resultados eficazes, analisando as realidades de cada um para planejar suas aulas, explorando vários recursos pedagógicos, e não apenas estimular a memorização de demonstrações e resolução exaustiva de listas de exercícios. Neste sentido, a presente proposta incorpora na discussão a investigação matemática e a metacognição como alternativas de ensino e de aprendizagem para instigar os alunos a construírem conceitos de cálculo diferencial.

A investigação matemática é uma tendência de ensino e aprendizagem que valoriza a construção de conhecimentos de forma autônoma a partir de tarefas investigativas com característica aberta de forma que instigue os alunos a formular, testar e validar conjecturas (Ponte, Brocardo & Oliveira, 2019). Para esses autores, o trabalho com investigação matemática, em sala de aula, pode contribuir tanto com o ensino quanto com a aprendizagem, uma vez que o professor assume o papel de mediador do conhecimento norteado por fases e momentos de investigação que buscam provocar o educando a ser protagonista de sua própria aprendizagem.

Aliado a este contexto, um campo de estudo que pode ser explorado em sala de aula para auxiliar a aprendizagem dos alunos é a metacognição. É um termo que está associado às estratégias de aprendizagem, as ações executadas pelos alunos para aprender, ou seja, é o estudo de como o ato de aprender acontece. É a capacidade do discernimento consciente dos procedimentos ou efeitos da aprendizagem. Nesse sentido, é a qualidade de conhecer seu processo de aprender, o automonitoramento dos processos cognitivos, o pensamento do pensamento, o conhecimento do conhecimento (Flavell, 1979).

Franzoni e Quartieri (2021, p. 504) destacam que tarefas investigativas aliadas a reflexão de estratégias metacognitivas potencializam os alunos a produzirem manifestações de aprendizagem relacionadas “[...] 1) ao desenvolvimento da autonomia, da criatividade, do pensamento crítico e reflexivo durante a resolução das tarefas investigativas e momentos de socialização; 2) à consciência metacognitiva; 3) à cooperação e troca de saberes do trabalho em grupo [...]”. Dessa forma, a organização harmônica da metacognição com investigações matemáticas pode contribuir com o processo de aprender a aprender melhor.

Diante deste contexto, este trabalho foi instigado pelo problema de pesquisa: Que elementos metacognitivos emergem de um grupo de alunos de um curso de Licenciatura em Matemática ao explorarem a taxa de variação por meio de uma tarefa investigativa associada à metacognição? Desta problemática, surgiu este trabalho, que teve o intuito de analisar a evocação dos elementos metacognitivos ao trabalhar com taxa de variação, mediante à exploração de uma tarefa investigativa associada a questões metacognitivas, com um grupo de alunos do curso de Licenciatura em Matemática.

O desenvolvimento histórico do Cálculo Diferencial e Integral fascinou cientistas e possibilitou o entendimento e solução de problemas que não foram resolvidos pela matemática básica. Dessa forma, a partir do desenvolvimento do Cálculo foi possível a compreensão de como encontrar retas tangentes a curvas e efetuar cálculos de medidas de áreas sob curvas. Essa descoberta foi revolucionária, porque esses dois problemas geométricos, já desafiavam outros cientistas há várias gerações, uma vez que Arquimedes no século III a. C. já fazia suas investigações envolvendo questões que hoje são abordadas no Cálculo Diferencial e Integral (Iezzi, Murakami & Machado, 2013).

O Cálculo é dividido em dois ramos conhecidos como Diferencial e Integral, mas este trabalho de cunho científico foi voltado para a investigação do processo de aprendizagem do Cálculo Diferencial. Sobre a derivada, Ávila e Araújo (2015, p. 59) afirmam que:

A derivada surgiu no século XVII, em conexão com o problema de traçar a reta tangente a uma curva. Mas há uma outra motivação da derivada, não menos importante que a da reta tangente: trata-se da ideia de taxa de variação, como no caso da velocidade de um móvel, da taxa de decaimento de um material radioativo, da taxa de crescimento de uma cultura de bactérias etc.

O estudo da derivada trata de situações de calcular taxas de variação e possibilita a definição dos coeficientes angulares de curvas e o cálculo da velocidade e aceleração de objetos em movimentos. Por exemplo, a velocidade num dado instante da queda livre é encontrada calculando a derivada. Stewart (2015), destaca a derivada como um tipo de limite que está relacionado com problema de encontrar a reta tangente a uma curva e com o cálculo da velocidade de um objeto. E, esse limite que o autor chama de especial, tem interpretação como taxa de variação nas Ciências e nas Engenharias.

Sobre o ensino da derivada nos aspectos de traçar a reta tangente a uma curva e da ideia de taxa de variação, Ávila e Araújo (2015, p. 59) afirmam que o processo de ensino pode ser iniciado da seguinte forma: “[...] sempre começando com as situações mais simples, evoluindo gradualmente para os casos mais complexos”. Soares (2021), com base nos estudos de D’Avoglio (2002), destaca que, geralmente, os alunos da disciplina de Cálculo apresentam dificuldades de aprendizagem que estão relacionadas com o entendimento da definição formal da derivada quando explorada a partir do cálculo de limite.

Na próxima seção, destacamos alguns fundamentos de investigações matemáticas, a partir da caracterização de tarefa investigativa, pois a sua exploração em sala de aula pode auxiliar na construção do conceito de derivada.

2 Tarefa Investigativa

Tarefa investigativa é uma expressão utilizada nos trabalhos de Ponte, Brocardo e Oliveira (2019) sobre investigações matemáticas na sala de aula. Tal expressão está relacionada com tarefas exploratórias norteadas por ações de investigação. Os autores, em alguns momentos, utilizam também o termo atividades investigativas, mas a palavra tarefa está mais relacionada com o trabalho coletivo. Mas, vale salientar que de acordo com Brocardo (2001, p. 119), tomando como base Christiansen e Walther (1986) a diferença entre esses dois termos está no contexto empregado para tarefa e atividade, salientado que “atividade refere-se essencialmente ao aluno, àquilo que ele faz em determinado contexto; tarefa representa o objectivo de cada uma das acções desenvolvidas pelo aluno”. Neste trabalho, foi adotada a expressão tarefas investigativas.

