

Aprendizagem e *modos de fazer* em atividades de modelagem matemática: propondo uma articulação

Learning and *ways of doing in* mathematical modeling activities: proposing a joint

Lourdes Maria Werle de Almeida¹
Jeferson Takeo Padoan Seki²

Resumo: Neste artigo investiga-se: o que se pode dizer da aprendizagem em atividades de modelagem matemática? Usando entendimentos e traços característicos da aprendizagem nessas atividades e modos ver a modelagem na Educação Matemática, propõe-se uma estrutura que associa traços característicos da aprendizagem com finalidades, perspectivas e tipo de atividade, construindo n-uplas ($n=4$) para essa associação definidas como: (*traço da aprendizagem, finalidade da modelagem, perspectiva de modelagem, tipo de atividade*). Essa estruturação leva à conjectura de que a aprendizagem em modelagem não é independente dos modos de ver e de fazer modelagem. Objetivos do professor, interesse dos estudantes e suas intermediações com o contexto balizam a perspectiva e as finalidades dessas atividades e constituem as condições para inferir sobre a aprendizagem.

Palavras-chave: Modelagem Matemática. Aprendizagem. Perspectivas. Modos de fazer.

Abstract: This article is guided by the question: what can be said about learning in mathematical modeling activities? Using understandings and characteristic features of learning in these activities and ways of seeing modeling in Mathematics Education, a structure is proposed that associates characteristic features of learning with purposes, perspectives and type of activity, constructing n-tuples ($n=4$) for this association defined as: (learning trait, modeling purpose, modeling perspective, type of activity). This structuring leads to the conjecture that learning in modeling is not independent of the ways of seeing and doing modeling. The teacher's objectives, students' interests and their intermediation with the context guide the perspective and purposes of these activities and constitute the conditions for inferring about learning.

Keywords: Mathematical Modeling. Learning. Perspectives. Ways to do it.

1 Introdução

Nas últimas décadas, à modelagem matemática na sala de aula, nos diversos contextos educacionais, tem sido associadas diferentes finalidades e encaminhamentos, considerando interesses específicos de professores e estudantes (Almeida, 2022; Blum, 2015, Niss & Højgaard, 2019; Almeida, Silva & Ramos, 2018).

Um desses interesses, mencionado de forma recorrente, refere-se à aprendizagem dos estudantes quando envolvidos em atividades de modelagem matemática (Braga, 2015; Braz, 2014; Seki, 2023; Brito, 2018; Souza & Barbosa, 2014, Almeida, Seki & Martins, 2021, entre outros). Entretanto, conforme aponta o trabalho de Gomes, Kowalek e Almeida (2022), a aprendizagem, em publicações da área de Modelagem Matemática, ainda é pouco discutida e,

¹ Universidade Estadual de Londrina – Londrina – Paraná -Brasil • ✉ e-mail: lourdes@uel.br • ORCID <http://orcid.org/0000-0001-8952-1176>

² Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Sudeste de Minas Gerais, IF SUDESTE MG— Brasil • ✉ jeferson.seki@ifsudestemg.edu.br • ORCID <https://orcid.org/0000-0002-3543-5421>

em algumas situações, discussões a seu respeito são desprovidas de bases epistemológicas e filosóficas que circundam o seu significado em atividades de modelagem.

No entanto, o uso do termo *aprendizagem* sem a explicitação de como ela é entendida pode obstruir uma visão acerca de sua significação e levar a um esvaziamento epistêmico de sua caracterização, dificultando um esclarecimento qualitativo de elementos que a influenciam e a condicionam no desenvolvimento de atividades de modelagem matemática.

Pode-se ponderar que, o que se pode dizer da aprendizagem não é independente da perspectiva de modelagem em um determinado contexto, bem como dos propósitos das atividades realizadas pelos estudantes neste contexto. De fato, a literatura vem se dedicando há algumas décadas, particularmente a partir do estudo de Kaiser-Messmer (1986), à caracterização de perspectivas, abordagens ou finalidades para a modelagem na sala de aula (Kaiser & Sriraman, 2006; Julie & Mudaly, 2007; Galbraith, 2012; Blum, 2015).

