Sim, é necessário desenhar: semiótica aberta para comunicar matemática

Yes, you need to draw - open semiotics to communicate mathematics.

Lúcia Cristina Silveira Monteiro[1]

Resumo: Na presente pesquisa bibliográfica propomos representar conceitos matemáticos por comparação de diagramas, pois estes indicam possibilidades de desenvolvimento de diferentes raciocínios, abdutivo, indutivo e dedutivo, presentes no método científico concebido por Peirce e que são intrínsecos a matemática. Diagrama é a construção de uma representação, um desenho, uma imagem, é a experimentação dessa construção e a observação dos resultados. Processos em diagramas são construções de uma representação dinâmica, experimentação de interpretação de processos e criação, descrição de possibilidades. Enfim, diagramas são ícones de relações, e isso significa possibilidades de interpretação para comunicação da matemática.

Palavras-chave: Abdução. Criatividade. Diagramas na matemática. Interpretação. Semiótica aberta.

Abstract: In this bibliographic research we propose to represent mathematical concepts by comparing diagrams, as these indicate possibilities for developing different reasoning, abductive, inductive and deductive, present in the scientific method conceived by Peirce and which are intrinsic to mathematics. Diagram is the construction of a representation, a drawing, an image, it is the experimentation of this construction and the observation of the results. Processes in diagrams are constructions of a dynamic representation, experimentation of process interpretation and creation, description of possibilities. Ultimately, diagrams are icons of relationships, and this means possibilities of interpretation for communicating mathematics.

Keywords: Abduction. Criativity. Diagrams in mathematics. Interpretation. Open semiotics.

1 Introdução

Tradicionalmente a matemática vem sendo apresentada de maneira axiomática, estática, privilegiando exercícios repetitivos com respostas únicas, como um conhecimento linear e acabado e sem preocupação com construção de significado, em qualquer ciclo de ensino. A limitação para a comunicação desse conhecimento agrava-se quando há descompromisso com a construção dos conceitos matemáticos privilegiando-se interpretações e representações por um vocabulário formalizado, voltado apenas para as estruturas da matemática. Verificamos que a aprendizagem da matemática quando é comunicada com essas características citadas é problemática em todo o mundo, mas, o Brasil, especificamente, tem um dos piores índices de aprendizagem em Matemática do planeta, principalmente quando nos referimos aos estudantes da Educação Básica ao final dos ciclos do ensino fundamental e médio.

Nessa presente proposta, buscamos contribuir para formação inicial e continuada de educadores matemáticos iniciando com a compreensão de que nessas práticas tradicionais "aprende-se uma concepção muito particular do que conta como matemática, do que significa lidar com a Matemática, do que é ensinar e aprender Matemática" (Knijnik,1998, p.133). Destacamos que essa concepção *muito particular* a que se refere Knijnik, não pode ser desconsiderada, porque faz parte de uma evolução simbólica característica da evolução do conhecimento humano, mas que para alcançar compreensão efetiva das representações formais, é necessário provocar desenvolvimento de diferentes processos cognitivos e raciocínios

[1] Universidade Federal de Alagoas • Maceió, Alagoas— Brasil • ✉ lucia.monteiro@cedu.ufal.br • ORCID https://orcid.org/0000-0001-9491-6869

CC BY NC SA
ISSN 2764-3158

próprios da matemática, e praticar memorização e reprodução de símbolos por repetição de exercícios, não tem conduzido aos resultados pretendidos.

Portanto, por compreendermos que a Didática da Matemática é o espaço para comunicação do conhecimento matemático e que está fundamentada epistemologicamente na filosofia, história, ciências cognitivas, pedagogia, sociologia etc., percebemos esse espaço como um fenômeno da interpretação, e não só, como fenômeno de contínua interpretação e representação dos objetos/conceitos da matemática. Assim, acreditamos que essa perspectiva a ser aqui apresentada precisa fazer parte da formação inicial e continuada de educadores matemáticos.

Dessa forma, propomos olhar para o fenômeno da comunicação da matemática por uma perspectiva evolutiva do conhecimento, ou seja, indicar que o conhecimento é essencialmente um processo expresso em termos de interpretações e representações contínuas de objetos do conhecimento e por essa perspectiva é necessário considerar abordagens não estáticas, introduzidas por conceitos significativos, de forma não linear e holística, ou seja, interpretações e representações por uma semiótica aberta.

"O holismo como tese epistemológica enfatiza a coerência e a compreensão como critérios essenciais de significado e verdade" (Otte, 2006, 12). Otte escreve que o holismo renunciou ao esforço para alcançar o conhecimento completo e detalhados, e segundo esse autor, tal perda seletiva de detalhes, abstração e ganho de significado é apropriada, embora, em outros momentos, possa ser compensada com ações definitivas.