O uso da investigação matemática é um desafio tanto para o professor quanto para os alunos, uma vez que provoca a mudança de postura e afronta os envolvidos a construírem conhecimentos que proporcionam o desenvolvimento de habilidades matemáticas. Para Soares (2021, p. 38)

[...] a aula de investigação é um desafio para o professor, é uma jornada rumo ao desconhecido, é uma tarefa de busca em que o aluno é o detetive, ele é o cientista na construção do conhecimento. Assim, o discente é o próprio matemático formando suas próprias conjecturas e responsável pela escolha dos caminhos que o conduzirá as descobertas almejadas.

Destacamos que, a interação contínua entre professor e aluno é fundamental para potencializar os resultados das investigações matemáticas tanto no processo de ensino quanto

de aprendizagem. Portanto, “o trabalho em sala de aula mediado por Investigação Matemática tem potencialidade para desenvolver um ensino com qualidade e promover a aprendizagem dos alunos de forma sistematizada” (Soares, 2021, p. 41). A investigação matemática como uma tendência de educação matemática promove a construção do raciocínio lógico por meio da realização de ações interativas que estimulem “[...] o desenvolvimento de competências que envolvem raciocinar, [...] investigar, explicar e justificar as soluções apresentadas para os problemas, com ênfase nos processos de argumentação matemática” (Brasil, 2018, p. 529).

Tarefas investigativas é um conjunto de questões com características abertas que muitas vezes não especificam conteúdos matemáticos e durante o processo investigativo podem surgir diferentes estratégias e respostas apresentadas pelos alunos. Além disso, podem envolver mais de um conteúdo, que devem produzir reflexões críticas sobre as relações matemáticas encontradas mediante os procedimentos de justificação e validação por meio de expressões argumentativas.

Fonseca e Leivas (2020, p. 31-32) corroboram com essa discussão afirmando que exercícios e problemas “são tarefas com estrutura fechada, sendo os primeiros de reduzida complexidade e os segundos de complexidade elevada. Explorações e investigações são tarefas com estrutura aberta, com grau de complexidade reduzido e elevado, respectivamente”. Dessa forma, devem ser trabalhadas em sala de aula, por meio do ensino exploratório, que caracteriza o professor como mediador interativo do processo investigativo, marcado pela participação contínua de instigar os alunos na construção de conhecimentos que favoreça o desenvolvimento da aprendizagem. A seguir, destacamos algumas ideias sobre metacognição como um processo de reflexão do ato de aprender a aprender.

3 Metacognição

A metacognição é um termo que está relacionado com o conhecimento do conhecimento, ou seja, é o processo do aluno refletir sobre o entendimento da sua aprendizagem, entender como ele aprende. Segundo Rosa (2011) a definição de metacognição parece ser simples, mas pesquisas realizadas por meio de diferentes perspectivas têm revelado que é complexa. “[...] Porém, há um núcleo coeso em torno do entendimento de metacognição como o pensamento sobre o próprio pensamento, ou a cognição da cognição” (Rosa, 2011, p. 37).

Nesse sentido, a metacognição é a ação reflexiva sobre seu próprio processo de aprendizagem, é pensar o que e como se entende, ou seja, refletir sobre os caminhos que adotamos para aprender e o que aprendemos. Podemos expressar que é a capacidade de pensar em estratégias necessárias para facilitar e promover o próprio aprendizado. É a habilidade cognitiva que o indivíduo busca para compreender quais os caminhos e meios que poderá explorar para resolver um problema, encontrar uma solução, alcançar um determinado objetivo, enfim, ser hábil cognitivamente para entender suas dificuldades, identificando erros, tomadas de decisão e resultados equivocados. Autores como Flavell (1979), Brown (1978), Portilho (2011), Rosa (2011; 2014) e Locatelli (2014) abordam que as habilidades metacognitivas são extremamente importantes para ensinar o estudante a “aprender a aprender”.

Segundo Thenmozhi (2019) a base metacognitiva está pautada na ação de pensar sobre os próprios pensamentos. Para o referido autor, o conceito de metacognição está relacionado com a habilidade adotada por uma pessoa em conduzir seu próprio processo cognitivo por meio do conhecimento, controle do processo e de si mesmo. O desenvolvimento do conhecimento produz o aperfeiçoamento de habilidades metacognitivas a partir das experiências vivenciadas.

O trabalho didático-pedagógico em sala de aula, sob a perspectiva da metacognição, requer planejamento, seleção de estratégias, avaliação do aprendizado e monitoramento do conhecimento em prol da autoconsciência. A metacognição é um ato consciente que envolve os elementos pessoa, tarefa e estratégia e também é um ato de controle que envolve planejamento, supervisão, regulação e avaliação (Portilho, 2011). Aliás, Rosa (2011) destaca que o processo metacognitivo envolve dois componentes (conhecimento do conhecimento; controle executivo e autorregulador) e seis elementos (pessoa, tarefa, estratégia, planificação, monitoramento e avaliação).

Segundo Rosa, Corrêa, Passos e Arruda (2020, p. 718), os seis elementos citados anteriormente, estão intrinsecamente conectados ao domínio metacognitivo e devem ser relacionados reflexivamente a metacognição “como compreensão da natureza do aprender e do conhecer, em que um sujeito cognitivo só alcança um nível superior de compreensão e autoconhecimento se acionar os dispositivos reflexivos dos domínios cognitivos. Nesse sentido, os processos metacognitivos são potencializados por meio da reflexão, pois é fundamental para a promoção da capacidade de investigação de si mesmo, ou seja, da autoconsciência.