Na presente pesquisa, considerando estas diferentes perspectivas e abordagens caracterizadas para a modelagem matemática na sala de aula, a investigação é orientada pela questão: o que se pode dizer da aprendizagem em atividades de modelagem matemática? As reflexões sobre esta questão são estruturadas mediante uma associação entre caracterizações da aprendizagem e perspectivas de modelagem já reconhecidas na literatura, conforme delineado no texto.

2. Aspectos metodológicos

O ensaio teórico proposto no presente artigo com a finalidade de deliberar sobre o que se pode dizer da aprendizagem em atividades de modelagem matemática inclui, do ponto de vista metodológico, especificamente, três elementos. Primeiramente, é capturada uma caracterização da aprendizagem em modelagem matemática realizada em Seki (2023) e que culmina com a identificação de entendimentos e traços característicos da aprendizagem em material bibliográfico, selecionado pelo autor mediante critérios pré-definidos em sintonia com o que aponta Bryman (2012). Em seguida, uma busca na literatura identifica perspectivas, abordagens e finalidades, reconhecidas na literatura, para a modelagem na sala de aula. Por fim, a presente pesquisa articula os dois elementos anteriores, propondo uma estrutura que associa traços característicos da aprendizagem com finalidades, perspectivas e tipo de atividade, construindo n-uplas (n=4) para essa associação definidas como: (*traço da aprendizagem, finalidade da modelagem, perspectiva de modelagem, tipo de atividade*)

3. Sobre a aprendizagem na modelagem matemática: um olhar sobre entendimentos

A partir de uma investigação dos usos do termo *aprendizagem* na literatura em Modelagem Matemática na Educação Matemática realizada em Seki (2023)³, constata-se diferentes entendimentos e traços característicos associados à aprendizagem em atividades de modelagem matemática, que se associam a distintas bases teóricas e asserções sobre o que é aprendizagem e como os estudantes aprendem, bem como sobre as condições de aprendizagem nessas atividades.

³ O material foi selecionado a partir de uma busca no portal Periódicos no Portal de Periódicos da CAPES, de artigos que possuem a conjunção dos termos “modelagem matemática” E “aprendizagem” ou “*mathematical modelling*” AND “*learning*” AND “*Mathematics Education*”, **publicados nos últimos cinco anos**, até o período de levantamento realizado em fevereiro de 2023 (SEKI, 2023).

Primeiramente, ao direcionar a atenção para bases teóricas em que o entendimento de *aprendizagem* é ancorado, identifica-se que o se pode dizer da aprendizagem pode ter fundamentos cognitivistas, interacionistas ou pragmático-social-linguísticos.

Entendimentos baseados em teorias *cognitivistas* sugerem que a aprendizagem se dá mediante processos cognitivos. Exemplos desses entendimentos foram identificados em Souza (2021) e Melo e Kato (2023) usando pressupostos da teoria da aprendizagem significativa, caracterizada por Ausubel; em Ramírez-Monte, Henriques e Carreira (2021) e Silva e Trindade (2023), buscando indícios de aprendizagem em diferentes etapas de um ciclo de modelagem percorrido pelos estudantes; em Ferri (2018) que identifica estilos de aprendizagem; em López-Reyes, Jiménez-Gutiérrez e Costilla-López (2022) que caracterizam níveis de desenvolvimento cognitivo dos estudantes; em Pires, Costa e Boiago (2020) e Almeida, Silva e Brito (2022) que se referem à aprendizagem a partir dos registros de representação semiótica e de signos usados pelos estudantes.

Baseados em teorias *interacionistas*, entendimentos de aprendizagem consideram que ela se dá nas interações dos estudantes com o meio, com as pessoas. Assim, ancorados no trabalho colaborativo (Borssoi, Silva & Ferruzzi, 2021), na intermediação por ferramentas computacionais considerando o construcionismo contextualizado caracterizado por José Armando Valente (Silva, Silva & Madruga, 2019), nas relações entre professor-estudante-meio sob o ponto de vista da Teoria das Situações Didáticas (TSD) de Guy Brosseau (Littig *et al.*, 2019), indícios de aprendizagem em atividades de modelagem matemática são mencionados.