Assim, para formulação do proposto, discorreremos pela noção de interpretação, com destaque a importância da elaboração de diagramas para o desenvolvimento de uma metodologia científica que objetiva desenvolvimento de diferentes tipos de raciocínios. Destacamos os diferentes raciocínios presentes na construção do conhecimento. No discorrer do trabalho, jogaremos holofote ao raciocínio abdutivo, ou seja, a importância de interpretações que possam ser representadas por atividades para provocar abdução, que pode ser descrita como formulação de hipóteses e elaboração de caminhos para verificação de hipóteses, assim, abrindo caminho para processos criativos. Por fim, apresentamos alguns exemplos e alimentamos a expectativa de que durante formação inicial e continuada de educadores matemáticos da educação básica, sejam estimuladas interpretações do currículo, introduzindo representações dos conceitos por processos em diagramas.

Por todo texto perpassará subliminarmente considerações com base na proposta da complementaridade para a Didática da Matemática descrita por Otte (1993) em sua obra - O Formal, o Social e o Subjetivo: uma introdução à Filosofia e à didática da matemática, que considera a importância da complementaridade entre as estruturas, os aspectos sociais e a subjetividade dos sujeitos para comunicar Matemática.

2 Interpretações, representação diagramática e raciocínios na metodologia de Peirce

A noção de interpretação para construção dessa proposta, coincide com o conceito de interpretante encontrado nas teorias de Charles S. Peirce. Entre outras descrições importantes para o interpretante, Peirce descreve interpretação como interpretante e diz que "o interpretante nada mais é do que outra representação" (1931-1935: CP. 1.339). Para além de visões estáticas, esclarecemos que do ponto de vista da linguagem e da comunicação, nenhum pensamento ou signo pode ser esgotado por uma interpretação e experiência individual.

Em Peirce, encontramos categorias relacionadas a três tipos de interpretação. Esses tipos são níveis de interpretação a serem atribuídos a um signo e são denominados de interpretação

ISSN 2764-3158

imediata, interpretação dinâmica e interpretação final. Para compreensão dessa proposta para abordagem ao conhecimento, destacamos que todos os fatos empíricos de decifração de um signo são ditos interpretantes dinâmicos. Os interpretantes, imediatos e finais, são gerais e abstratos, porém, em diferentes níveis, que vão desde o sensorial, presente no interpretante imediato, até o simbólico no interpretante final.

As interpretações dos signos são elas próprias membros de uma série infinita, em que cada interpretação é um signo de algum objeto para uma interpretação posterior, ou seja, "sendo outro signo, o interpretante necessariamente gerará outro signo que funcionará como seu interpretante, e assim por diante, ad infinitum" (Santaella, 1995: 87).

Para Peirce, existem três tipos de signos, todos indispensáveis em todo raciocínio e diz:

> existem três tipos de signos que são indispensáveis em todo raciocínio; o primeiro é o signo diagramático ou Ícone, que apresenta semelhança ou analogia com o objeto do discurso; o segundo é o Índice, que como um pronome demonstrativo ou relativo, força a atenção para um objeto em particular, sem descrevê-lo; o terceiro ou Símbolo é o nome geral ou a descrição do que significa seu objeto por meio de uma associação de ideias ou conexão habitual entre o nome e o significado (1931-1935: CP 1.369) [...] um diagrama matemático sempre contém índices como partes da representação icônica. Mas também na medida em que tem um significado geral, um diagrama não pode ser um ícone puro; 'mas no meio do nosso raciocínio esquecemos em grande parte essa abstração, e o diagrama é para nós, muitas coisas (1931:1935: CP 3.363).

Portanto, signos do tipo diagrama muito nos interessam porque podem ser muitas coisas. Destacando parágrafo da citação anterior, que afirma: diagrama matemático sempre contém índices como partes da representação icônica, destacamos assim, a importância dos diagramas para a Matemática.

"Índices e ícones [...] são essenciais para introduzir algo novo no discurso matemático" (Otte, 2006, p. 16). Uma propriedade distintiva do ícone é que, ao observá-lo diretamente, é possível descobrir outras verdades relativas ao seu objeto, além daquelas que são suficientes para determinar a sua construção, e, "de imagens espelhadas até as fórmulas algébricas, essas verdades são muito parecidas, [...] essas são a fonte de toda a nossa informação. Assim, os diagramas desempenham no conhecimento um papel iconizado, aquele desempenhado na evolução de acordo com a teoria darwiniana, por variações fortuitas na reprodução" (Peirce, MS 694, SEM I, 429 apud Otte, 2006, p. 32).