Portanto, a exploração da metacognição pode instigar os alunos a refletirem sobre seu próprio processo de aprendizagem, de modo que, articulem os conhecimentos de si mesmo voltados para definir estratégias para aprender melhor. Em seguida, apresentamos os caminhos metodológicos para a realização deste trabalho de cunho científico.

4 Procedimentos metodológicos

Em relação aos caminhos metodológicos, esta pesquisa foi de abordagem qualitativa porque se pretendeu “[...] compreender como as pessoas interpretam suas experiências, constroem seus mundos e atribuem significado a suas experiências. A principal preocupação do pesquisador deve ser, portanto, a de compreender o fenômeno segundo a perspectiva dos participantes e não a sua” (Gil, 2021, p. 2). Por meio desta abordagem buscamos a compreensão e interpretação das respostas dos alunos, referente à taxa de variação como um conceito relacionado a derivada.

Para coletar os dados acerca da problemática investigativa desta pesquisa, foi utilizada a técnica de pesquisa observação participante e os seguintes instrumentos de coleta de dados: gravador de voz, questionários metacognitivos e caderno de anotações com as resoluções dos alunos. Sobre a observação participante, Marconi e Lakatos (2018) afirmam que “consiste na participação real do pesquisador com a comunidade ou grupo”. Esta técnica de pesquisa possibilitou o pesquisador interagir com os alunos durante a realização da tarefa investigativa, que foi fundamental para a produção e coleta dos dados.

Os dados coletados foram analisados por meio da análise descritiva qualitativa. Para Cervo, Bervian e Silva (2007) e Soares (2022) a análise descritiva no contexto de evidências qualitativas trata-se da descrição detalhada dos fatos, informações e fenômenos norteados pelos argumentos da fundamentação teórica utilizada na pesquisa. Assim, esta técnica de análise possibilitou a descrição detalhada dos resultados produzidos pelos alunos, que foram imbricados com o referencial teórico, ou seja, as respostas dos alunos foram articuladas de forma reflexiva com as ideias dos autores da revisão de literatura deste trabalho.

O desenvolvimento deste trabalho foi realizado na disciplina de Cálculo I do Curso de Licenciatura em Matemática de uma Universidade do Estado do Amazonas. A referida instituição oferece cursos de licenciaturas nas áreas de Matemática, Química, Física, Ciências Biológicas, História, Geografia, Letras e Pedagogia. Está localizada em um município no interior do Estado do Amazonas. Atende alunos de vários municípios, e desde a sua fundação

vem contribuindo de forma significativa para a habilitação de professores licenciados nas áreas citadas.

Os sujeitos da pesquisa foram 16 acadêmicos do Curso de Licenciatura em Matemática. Já a turma foi de 2023/1 com 4 acadêmicas e 12 acadêmicos com faixa etária de 20 a 39 anos. Para a realização da tarefa, a turma foi dividida em quatro grupos com 4 componente cada um. A seguir, no Quadro 1 a tarefa investigativa explorada.

Quadro 1: Tarefa investigativa

Uma determinada pessoa diagnosticada com diabetes desde a infância foi acompanhada por um nutricionista desde os 5 anos até os 70 anos. A cada 5 anos foi registrado a sua massa conforme está organizado no quadro abaixo:														
1) Descreva de uma forma tão completa quanto possível como ocorreu a variação da massa dessa pessoa ao														
Idade (ano)	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	70
Massa (kg)	18,9	34	54,1	65	79	75,2	78,6	82,6	74,2	72	69,3	67	69,8	72
longo dos anos.														
2) Comente a seguinte afirmação “no período entre 50 a 70 anos não ocorreu variação da massa dessa pessoa”.														
3) Qual terá sido a massa dessa pessoa aos 22 anos? Justifique.														

Fonte: Elaborado pelos pesquisadores (2023).

Esta tarefa, foi associada com três questionários metacognitivos, que foram respondidos durante três momentos, para instigar os alunos a refletirem sobre estratégias para resolver os itens propostos. A tarefa investigativa foi desenvolvida durante três fases denominadas de introdução, realização de investigações e avaliação. Foram aplicados três questionários metacognitivos, um em cada fase como o objetivo de instigar os alunos a refletirem sobre a resolução da tarefa. Vale destacar que esses questionários foram respondidos de forma individual.

i) Primeira fase: foi entregue a cada grupo a tarefa investigativa e um questionário metacognitivo, contendo as seguintes questões: 1. Reconhece algum conteúdo na tarefa proposta? Consegue relacioná-lo com conhecimentos anteriores? Descreva; 2. Entendeu como realizar a tarefa? Justifique; 3. Reconhece informações necessárias para a realização da atividade? Explique; 4. Que estratégias foram pensadas para a realização da tarefa? Comente. Este questionário metacognitivo foi respondido de forma individual.

ii) Segunda fase: Após cada aluno responder o primeiro questionário metacognitivo, iniciaram as investigações matemáticas em grupo e formularam, testaram, validaram ou refutaram conjecturas. Em seguida, de forma individual, os alunos responderam o segundo questionário metacognitivo, que continha as questões: 1. Quais as estratégias que foram discutidas e aplicadas nesta tarefa? Como foram formuladas as conjecturas? Elas foram testadas e validadas? Justifique; 2. Como foi o planejamento de suas ações e do grupo para a realização da tarefa? Explique; 3. Como foi a execução da atividade de acordo com os objetivos traçados? Como os resultados foram registrados? Descreva; 4. Houve necessidade de revisar alguma estratégia? Justifique.

iii) Terceira fase: Este foi o momento da apresentação dos resultados de cada grupo para a turma. Discutiram os caminhos traçados para a resolução da tarefa. Em seguida, cada aluno respondeu o terceiro questionário metacognitivo, o qual tinha as questões: 1. Quais os procedimentos e recursos explorados para construir os resultados? Todos funcionaram? Justifique; 2. Você considera que o trabalho desenvolvido em pequenos grupos potencializa a

aprendizagem? Justifique a sua resposta; 3. Como foi sua participação durante a realização desta tarefa? O que realizou? Como realizou? 4. O que você aprendeu? Descreva de forma detalhada.