Os entendimentos com fundamento *pragmático-social-linguístico*, por sua vez, consideram que a aprendizagem é condicionada pela linguagem, cultura e práticas sociais. Neste contexto estudos indicam que: a cultura é uma condição que favorece a aprendizagem matemática, tendo como base teórica a etnomatemática (Supriadi, 2020); que o conhecimento matemático é socialmente construído e a aprendizagem no ambiente escolar depende de uma prática de referência, sob a perspectiva da socioepistemologia (Cantoral, Moreno-Durazo & Caballero-Pérez, 2018); que a aprendizagem matemática é de natureza discursiva, a partir da filosofia da linguagem de Wittgenstein e das ideias de Anna Sfard (Souza & Barbosa, 2019; Sousa & Almeida, 2019); que a aprendizagem consiste em apreensão/aquisição de um modo linguístico, caracterizada a partir de uma atitude fenomenológica (Brito & Almeida, 2021).

O processo analítico dirigido aos relatos de pesquisa ou estudos empíricos selecionados pelo levantamento de Seki (2023) e em que essas bases teóricas foram identificadas, promoveu a caracterização de traços característicos do uso do termo *aprendizagem*. Foram caracterizados sete traços que, em alguma medida, constituem uma rede de modos de entender ou de se referir à aprendizagem em atividades de modelagem matemática.

Um primeiro traço característico identificado nos usos indica que no desenvolvimento de atividades de modelagem matemática *os estudantes aprendem conteúdos matemáticos*. Essa aprendizagem vem associada: a identificação de que a modelagem promove condições que favorecem a aprendizagem (Souza, 2021; Melo & Kato, 2023); ao uso de diferentes registros de representação semiótica proporcionado pela modelagem (Pires, Costa & Boiago, 2020; Almeida, Silva & Brito, 2022); ao uso da matemática para investigar situações da realidade (Silva, Madruga & Silva, 2019; Lowe, Carter & Cooper, 2018); à matematização promovida pela modelagem (Almeida, 2022); ao avanço dos estudantes em diferentes níveis do domínio cognitivo (López-Reyes, Jiménez-Gutiérrez & Costilla-López, 2022); às produções discursivas dos estudantes (Souza & Barbosa, 2019), mediante a um modo linguístico-visual (Brito & Almeida, 2021). Como exemplo desse traço, apresenta-se o excerto:

[...] Isso significa conhecer os parâmetros e variáveis relevantes e sua análise dimensional, entender o significado de cada termo na EDO, aplicar métodos para obter a solução analítica e sua correspondente análise de erro, e interpretando a solução. Implementação de abordagens, como b-learning, pode apoiar os alunos enquanto eles experimentam esses processos cognitivos complexos e melhorar a compreensão e uso de conceitos matemáticos (López-Reyes, Jiménez-Gutiérrez & Costilla-López, 2022, p. 3).

Um segundo traço característico é que *os estudantes aprendem conteúdos de outras áreas do conhecimento*. Considera-se que ao desenvolver atividades de modelagem matemática, os estudantes aprendem não somente matemática, mas também conteúdos de outras áreas (Física, Finanças, associadas ao cotidiano, dentre outras) uma vez que se faz necessário investigar situações que não são, a princípio, internas à matemática (Silva, Madruga & Silva, 2019; Borssoi, Silva & Ferruzzi, 2021; Castro & Almeida, 2023).

As três fases da Modelagem propiciaram aos alunos a aprendizagem não somente em Matemática, mas em outra área - a Física -, pois foi necessário empreender conhecimentos dessa área para que o processo evoluísse. Nessa direção, destaca-se também uma diferenciação no relacionamento entre professor e aluno, visto que as interações entre eles geraram novas aprendizagens (Silva, Madruga & Silva, 2019, p. 114).