Diagrama é a construção de uma representação, é a experimentação dessa construção e a observação dos resultados. Porém, é importante que essas etapas sejam englobadas por um sistema de representação, e, por isso, que "o diagrama é [...] predominantemente um ícone de relações [...]. Isto deve ser realizado num sistema de representações perfeitamente consistente, baseado numa ideia simples e facilmente inteligível" (Peirce, 1931-1935, CP 4.418). Portanto, podemos afirmar que diagramas são interpretações importantes para introduzir uma visão holística, do conhecimento.

Para uma abordagem a matemática focada no holismo como tese epistemológica, é importante compreender que sempre há restrições à interpretação de um signo, quando este depende de um único sistema de representação. "O conhecimento é, portanto, um processo vivo" (Otte, 2006: 16). "Isto significa que a atividade semiótica, que lida também com signos não simbólicos e não apenas com símbolos ou significados linguísticos, constitui a base da criatividade, da comunicação e do conhecimento" (Otte, 2006: 13).

ISSN 2764-3158

3 Ciência - um processo de interpretações

Para Otte (1993), uma das principais características da ciência abstrata moderna é a multiplicidade de perspectivas utilizadas por diferentes pesquisadores. No entanto esse autor destaca que as diferenças significativas entre os campos de pesquisa residem menos frequentemente no *que* é descrito, do que no *como* esse algo é descrito.

No processo simbólico da atualidade é possível incorporar a ideia de descrever objetos do conhecimento por meio de tecnologias digitais. Podemos perceber essas ferramentas como um novo espaço. Este espaço novo carrega a contradição de ser, por vezes tratado como um espaço concreto que é virtual e por outras como um espaço virtual que pode se concretizar. Enfim, são ferramentas que se apresentam como um novo espaço para interpretações e representações do conhecimento humano. Mais que em outros momentos podemos compreender a afirmação: "Enquanto na longa tradição do passado o ser humano se entendia como aquele que pensa, hoje ele se entende como aquele que entende, e explica-se como aquele que interpreta" (Gunter apud Ruedell, 2000 p.27).

Portanto, procuramos destacar a relevância da comunicação do conhecimento científico com base no desenvolvimento de interpretações que favoreçam formulação e resolução de problemas, incorporando novas ferramentas para visualização de objetos do conhecimento, e valorizando formulação de problemas abertos (Boavida, A. M. et al., 2008; Ponte, 2005; Smith, Stein, 2011), buscando "provocar interpretação com representação por meio de processos em diagramas" (Monteiro, 2021, 2022). Acreditamos que o indeterminado regula o determinado e esta ideia produz a imagem da ciência. "O acaso é o indeterminado, é a liberdade. Mas o efeito da liberdade é o poder mais estrito das leis" (Peirce apud Otte, 1993, p. 75).

4 A importância dos diagramas para o raciocínio abdutivo e o método científico de Peirce

Um método científico para Peirce é a construção de um caminho para se compreender algo, e é constituído pela inter-relação de raciocínios dedutivos, indutivos e abdutivos. A abdução, segundo Peirce é motivada pelo levantamento de hipóteses seguida por um julgamento antecipado e provisório. A abdução permite a produção de conhecimento justamente porque admite um valor lógico intermediário que é válido para ser investigado.

A abdução "está mais relacionada com a iconicidade" [...] é um raciocínio por uma aproximação, uma semelhança com o objeto do discurso" (Peirce, 1931-1935: CP 2.96). No entanto, "o raciocínio abdutivo seria o único tipo de raciocínio que origina novas ideias" (Peirce, 1931-1935: CP 5.171). Portanto, o julgamento abdutivo abre possibilidades para uma nova inteligibilidade do que é visto, sendo assim, é um tipo de julgamento que valoriza a criatividade.

O raciocínio imaginativo, sinônimo de raciocínio abdutivo, segundo Peirce, quando exercido por meio de diagramas, destaca a importância da representação visual nesse tipo de raciocínio, pois a visualização facilita e instiga a mente a formular hipóteses e novas ideias.

Monteiro (2021, 2022) propõe apresentar processos em diagramas, como uma semiose para provocar semiose, e como uma maneira de apresentar problemas abertos, ou seja, provocar uma tensão essencial com o objetivo de favorecer a abdução estimulando visualizações.

A experiência de uma pessoa é uma atitude consciente apenas na medida em que suas relações com essa experiência envolvam conhecimento explícito dentro de um conjunto de meios simbólicos disponíveis para reflexão. As ideias precisam ser intuitivamente interessantes, devem motivar atividades e orientar representações para estimular processos de signos.