A tarefa foi realizada em grupos com 4 componentes cada um e foram nomeados pelas iniciais D (Derivada), I (Investigação), M (Metacognição) e T (Tarefa). A escolha dessas iniciais está relacionada com o termo “tarefas de investigação e metacognição no estudo de derivada” que norteou o trabalho da Tese. Além disso, as respostas e falas dos alunos estão identificadas com as iniciais do grupo acompanhado de um símbolo numérico. Por exemplo, D1, D3, I4 M2, T4, ... A seguir, destacamos a análise dos resultados produzidos pelos grupos durante a realização da tarefa investigativa aplicada.

5 Análise dos dados

O processo de análise dos dados foi realizado durante três momentos. O primeiro enfatiza a introdução da tarefa; o segundo a realização das investigações e o monitoramento; e, o terceiro foca na justificação e avaliação. Isto significa que a análise foi focada nas respostas dos questionários metacognitivos e nas produções dos alunos realizadas durante as três fases de uma tarefa de investigação.

1) Primeiro momento investigativo e metacognitivo

Para análise da Tarefa Investigativa realizada, apresentam-se as respostas dos alunos, referente a questão 1 do primeiro questionário metacognitivo (Reconhece algum conteúdo na tarefa proposta? Consegue relacioná-lo com conhecimentos anteriores? Descreva).

I1 – É possível identificar o conteúdo taxas de variação na tarefa proposta.

I2 - Funções, sequências e variação.

I3 - Sim, nas questões fala sobre variação da massa ao longo dos anos, pode ser relacionada com taxa de variação média e velocidade média.

D3 - Sim. A tarefa investigativa 1 para mim, tem relação com função, já visto no ensino médio e até mesmo no início do curso de matemática.

D4 – Sim. Com o conteúdo taxa de variação da velocidade em relação ao tempo e fazendo vários cálculos podemos obter estudar o comportamento da variação instantânea.

Essas respostas convergem para a comprovação de que o elemento pessoa esteve presente durante a realização da tarefa, uma vez que, os alunos identificaram conteúdos e relacionaram com conhecimentos anteriores. Além de identificarem os conteúdos, os alunos destacam seus conhecimentos quando apresentam significados de alguns deles, por exemplo, a razão de uma progressão aritmética como uma constante obtida entre a diferença de seus termos ordenados. As manifestações dos alunos convergem com a abordagem de Rosa (2011) sobre a manifestação do elemento metacognitivo pessoa na identificação de conhecimentos e informações de determinados conteúdos e como eles se relacionam com esses saberes.

Em relação a questão 2 do primeiro questionário metacognitivo (Entendeu como realizar a tarefa? Justifique). As respostas dos alunos demonstraram a presença dos elementos metacognitivos tarefa e estratégia.

O elemento tarefa manifestou-se devido os alunos demonstrarem que compreenderam como realizar a tarefa, reconhecendo informações necessárias para sua resolução, como é destacado por 2 acadêmicos: “De acordo com os dados da tabela em que o nutricionista acompanha entre 5 anos o paciente, informações de idade e massa da pessoa podemos analisar esses dados e calcular a média desses dados” (Aluno T1) e “Na primeira leitura não entendi, mas depois de fazer mais algumas leituras da tarefa eu tive mais compreensão do que se trata o

seu enunciado” (Aluno M4). Tomando como base Portilho (2011), os alunos demonstraram conhecimento de si mesmos como aprendentes e pessoas pensantes, realizando esforço mental para melhorar os resultados no processo de aprendizagem.

O elemento estratégia foi evocado pela identificação de determinada estratégia para alcançar o objetivo previsto, baseado em seus conhecimentos prévios, conforme os trechos: “Essa tarefa investigativa será concluída passo a passo sem pular etapas, sempre observando e relacionando o tempo, pois com o tempo os números variam conforme sua idade” (Aluno D2) e “Nesta atividade teremos que utilizar os conhecimentos adquiridos na área da matemática e achar a melhor forma ou estratégia para resolver o problema” (Aluno D3). A esse respeito, Locatelli (2014, p. 47) afirma que “muitas vezes, os estudantes não sabem qual seria a melhor estratégia metacognitiva para aprender e, nesse momento, é muito importante a sugestão de dicas, em busca de estímulos ao estudo” em busca de identificar a estratégia mais apropriada para a resolução da tarefa. Nesse sentido, os alunos compreenderam os enunciados da tarefa e destacaram ações para realizá-la, destacando a intenção da promoção de discussões com os colegas: “Temos que dialogar com os colegas do grupo, para assim chegar a uma conclusão da tarefa” (Aluno I3); “Vamos discutir em grupo cada questão, mas cada um dando sua opinião, e falar o método que cada um usaria” (Aluno I4). Esses argumentos são indícios da presença do elemento metacognitivo estratégia, uma vez que demonstra a busca pela melhor estratégia para alcançar o objetivo proposto (Rosa, 2014; Maman, 2021).

Em relação ainda às respostas do primeiro questionário metacognitivo da tarefa investigativa 1, na questão 4 (Que estratégias foram pensadas para a realização da tarefa? Comente.), os alunos responderam sobre estratégias pensadas para a realização da tarefa.