O terceiro traço característico identificado é que *os estudantes aprendem a resolver problemas* usando modelagem matemática, associando a essa resolução o desenvolvimento de competências relativas ao *fazer* modelagem expresso nos denominados ciclos de modelagem. (Ramírez-Montes, Henriques & Carreira, 2021; Cahyono *et al.*, 2020; Silva & Trindade, 2023):

Competências de modelagem mais fortes foram evidentes nos grupos que realizaram rotas de modelagem não linear, pois esses grupos refletiram sobre os procedimentos matemáticos usados para desenvolver o modelo e usaram adequadamente seus conhecimentos de SLE [Sistemas de Equações Lineares], matriz aumentada e conjunto de soluções em \mathbb{R}_n . Essas competências não foram reveladas pela maioria dos grupos que realizaram percursos lineares, o que reflete suas dificuldades em criar modelos reais, principalmente associadas a uma compreensão limitada do contexto, resultando em uma interpretação inadequada das informações fornecidas (Ramírez-Montes; Henriques; Carreira, 2021, p. 19).

Que *os estudantes aprendem a ser críticos e reflexivos* é um quarto traço característico da aprendizagem em atividades de modelagem matemática. Esta aprendizagem consiste no desenvolvimento da capacidade de tomada de decisão, por meio da desmitificação da imagem de uma matemática neutra, da compreensão do papel da matemática nos debates sociais e na compreensão do mundo, da valorização da matemática, do conhecimento reflexivo, da criatividade ao resolver problemas de esferas sociais, políticas e econômicas (Martins & Kato, 2023; Araújo & Lima, 2023; Littig *et al.*, 2019). Um exemplo da indicação desse traço é a citação:

A modelagem matemática, sob a perspectiva sociocrítica, se sustenta num ambiente de problematização e investigação e as intencionalidades matemáticas do professor podem não estar bem definidas. [...] Portanto, a aprendizagem é reconhecida pela

capacidade do aluno de se envolver em discussões matemáticas, técnicas e reflexivas na busca da solução para o problema (Littig *et al.*, 2019, p. 10).

O quinto traço característico considera que em atividades de modelagem, *os estudantes desenvolvem habilidades como comunicação, argumentação e colaboração*. O trabalho em grupo é considerado como um elemento importante para a aprendizagem, na medida que favorece o compartilhamento e a socialização de conhecimentos, a confiança dos estudantes para explorar suas dificuldades e opiniões e auxilia no desenvolvimento de habilidades técnicas transversais como falar em público (Borssoi, Silva & Ferruzzi, 2021; Huf, Burak & Pinheiro, 2021; Silva, Madruga & Silva, 2019). Silva, Madruga e Silva (2019), por exemplo, ponderam que:

O trabalho em grupo foi primordial, uma vez que oportunizou a partilha de conhecimento e socialização do que estava sendo aprendido. Essa aprendizagem partiu de uma temática familiar aos alunos: esportes olímpicos, que possibilitou relacionar um conteúdo matemático a um contexto real. (Silva, Madruga & Silva, 2019, p. 114).

Um sexto traço característico é que *os estudantes aprendem a tomar decisões frente às práticas escolares*, gerando uma mudança de atitude em relação à dinâmica de sala de aula, tornando-se sujeitos *ativos na sua construção de conhecimento* e corresponsáveis pela sua aprendizagem (Souza, 2021; Huf, Burak & Pinheiro, 2021; Silva, Madruga & Silva, 2019, Taranto *et al.*, 2022). Taranto *et al.* (2022), por exemplo, apontam que:

O processo de aprendizagem caracteriza-se por uma aprendizagem autônoma e autocontrolada, ou seja, os alunos decidem suas próprias formas de abordar o problema e o fazem sem a intervenção do professor da sala de aula (Taranto *et al.*, 2022, p. 37).

Por fim, um sétimo traço característico não se refere especificamente ao conteúdo da aprendizagem, mas ao meio e as condições que para ela colaboram, sinalizando que *a aprendizagem em atividades de modelagem matemática é mediada pelo interesse e pela motivação em aprender* com essas atividades bem como na disposição para fazê-lo relativamente à uma dada situação-problema, associá-la a aspectos culturais ou fomentar o uso de recursos da tecnologia digital (Huf, Burak & Pinheiro, 2021; Rehfeldt *et al.*, 2018; Supriadi, 2020). Huf, Burak e Pinheiro (2021) neste caso, afirmam:

A percepção de um estudante de que a turma se empenhou mais, evidencia que quando os estudantes trabalham a partir do seu interesse eles são motivados para desenvolver as atividades. [...] Para os estudantes, as aulas de matemática, mediadas pela metodologia da Modelagem Matemática na escola do campo, tornam-se mais interessantes e atrativas, quando comparada a aulas de forma tradicional. Muitos afirmam não gostar da Matemática, mas que com Modelagem Matemática identificam-se mais com esta área do conhecimento, por ver a utilização no contexto da vida do campo e se sentirem participantes das tomadas de decisões como autores do processo de aprendizagem desde a escolha do tema (Huf, Burak & Pinheiro, 2021, p. 468).