ISSN 2764-3158

Atividades que utilizam processos em diagramas têm se mostrado como problemas abertos que possibilitam abdução e atividades desse tipo indicam maneiras de apresentar semiose para provocar semiose por formulação de problemas. Neste trabalho, os diagramas serão interpretados como quebra-cabeças geométricos e reciprocamente, pois, a flexibilidade desse tratamento pode tornar algumas questões mais fluentes.

5 Proposta de semiótica aberta para provocar semiose: Utilizando quebra-cabeça/diagrama

Para uma abordagem a matemática por uma semiótica aberta é importante comprometer-se com uma ação sobre aquilo que se pretende conhecer. Para ilustrar, apresentamos um quebra-cabeça/diagrama que mostra uma forma de decompor uma superfície quadrada em 7 (sete) outras superfícies, conhecidas como tangram. Observaremos dois momentos do quebra-cabeça/diagrama: na figura $1a$ o quebra-cabeça/diagrama aparece como é tradicionalmente conhecido; na figura $1b$, o diagrama replica as mesmas superfícies da figura $1a$ nas superfícies quadradas menores, indicando que esta ideia pode ser repetida infinitamente. Para criar a figura $1b$ o quebra-cabeça/diagrama foi tratado em um software de Geometria Dinâmica. pois podemos ampliar para continuar a decomposição, e provocar uma experiência com a metáfora do infinito (Lakkoff & Nüñes, 2000).

A figura $1a$ representa o quebra-cabeça/diagrama tradicional e foi confeccionada com material emborrachado para ser fotografada com câmera digital. A figura $1b$ foi projetada em material emborrachado em superfície quadrada de 1m² e posteriormente produzida no software de Geometria Dinâmica, Geogebra. Neste software é possível ampliar objetos utilizando a ferramenta 'zoom' e isso permite um número maior de iteração nas peças quadradas que vão surgindo no processo. Esse objeto foi chamado de tangram dentro do tangram...

Figura 1: Tangram dentro do tangram...

$1a$ $1b$

Fonte: notas de aula, postadas em educmatematicaufal.blogspot.com, blog de Monteiro L.C S. 2011.

Na literatura disponível, inclusive na Web, encontramos milhares de figuras criadas com as 07 (sete) peças deste quebra-cabeça/diagrama da figura $1a$. Essas informações aliadas à ideia diagramada na figura $1b$ compõe a visualização que deve provocar uma *tensão essencial* (Kuhn, 1999)) para que ocorra algum raciocínio abdutivo.

Outras informações e visualizações de possíveis processos em quebra-cabeça/diagrama podem se fazer relevantes para a abordagem, como por exemplo o desenvolvimento ilustrado na figura 2. Assim, na figura $2a$, apresentamos um *dragão* encontrado na Web e na figura $2b$, o *dragão* após replicação e movimentação de uma superfície replicada, o quadrado. A superfície quadrada pode ser a primeira a ser explorada por ser compreendida por semelhança ao formato inicial da figura $1a$. A ação de pesquisar, escolher uma figura na Web formada com as 07 peças do tangram, e substituir pelo menos uma peça replicada pela decomposição da superfície em 07 peças são as ações solicitadas.

ISSN 2764-3158

Na figura $2a$ e $2b$, as peças foram construídas com material emborrachado, partindo de uma superfície quadrada medindo 30cm×30cm. Estas medidas oferecem oportunidades para iteração, ou seja, padrão que se repete, em peças menores. O Diagrama $2a$ é a representação de um *dragão* com tangram encontrado na WEB, com um tangram dentro do tangram, substituindo a peça quadrada. O Diagrama $2b$ apresenta atividade comum em vários seminários para formação inicial e continuada de professores de matemática, coordenado por Monteiro L.C.S. indicando um possível movimento do tangram dentro do tangram.

Figura 2: Possibilidade para o primeiro passo de movimentação das peças do tangram dentro do tangram

$2a$ $2b$

Fonte: Grupo de Pesquisa Didática de Matemática e Semiótica – UFAL, 2018

Por se tratar de problema aberto, respostas diferentes são esperadas mesmo escolhendo a mesma figura. Seguem exemplos nas figuras 3 e 4. Na continuidade das ações, se pretendermos explorar esse fenômeno através de algum sistema consistente, podemos, por exemplo, iniciar através da linguagem, ou seja, descrição do dragão na literatura ou elaboração de histórias com esse personagem. Também podemos verificar a aritmética da conservação da área da superfície e possibilidades de alterações no perímetro das figuras que podem ser construídas. Essa exploração é promissora porque, além de conduzir o estudo por conceitos que não estão presentes em livros textos tradicionais, ao provocar maior número de iteração nas peças, é possível observar que o perímetro pode aumentar indefinidamente, caso sejam utilizadas infinitas replicações e movimentos das peças. Estas sugestões são apenas algumas num amplo espectro porque quebra-cabeça/diagramas transformados por iteração são fluentes, ou seja, possuem um número infinito de possibilidades em decomposições e combinações de peças, como mostram as figuras $3a, 3b, 3c$, e as figuras $4a, 4b, 4c$, explorando áreas equivalentes e a ideia do perímetro do dragão como metáfora do infinito.