T4 – As estratégias foram as deduções lógicas como também as teorias, por exemplo a média aritmética.

I1 – Fazer uma tabela, calcular cada número e ver o que está acontecendo, estado de saúde da pessoa.

M1 – Analisar a tabela, discutir, fazer gráficos e calcular a média de cada variação.

D1 – Tentar encontrar relações existentes.

Analisando as respostas dos alunos sobre estratégias pensadas para a realização da tarefa, pode-se inferir que o elemento estratégia foi evocado porque está presente nessas respostas o indicador de identificar a melhor estratégia para alcançar o objetivo proposto baseado em suas particularidades pessoais, conforme os alunos T4, I1, I3, M1 e D1. Esses sujeitos destacam que pensaram em estratégias como fazer tabela, construir gráficos, calcular a média das variações da massa e explorar funções e taxa de variação instantânea. Essas táticas apresentadas pelos alunos estão de acordo com a abordagem de Rosa et al (2020) sobre o elemento estratégia como um processo de compreensão, reflexão e conscientização da relevância de pensar em diferentes modos de realizar a tarefa, de forma contextualizada, para encontrar a melhor estratégia de resolução.

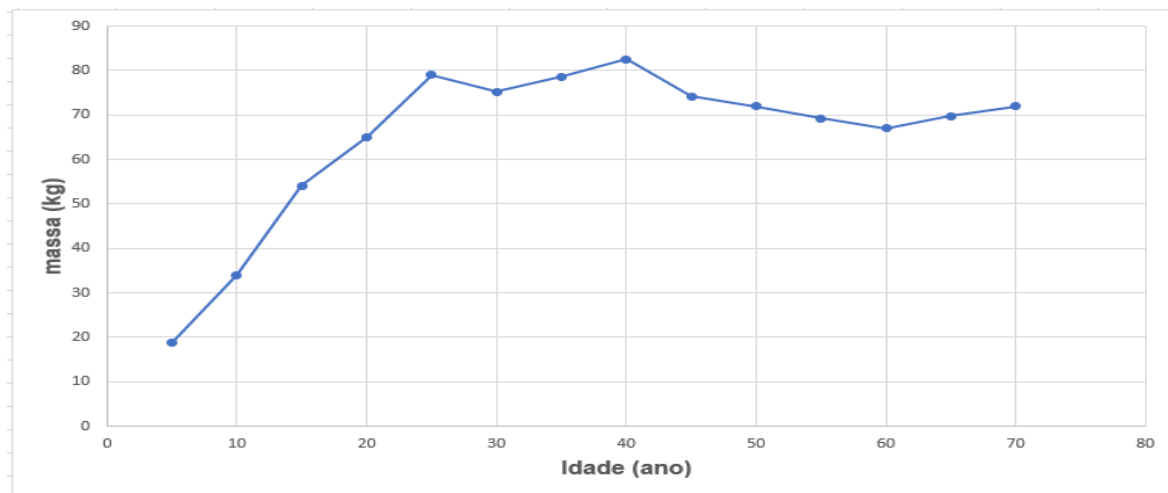
Nesse sentido, as estratégias apresentadas nas respostas dos alunos comprovam a presença do elemento metacognitivo estratégia, sinalizando indícios de que é significativo o desenvolvimento do pensamento metacognitivo para a aprendizagem. Portanto, durante o primeiro momento investigativo e metacognitivo os alunos demonstram que refletiram sobre a realização da tarefa por meio das manifestações dos elementos pessoa, tarefa e estratégia.

2) Segundo momento investigativo e metacognitivo

Neste momento, os alunos realizaram suas investigações, formularam, testaram e validaram conjectura, responderam o segundo questionário metacognitivo e construíram o conceito de derivada. A seguir destacamos alguns resultados.

O grupo D construiu um gráfico com os dados da idade e massa da pessoa acompanhada para organizar as informações e analisar o comportamento das variações da massa conforme a Figura 1.

Figura 1 - Variação da massa de pessoa ao longo dos anos



Fonte: Construção do grupo D.

A exploração do *Excel* para construir o gráfico da Figura 1 é uma evidência da presença do elemento metacognitivo monitoramento, pois, trata-se do indício da organização dos dados coletados com base no que é necessário para alcançar o objetivo da tarefa e esse indicativo é previsto por Rosa (2011) e Maman (2021). Ainda sobre essa estratégia utilizada pelo grupo D, Ponte, Brocardo e Oliveira (2019) salientam que é uma característica de trabalhos com tarefas investigativas, ou seja, os alunos em pequenos grupos exploram diferentes estratégias para formular conjecturas.

Além disso, vale destacar que no início do trabalho investigativo, os alunos apresentaram dificuldades para a realização da tarefa. Isso pode ter ocorrido, de acordo com Ponte, Brocardo e Oliveira (2019) devido à falta de familiaridade dos alunos em trabalhar com tarefas investigativas, uma vez que nenhum deles ainda tinha trabalho com investigações matemáticas em sala de aula.

Sobre o segundo item da tarefa investigava (Comente a seguinte afirmação “no período entre 50 a 70 anos não ocorreu variação da massa dessa pessoa”), o Quadro 2 ilustra a justificativa dos grupos sobre a afirmação que não ocorreu variação entre 50 e 70 anos.

Quadro 2 - Justificativa dos grupos sobre a questão 2

Grupos	Justificativa
T	Sim e não. Se considerarmos a análise de 5 em 5 anos nesse intervalo de 50 a 70 anos percebe-se que houve variação. Mas se calcularmos a variação média desse intervalo, a massa da pessoa não variou, então, esta afirmação é verdadeira.
I	Na nossa investigação ocorreu variação de massa no intervalo de 50 a 70 anos. Calculamos a taxa de variação média em intervalos de 5 anos e percebemos que nos primeiros 10 anos desse intervalo a variação foi negativa e nos 10 anos seguintes foi positiva.