As figuras $3a$, $3b$ e $3c$ representam um processo no diagrama, ou seja, da transformação de cada uma das 07 (sete) peças do quebra-cabeça/diagrama, em outras 07 (sete) peças. Este processo resulta num quebra-cabeça/diagrama com 49 peças. Este novo quebra-cabeça possui a mesma área do quebra-cabeça/diagrama inicial, conforme mostrado na figura $1a$. Aqui continuamos apresentando a figura do dragão a partir da figura $2a$, procurando um dragão com perímetro maior. Esses e outros resultados podem ser representados como personagem de história em quadrinhos[2].

[2] Algumas histórias foram postadas como atividades em educmatematicaufal.blogspot.com, blog de Monteiro, L.C.S. 2021.

ISSN 2764-3158

Figura 3: Elaborando personagens e evolução de personagens.

$3a$ $3b$ $3c$

Fonte: Essas atividades acontecem durante a formação continuada de professores de matemática da Educação Básica ministrada pela Monteiro, L.C.S.

Outros diagramas são verificados como resposta dada a questão, por se tratar de um problema aberto, portanto, admite diferentes respostas corretas.

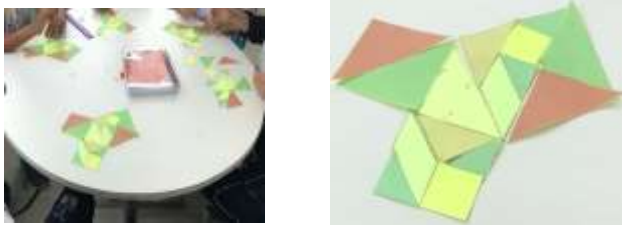
Para finalidades deste trabalho devemos observar que para fazer evoluir entre um diagrama e outro, por exemplo, entre a figura $3b$ e a figura $3c$ existe uma infinidade de possibilidades se acrescentarmos a informação de que as decomposições das peças podem continuar a serem executadas, caso se deseje. Explicamos algumas dessas possíveis interpretações com representações, como a substituição de diferentes peças por diferentes decomposições. Essas possibilidades se expandem dependendo do tratamento que pode ser dado a esses diagramas utilizando diferentes sistemas de representações, por exemplo, explorando-os em linguagem natural, história em quadrinhos, linguagem numérica, linguagem geométrica, linguagem algébrica, história da arte, jogos, inclusão de representações em diferentes tecnologias, como a ideia de imprimir o boneco da criação, o sempre *possível novo dragão*, utilizando impressão 3D, entre outros sistemas simbólicos ou combinações destes.

Outra possível interpretação para esse quebra-cabeça/diagrama pode ser como diagrama pitagórico. Então, vamos pegar o referido quebra-cabeça/diagrama de sete peças, o tangram, e visualizá-lo representando um diagrama bem conhecido e antigo – *Bride's Chair* (Alsina & Nelsen, 2016) - que contém a igualdade pitagórica, quando representado como na figura 4.

O quebra-cabeça/diagrama da figura $4a$ e $4b$ foi produzido por alunos do 9º ano do Ensino Básico. Esses alunos foram orientados a reescrever a igualdade pitagórica utilizando o tradicional quebra-cabeça/diagrama, com 07 (sete) peças e confeccionado pelos próprios alunos, utilizando cartolina.

Figura 4: Quebra-cabeça e/ou diagramas pitagóricos

$4a$ $4b$



Fonte: Estudantes da Educação Básica – 9º ano (Souza, 2017)[3], UFAL-Alagoas-Brasil

Observemos que na figura 4, o quadrado da hipotenusa é o tangram com suas 07 (sete) peças e os quadrados dos catetos são compostos cada um pela metade da área desse primeiro.

[3] Edvaldo Souza, Trabalho de Conclusão de Curso, Universidade Federal de Alagoas, 2017.

ISSN 2764-3158

O triângulo retângulo no qual está sendo diagramada a relação pitagórica é representado por uma das peças do referido quebra-cabeça, o triângulo grande. Tomando como referência esta nova representação e combinando-a com a ideia de decomposição por iteração nas peças, conforme mostrado nas figuras 1, 2, e 3 percebemos que muitas combinações são possíveis para reinterpretar este diagrama pitagórico utilizando processos em diagramas, interpretação com representação.