Fonte: Dados da pesquisa.

De acordo com as respostas dos grupos apresentadas no Quadro 2, a afirmação da questão 2 está correta se for considerado a taxa de variação média da massa da pessoa, considerando apenas as extremidades do intervalo de 50 a 70 anos, pois essa taxa é nula quando calculada, utilizando somente os valores extremos do intervalo.

Sobre a investigação do item 3 (Qual terá sido a massa dessa pessoa aos 22 anos? Justifique), os quatro grupos exploraram a taxa de variação média do intervalo de 20 a 25 anos e encontraram 70,6 kg. Por exemplo, a Figura 2 ilustra a estratégia utilizada pelo Grupo I.

Figura 2 - Resolução dos grupos I

22 anos?					
20	21	22	23	24	25
65	67,8	70,6	73,4	76,2	79
$\frac{79 - 65}{25 - 20} = \frac{14}{5} = 2,8 \quad \text{Grupo I}$					

Fonte: Dados da pesquisa.

Os grupos (T, I, M e D) exploraram a mesma estratégia para descobrir a massa da pessoa aos 22 anos de idade, mas a Figura 2 ilustra apenas a resposta do grupo I, que calculou a taxa de variação média do intervalo de 20 a 25 anos e depois somou essa média a cada ano. Ele realizou uma investigação da massa da pessoa em torno de 22 anos pela esquerda e pela direita. Isso é um indício da busca pela variação instantânea exatamente no instante 22 anos, pois para demonstrar um resultado cada vez mais próximo da variação instantânea é necessário investigar em intervalos cada vez menores próximos de 22 anos. Para Concentino e Ferruzzi (2019), essas são evidências dos desafios de que percorrer o caminho da investigação matemática, em busca da aprendizagem, requer atitude e, muitas vezes, pode-se encontrar resultados não tanto precisos, mas importantes para a construção da aprendizagem. Cabe ao professor instigar os alunos a explorarem diferentes estratégias para resolver a tarefa de acordo com o objetivo previsto.

Logo após a realização da investigação, formulação, teste e validação de conjecturas, os alunos receberam de forma impressa, o segundo questionário metacognitivo com 4 questões que foram respondidas de forma individual. A seguir, destacam-se as respostas dos alunos referentes à primeira questão (Quais as estratégias que foram discutidas e aplicadas nesta tarefa? Como foram formuladas as conjecturas? Elas foram testadas e validadas? Justifique), que enfatizava reflexões acerca de estratégias discutidas e aplicadas durante a realização da tarefa.

T1 – Foram discutidos em grupo e decidimos usar a estratégia do cálculo da taxa de variação média que ajudou a formular, testar e validar a conjectura da taxa de média em vários intervalos.

M1 – Dialogamos e entramos em acordo para fazermos um gráfico para resolvermos a questão. Usamos ainda o cálculo da média para descobrir a variação nos intervalos.

M2 – Primeiramente discutimos a variação de como ocorreram as perdas e ganhos na massa.

Ao analisar os fragmentos supracitados, percebemos que a maioria dos alunos destacou que a principal estratégia explorada pelos grupos foi calcular a taxa de variação média em vários intervalos de tempo de acordo com os dados do quadro apresentada na tarefa investigativa. A partir dessas evidências, podemos inferir a presença de estratégias metacognitivas porque as

respostas dos alunos destacam ações para alcançar o objetivo previsto baseado nos seus conhecimentos pessoais e nas discussões com seus colegas (Rosa, 2014).

Os próximos fragmentos, apresentam os indícios da presença do elemento metacognitivo planificação, ao destacarem como as ações dos grupos foram planejadas e desenvolvidas (Como foi o planejamento de suas ações e do grupo para a realização da tarefa? Explique).

M4 – O plano foi discutir em grupo e a discussão originou o plano de calcular a taxa de variação média da massa da pessoa em vários momentos da vida, e depois concluir a tarefa analisando o resultado dos cálculos das médias.

D1 – Planejamos em executar a média da massa da pessoa em relação à idade.

D4 – O plano pensado e executado foi a discussão em grupo para decidir como o trabalho de resolução deveria ser realização. Então, foi resolvido a exploração da taxa de variação média da massa da pessoa.

Analisando os fragmentos supracitados, percebemos que as ações que expressam indícios da presença do elemento metacognitivo planificação estão relacionadas com as atividades envolvendo discussão do grupo, com a participação dos membros expressando os caminhos para a realização da tarefa. As principais ações foram: diálogo, expor opiniões e a partir delas formular a melhor ideia, buscar por relações matemáticas presentes na tarefa, discussão em grupo em busca do melhor caminho, exploração da taxa de variação média e construção de gráfico. Nesse sentido, a manifestação do elemento planificação acontece pela demonstração dos indicadores de planejar ações e participação do planejamento do grupo, tendo como base seus conhecimentos e a estratégia a ser executada, também a demonstração de clareza de como ou por onde iniciar a tarefa e do rumo a ser percorrido para atingir seu objetivo (Rosa, 2011; Maman, 2021).

Os próximos fragmentos apresentam indícios da manifestação do elemento metacognitivo monitoramento (Houve necessidade de revisar alguma estratégia? Justifique).

T1 – Revisamos de acordo com conteúdo estudado no ensino médio e colocando em prática o que aprendemos e analisando a tabela colocando em prática o conteúdo de progressões e média.

I1 – Revisamos a estratégia do cálculo da taxa de variação média.