Uma das muitas possibilidades de interpretação está representada na figura 5. Nesta figura, iniciamos com a substituição das superfícies quadradas relativas aos quadrados dos catetos da figura 4, por tangrans de 7 peças. Na figura $5a$ ainda teremos uma interpretação do diagrama conhecido como *Bride's Chair*, semelhante à configuração tradicional.

Os diagramas $5a$, $5b$ e $5c$ foram confeccionados com material emborrachado com o objetivo de representar um processo aplicado ao diagrama da figura 4, e representar qualquer uma das interpretações sugeridas. Na figura $5a$, os quadrados dos catetos (lados menores do triângulo central) são compostos por 07 (sete) peças conforme o tangram original, figura $1a$. Na figura $5b$, as 07 peças dos quadrados da hipotenusa (lado maior) e dos catetos tomam o formato de uma casa, diagrama disponível na WEB, e na figura 5c, na casa relativa ao lado maior, aquela que tem sua base na hipotenusa do triângulo retângulo, a chaminé é esticada pelo processo de substituição do tangram dentro do tangram iniciado na peça quadrada.

Figura 5: Diagramas e/ou quebra-cabeça

$5a$ $5b$ $5c$

Fonte: Elaborado pela autora para exemplificação e ilustração neste artigo

Importante lembrar que é sempre possível manipular diagramas quando tratados como quebra-cabeça, isso pode criar possibilidades de comunicação com outros sistemas simbólicos.

Voltemos a utilizar as estratégias iniciais de busca de figuras disponíveis na WEB combinadas com a ideia de replicar partes nessas figuras compostas por 07 peças, seguindo um exemplo existente. Assim, na figura $5b$, as 07 peças do tangran foram transformadas em casinhas. As semelhanças entre as figuras ainda estão preservadas e podemos interpretar a igualdade através de um sistema significativo para a matemática sob o critério da semelhança geométrica, conduzido pelo conceito de proporcionalidade.

No passo seguinte, saindo do sistema inicial, diagramado na figura $5c$, a c*asa maior* ganhou uma chaminé alongada, ou seja, foi mantida a equivalência entre as somas das áreas, mas foi descartada a qualidade de ser semelhante. Ao descartarmos a qualidade das figuras da relação pitagórica serem semelhantes, encontramos uma limitação para argumentação da equação pitagórica relacionada a semelhança das figuras, mas ainda podemos argumentar sobre a igualdade entre áreas. As dimensões de criatividade: fluência, flexibilidade e originalidade se apresentam e precisamos elaborar novo discurso para continuidade das problematizações.

ISSN 2764-3158

Esta entrada nas dimensões da criatividade pode servir tanto para construir uma abordagem não tradicional para a comunicação e aprofundamento da igualdade pitagórica como indica possibilidades para sair dos sistemas de representações semióticas da matemática.

Caso optemos por continuar navegando pelos sistemas semióticos da matemática, podemos, por exemplo, iniciar comparações com outros diagramas pitagóricos conhecidos, ou mesmo questionar por que foi escolhido o diagrama da casa e não outra figura cuja parte de contato com o triângulo retângulo não fosse da mesma medida etc. Por outro lado, foi criado um momento que indica a possibilidade de sair do sistema de significados na aritmética e na álgebra para entrar em outro sistema, como, por exemplo, conduzir a narrativas que descrevem o movimento entre diagramas, dialogar com geometria projetiva etc. em qualquer dessas decisões tomadas estaríamos à beira da elaboração de outras hipóteses a serem verificadas.

Assim, comunicar conhecimentos por meio de processos em diagramas apresenta-se como um caminho que valoriza a formulação de conjecturas a partir da visualização, pode levar à formulação de hipóteses e transita entre as dimensões da criatividade por uma semiótica aberta.

6 Considerações e expectativas

Podemos perceber nas atividades apresentadas uma nascente de problemas. Permanecer em um sistema de análise ou combiná-lo com outros sistemas consistentes é uma questão de decisão e ação sobre o que buscamos comunicar, e para qual sujeito cognitivo. Nessa abordagem é possível explorar limites conceituais dos sistemas simbólicos para compreender quando é necessário combinar sistemas semióticos, saltar para outros sistemas simbólicos, como propõe Hofstadter (2001), ou mesmo assumir uma semiótica livre, intermediária entre sistemas, como possíveis diagramas, buscando transitar entre essas perspectivas, para aumentar ou indicar possibilidades de complementaridade entre sistemas de conhecimento, caminhando em direção a sistemas mais abrangentes.

Propomos olhar para diagramas encontrados no desenvolvimento do pensamento matemático desde a antiguidade, pois estes, quando vistos em algum processo de transformação, seja por combinação, indução ou combinação dessas duas ideias, permitem muitas interpretações e novas representações.

Também precisamos reinterpretar o currículo da Educação Básica buscando utilizar processos em diagramas para representação de seus objetos/conceitos. Para exemplificar essa possibilidade cito um recentemente caso divulgado, quando Júlia, aos 11 anos de idade, estudante do ensino fundamental, utilizou um padrão numérico para interpretar o que significa a raiz quadrada de um número para ela.

A ideia de Júlia foi utilizar números próximos a raiz quadrada que se está procurando, pois então, tomando como referência os procedimentos utilizados pela estudante, consideremos a questão: Qual é $\sqrt{121} = ?$ A estratégia utilizada inicia-se quando Júlia toma algum nas proximidades e menor que 121 cuja raiz seja conhecida por ela. Assim, a soma-se a esses números conhecidos, o número sucessor da raiz conhecida. Digamos que o número cuja raiz é conhecida é $\sqrt{100} = 10$. Somando-se $100 + 10 + 11 = 121$. Caso a soma seja igual ao número que se procura a raiz, o "radicando", que no caso é mesmo o número 121, a raiz procurada é o sucessor da raiz quadrada conhecida, o sucessor de 10, que é 11, e afirmamos $\sqrt{121} = 11$.

Mas, será que essa técnica percebida por Júlia revela algum significado sobre raiz quadrada de um número?

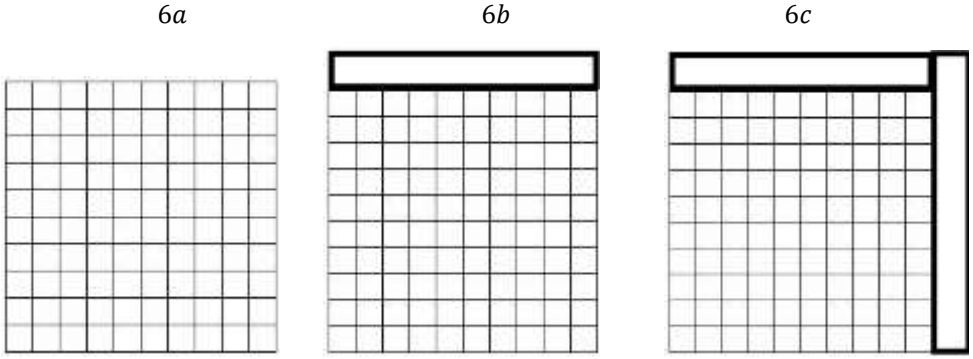
ISSN 2764-3158

6.1 Sim, é importante desenhar e interpretar a interpretação.

Quando interpretamos a estratégia numérica de Júlia pelo conceito de área, e buscamos elaborar um diagrama geométrico para verificação, percebemos que essa igualdade contém muitos conceitos construtores da matemática. Vejamos cada número da igualdade anterior, $100 + 10 + 11 = 121$ representado pela superfície e medida do lado de um diagrama geométrico. Então, o número 100 estará no primeiro diagrama. figura $6a$. Podemos representar o número 100 por um quadrado com área igual a 100 unidades, e, portanto, lado igual a 10. No diagrama ao centro, figura $6b$ temos um retângulo com área 100 + 10, ou seja, 110 unidades, e medidas dosv lados iguais a 10 e 11.

Acrescentaremos 11 unidades de áreas, ou seja, o número 11 que irá *completar um quadrado,* portanto, no terceiro diagrama geométrico, ao acrescentarmos o sucessor de 10, ou seja, 11 unidades de área, teremos o quadrado com área igual a 121 e lado igual a 11.

Figura 6- completando quadrados para comunicar a estratégia de Júlia por visualização de diagramas



Fonte: produzido pela autora para ilustração desse artigo

A interpretação da igualdade numérica por processo em diagrama permite uma abordagem conceitual à raiz quadrada de um número. Esta, será interpretada pelos conceitos de área de superfícies quadriláteras, lados de polígonos e o importante procedimento de completar quadrados numéricos e geométricos e obviamente algébricos. Os raciocínios envolvidos na ideia de completar quadrados são muito importantes também para compreensão da construção da matemática formalizada.

Esse método para *visualizar* raiz quadrada permite interpretá-la por outros conceitos, e assim, podemos afirmar que - *a raiz quadrada de um número é a medida do lado do quadrado, e a área desse quadrado é o número que queremos extrair a raiz*, ou seja, o radicando.