A manifestação do elemento metacognitivo monitoramento está presente quando alguns alunos enfatizam que foi necessário revisar as estratégias, verificando seu propósito no que tange à execução da tarefa. Segundo Rosa (2011), essa ação de revisar estratégias é um indicador da manifestação do elemento metacognitivo monitoramento, pois, é importante a verificação da estratégia explorada para analisar se ela é adequada para extrair o resultado alinhado com o objetivo almejado. Assim, durante a realização do segundo momento investigativo e metacognitivo, os alunos formularam conjecturas e suas ações demonstram a evocação dos elementos planificação e monitoramento.

3) Terceiro momento investigativo e metacognitivo

No terceiro momento investigativo e metacognitivo cada grupo socializou com a turma os resultados que construíram e, em seguida, cada aluno respondeu o terceiro questionário metacognitivo.

Os próximos fragmentos apresentam as respostas dos alunos referente as participações durante a realização da tarefa, enfatizando o que e como realizaram suas ações (Como foi sua participação durante a realização desta tarefa? O que realizou? Como realizou?).

D2 – Contribui compartilhando ideias, ajudando na construção do gráfico que realizamos no *Excel*, auxiliei nos cálculos da taxa de variação média da massa em função do tempo e também na análise da execução da tarefa.

D4 – Apresentei ideias para o debate que realizamos, analisando os enunciados da tarefa, auxiliando no registro dos resultados e na revisão das estratégias exploradas de acordo com o objetivo proposto, quando necessário.

Após observar as respostas dos alunos, destacamos que eles participaram da realização da tarefa por meio de várias atividades, tais como na análise dos dados e da execução da tarefa, discussão com o grupo, na elaboração e registro dos resultados, construção de gráficos e cálculo da taxa de variação média da massa em relação ao tempo da pessoa investigada. Segundo Henriques (2010), durante a realização de uma tarefa de investigação matemática, a participação de todos os membros, em diferentes atividades, é fundamental para o sucesso da resolução das questões. Aliado a isso, salientamos que participar ativamente das três fases (introdução, investigação e discussão) é determinante para a construção de conhecimentos de forma coletiva e, conseqüentemente, o desenvolvimento de habilidades matemáticas que direcionam a aprendizagem com autonomia.

Em seguida, citamos algumas respostas dos alunos acerca do que aprenderam com a realização da tarefa investigativa (O que você aprendeu? Descreva de forma detalhada).

T1 – Aprendi que a taxa de variação média pode ser negativa e positiva e que ela é importante para a compreensão do comportamento de algumas situações do cotidiano.

T2 – Aprendi que por meio da investigação matemática podemos construir conhecimentos através da nossa própria investigação.

Analisando as respostas dos alunos sobre o que eles aprenderam com a realização da tarefa investigativa, entendemos que o trabalho em sala de aula com investigação matemática contribui para a construção de conhecimentos, busca pela melhor estratégia para encontrar os resultados e conseqüentemente para o desenvolvimento da aprendizagem. Também vale ressaltar, que a realização de investigação matemática possibilita a exploração de caminhos diferentes que favorecem a solução da tarefa, conforme descreve o aluno M4: “eu aprendi que um problema pode ter várias soluções e até mesmo resultados diferentes, basta você investigar várias possibilidades e caminhos para sua resolução”. A esse respeito, Ponte, Brocardo e Oliveira (2019) destacam que durante a realização de tarefas investigativas, os alunos podem encontrar várias respostas e que algumas delas podem surpreender o professor. Aliás, uma das respostas que surpreendeu foi a destacada pelo aluno D2 “a taxa de variação média ajuda a gente refletir sobre a taxa de variação instantânea”, pois explorando a primeira taxa podemos chegar na segunda, que está relacionada com o conceito de derivada.

Além disso, as respostas dos alunos demonstraram que a exploração do pensamento metacognitivo proporciona a ação consciente de buscar a compreensão e a aprendizagem do tema em estudo. Neste sentido, apoiando-se em Locatelli (2014, p.55) “a avaliação é um rico momento de aprendizagem, logo a reelaboração ou reflexão sobre ela são momentos mágicos de meta-aprendizagem”. Portanto, tomando como base os resultados aqui apresentados dos três momentos investigativos e metacognitivos podemos inferir que a combinação de tarefa investigativa com questões metacognitivas contribui para os alunos refletirem sobre seu processo de aprendizagem. As respostas demonstram a presença de elementos metacognitivos que são indícios de que os alunos recorreram aos seus pensamentos para realizar reflexões acerca do contexto da tarefa proposta e das possibilidades para alcançar os resultados (Rosa, 2011; Franzoni, 2020).

Considerações finais

Este artigo enfatizou a análise da evocação dos elementos metacognitivos ao trabalhar com taxa de variação, mediante a exploração de uma tarefa investigativa associada a questões metacognitivas, com um grupo de alunos do curso de Licenciatura em Matemática. Os resultados apresentados evidenciam indícios da aprendizagem de derivada relacionada com taxa de variação. As manifestações demonstradas evidenciam que a exploração de conhecimentos metacognitivos contribuiu para os alunos refletirem sobre sua aprendizagem, evidenciando que a taxa de variação está associada ao conceito de derivada. Aliado a isso, inferimos que a combinação de investigações matemáticas e metacognição pode favorecer o desenvolvimento do pensamento reflexivo dos alunos direcionado a analisar os caminhos para aprender melhor (Flavell, 1979; Rosa, 2011; Maman, 2021; Soares, 2021).

Vale também ressaltar as manifestações de algumas evidências da presença dos seis elementos metacognitivos. O elemento **pessoa** ficou evidenciado quando os acadêmicos exploraram conhecimentos prévios como funções, taxa de variação média, velocidade média e instantânea. A presença do elemento **tarefa** foi evidenciada nas ações demonstradas pelos alunos de compreender como realizar as tarefas, reconhecendo informações importantes como cálculo da velocidade média. No elemento **estratégia**, foi verificado que os estudantes exploraram seus conhecimentos para identificar as estratégias de construção de gráficos, cálculos da velocidade média.

O elemento **planejamento**, foi manifestado mediante a demonstração da elaboração de um plano, enfatizando que realizaram discussões seguidas de ações de exploração dos dados por meio de gráficos, *Excel*, cálculo da taxa de variação média. Quanto ao elemento **monitoramento**, observamos que os alunos recorreram a revisões dos passos adotados para resolver a tarefa. Já a presença do elemento **avaliação**, foi evidenciada quando os alunos destacaram que refletiram sobre os resultados, avaliando o conceito da derivada como uma taxa de variação.

Na perspectiva dos resultados aqui apresentados, acreditamos que a realização constante de trabalhos explorando tarefas investigativas e metacognição pode aprimorar o conhecimento e a habilidade metacognitiva do aluno, favorecendo a potencialização da aprendizagem de forma consciente. Além disso, pode favorecer a construção de conhecimentos matemáticos, fundamentados na argumentação matemática e no desenvolvimento do raciocínio matemático.

Agradecimentos

Agradecemos ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq), pelo apoio financeiro ao Projeto, do qual este trabalho é um dos resultados.

Referências

- Avila, G. & Araujo, L. C. L. (2015). *Cálculo: ilustrado prático e descomplicado*. Rio de Janeiro, RJ: LTC.
- Brasil. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. (2018). *Base Nacional Comum Curricular: Educação Infantil e Ensino Fundamental*. Brasília, DF.
- Brocardo, J. (2001). Investigações na aula de matemática: a história da Rita. In I. C. Lopes, J. Silva, P. Figueiredo (Eds.), *Actas ProfMat*. (pp. 155-161). Lisboa: APM.
- Brown, A. L. (1978). Knowing when, where, and how to remember: a problem of metacognition. In: GLASER, R. (Ed.). *Advances in instructional psychology*. Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates, 77-165.

- Cervo, A. L.; Bervian, P. A. & Silva, R. (2007). *Metodologia científica*. (6. ed.). São Paulo, SP: Pearson Prentice Hall.
- Concentino, J. & Ferruzzi, E. C. (2019). *Investigação matemática orientações para o professor*. Londrina, PR: Universidade Tecnológica do Paraná.
- Flavell, J. H. (1979). Metacognition and cognitive monitoring: a new area of cognitive – developmental inquiry. *American Psychologist*, 34(10), 906-911.
- Fonseca, J. A. & Leivas, J. C. P. O. (2020). uso de tarefas exploratórias no estudo da trigonometria em triângulos esféricos retângulos. *Revista Paranaense de Educação Matemática*, 9(19), 28-51.
- Franzoni, P. G. R. (2020). *investigação matemática no ensino de educação financeira e economia: uma vivência com licenciandos em matemática*. 2020. 256f. Tese (Doutorado em Ensino). Universidade do Vale do Taquari. Lajeado, RS.
- Franzoni, P. & Quartieri, M. T. (2021). Investigação matemática e educação financeira: manifestações de aprendizagem em um curso de licenciatura. *Rev. Diálogo Educ.*, 21(68), 487-512.
- Gil, A. C. (2021). *Como fazer pesquisa qualitativa*. Barueri, SP: Atlas.
- Henriques, A. C. C. B. (2010). *O pensamento matemático avançado e a aprendizagem da análise numérica num contexto de actividades de investigação*. 2010. 462f. Tese (Doutoramento em Educação) – Universidade de Lisboa. Lisboa.
- Iezzi, G.; Murakami, C. & Machado, N. J. (2013). *Fundamentos de matemática elementar, 8: limites, derivadas, noções de integral*. (7. ed.). São Paulo, SP: Atual.
- Locatelli, S. W. (2014). *Tópicos de metacognição: para aprender e ensinar melhor*. Curitiba, PR: Appris.
- Maman, A. S. (2021). *Uso de recursos experimentais e computacionais para o desenvolvimento do pensamento metacognitivo no ensino de física*. 180f. Tese (Doutorado em Ensino). Universidade do Vale do Taquari. Lajeado, RS.
- Marconi, M. A. & Lakatos, E. M. (2018). *Técnicas de pesquisa*. (8. ed.). São Paulo, SP: Atlas.
- Ponte, J. P.; Brocardo, J. & Oliveira, H. (2019). *Investigações matemáticas na sala de aula*. (4. ed.). Belo Horizonte, MG: Autêntica.
- Portilho, E. (2011). *Como se aprende? estratégias, estilos e metacognição*. (2. ed. Rio de Janeiro, RJ: Wak Editora.
- Rogawski, J. & Adams, C. (2018). *Cálculo*. (v.1, 3. ed.). Porto Alegre, RS: Bookman.
- Rosa, C. T. W. (2011). *A metacognição e as atividades experimentais no ensino de física*. 346f. 2011. 324 f. Tese (Doutorado em Educação Científica e Tecnológica). Universidade Federal de Santa Catarina. Florianópolis, SC.
- Rosa, C. T. W. (2014). *Metacognição no ensino de física: da concepção à aplicação*. Passo Fundo, RS: Editora UFP.
- Rosa, C. W.; Corrêa, N. N. G.; Passos, M. M. & Arruda, S. de M. (2020). Metacognição e seus 50 anos: uma breve história da evolução do conceito. *Revista Educar Mais*, 4(3), 703–721.



Soares, C. J. F. (2022). *Análise descritiva qualitativa*. Curitiba, PR: CRV.

Soares, C. J. F. (2021). *Tarefas investigativas no ensino e aprendizagem de aplicações de derivadas*. Curitiba, PR: CRV.

Stewart, J. (2015). *Cálculo*. (v.1, 3. ed.). São Paulo, SP: Cengage Learning.

Thenmozhi, C. (2019). Models of Metacognition. *Shanlax International Journal of Education*, 7(2), 1-4.