Mais uma vez nos deparamos com o conceito de área que consideramos uma categoria conceitual fundamental para explorar o currículo da educação básica. Essa exploração pode se dar pela verificação de igualdades: equivalência, congruência e semelhança. Generalizando o caso específico acima, logo chegaremos a estruturas conhecidas como produtos notáveis. Podemos também avançar a abordagem com análises concomitantes a respeito de interpretações das quantidades e relações encontradas com representações em uma e em três dimensões, buscando motivar pelo desenvolvimento do espírito investigativo, estimulado por possibilidades de interpretação e representação por diagramas.

Referências

Alsina, C.; Nelsen, R. (2011). *Icons of Mathematics*: *a exploration of Twenty Key Images*. MAA United States of America. Eletronic ISBN 978-0-88385-986-5. The Mathematical Association of America Publisher.

ISSN 2764-3158

Boavida, A. M.; Paiva, A. L.; Cebola, G.; Vale, I.; Pimentel, T. (2008). *Inovação e desenvolvimento curricular.* Lisboa. Ministério da Educação de Portugal: General Directorate of Innovation and curriculum development – DGIDC.

Brown, S.; Walter, M. (2009) *The art of problem posing*. Mahwah: Erlbaum. Digital Printing.

Courant, R; Robbins, H. (2000). *O que é matemática*. Rio de Janeiro. Modern Science Editorial.

Guilford, J. P. (1967). *The nature of human intelligence*. New York: McGraw-Hill.

Hofstadter, D. (2001). *Gödel, Escher, Bach, um entrelaçamento de gênios brilhantes*. Brasília. UnB Editorial.

Knijnik, G. (1996). *Exclusão e resistência*: Educação Matemática e legitimidade cultural. Porto Alegre, Artes Médicas.

Koyré, A. (2011). *Estudos de história do pensamento filosófico*. 2nd ed. Translation: Maria de L. Menezes. Rio de Janeiro. Forense Editorial.

Lakkoff e Nüñez. (2000). *Where mathematics comes from: how the embodied mind brings mathematics into being.* New York, Basic Books.

Monteiro, L. C. S. (2021). *Semiótica na didática da Matemática: interpretações das interpretações das interpetações* …. Curitiba. Appris Editorial.

Monteiro, L. C. S. (2022). Semiosis to Communicate Mathematics: Complementarity in the Circularity of Interpretations in Mathematics for the Development of Creativity. *The Mathematics Enthusiast,* (Vol.19: No.2), pp.562-592.

Nelsen, R. (1993). *Proofs without words*. Washington, D. C: The Mathematical Association of America Publisher.

Ogden, C.; Richards, I. (1989). *The meaning of meaning*: a *study* of the *influence* of *language upon thought and of the science of symbolism*. New York: HBJ Book.

Otte, M. (1993). *O formal, o social e o subjetivo*: *uma introdução à filosofia e à didática da matemática*. Translation: Raul Fernando Neto. São Paulo: Editorial Unesp Foundation.

Otte, M. (2006). Mathematical epistemology from a Peircean semiotic point of view. *Educational Studies in Mathematics, Semiotic Perspectives in Mathematical Education-PME*: (Vol. 61), p. 11-38.

Peirce, C. S. (2010). *Semiótica*. (4ª ed.) Translation: José Teixeira Coelho Neto. São Paulo. Perspective Editorial.

Peirce, C. S. (1931). *Collected Papers*. (Vol. 1-6). Cambridge, MA: Harvard University Press.

Peirce, C.P. (1931–1935). *Collected Papers of Charles Sanders Peirce*, (Vols. I–VI), Cambridge, Massachusetts: Harvard University Press.

Peirce, C.P. (1958). *Charles Sanders Peirce zitiert nach Bandnummern und Paragraphen.* In A.W. Burks, (Vols. VII–VIII), Cambridge, Massachusetts. Harvard University Press.

Ponte, J. P. (2005). Gestão curricular em matemática. *In*: GTI (ed.). *The teacher and curriculum development.* p. 11-34, Lisbon: APM.

Ruedell, A. (2000). *Da representação ao sentido*: *através* de *Schleiermacher à hermenêutica atual*. Porto Alegre: EDIPUCRS.

Santaella, L. (1995). *A teoria geral dos signos*: *semiose e autogeração*. São Paulo: Ática Editorial.

ISSN 2764-3158

Santaella, L. (2001). *Comunicação e pesquisa: projetos para mestrado e doutorado*. São Paulo: Hacker Editors.

Smith, M.; Stein, M. (2011). *Practices for orchestrating productive mathematics discussions.* Reston, VA: NCTM.

Torrance, E. P. (1969). *Creativity. What research says to the teacher*. Washington: National Education Association publicher.

Weyl, H. (1987). *The continuum*: *a critical examination of the foundation of analysis*. Tradução: Stephen Pollard e Thomas Bole. New York: Rowman & Littlefield Publishing Group.

ISSN 2764-3158