Embora as discussões sobre a aprendizagem na modelagem matemática se deem a partir de diferentes bases teóricas e traços característicos dessa aprendizagem tenham sido

identificados, não se pode considerá-los excludentes. Ao invés disso, inter-relações podem ser vislumbradas. No presente texto, em particular, a reflexão é dirigida à associação entre traços da aprendizagem e as perspectivas de modelagem bem como propósitos de sua introdução na sala de aula.

4. Sobre os modos de ver a modelagem matemática

A introdução de atividades de modelagem nas aulas possui uma estrutura voltada para um propósito. Considerando as sutilezas que diferenciam estas estruturas e estes propósitos, no decorrer do tempo vem havendo um esforço na comunidade de modelagem matemática pela caracterização de perspectivas e abordagens para a modelagem matemática na sala de aula.

Uma iniciativa dessa caracterização foi apresentada por Kaiser-Messmer (1986). A autora caracteriza duas perspectivas para a modelagem na sala de aula: uma, denominada *científica humanista*, tendo como foco a formação matemática dos alunos a qual vai acontecendo na medida em que eles desenvolvem habilidades para criar ou interpretar relações entre Matemática e realidade e vem, segundo a autora, respaldada no pensamento de Hans Freudenthal; outra é aquela em que se dá ênfase às habilidades dos alunos para usar a Matemática na proposição e resolução de problemas da realidade e é reconhecida como *perspectiva pragmática*, tendo suas origens nas argumentações de Henry Pollak a favor da modelagem nas aulas de matemática.

Por muito tempo, nos relatos de pesquisa ou de práticas educacionais, a modelagem na sala de aula era alocada a uma dessas perspectivas. Entretanto, no ano de 2006 a mesma autora, agora em parceria com Bharath Sriraman (Kaiser e Sriraman 2006), a partir de uma análise de diferentes maneiras de fazer modelagem percebidas nas escolas alemãs e de uma busca na literatura em geral, caracterizou cinco perspectivas de modelagem de acordo com seu propósito na sala de aula: realística (o foco é a resolução de um problema real); contextual (visa introduzir a modelagem para contextualizar conteúdos matemáticos); educacional (visa integrar situações-problema autênticas nas aulas de matemática com o objetivo de desenvolver os conteúdos matemáticos curriculares); sócio-crítica (o foco é a análise dos modelos matemáticos e seu papel na sociedade); epistemológica (situações-problema são estruturadas para gerar o desenvolvimento de conceitos matemáticos na sala de aula). Além disso, também foi caracterizada pelos autores uma meta-perspectiva, denominada cognitiva, considerando que processos cognitivos permeiam as atividades em todas as demais perspectivas.

De outra maneira, Julie e Mudaly (2007) e, posteriormente, Galbraith (2012), associam o uso da modelagem matemática com propósitos curriculares. Estes autores partem do entendimento de que duas abordagens genéricas para a modelagem são possíveis na sala de aula: modelagem como veículo e modelagem como conteúdo. Esta classificação considera diferentes propósitos, perspectivas e finalidades para a modelagem. Quando ela é utilizada como veículo, seu objetivo principal é a aprendizagem da matemática que consta do currículo escolar, ou seja, a modelagem é utilizada como um recurso para necessidades curriculares ou propósitos educacionais. Quando utilizada como conteúdo, a modelagem se associa com dois objetivos: a construção de modelos para investigar fenômenos naturais e sociais sem a prescrição de conteúdos matemáticos; e o desenvolvimento de habilidades de modelagem pelos estudantes a fim de torná-los aptos para acionar seus conhecimentos matemáticos e resolver problemas. Diferentemente de Kaiser e Sriraman (2006), Galbraith (2012) apresenta um novo olhar para o termo *perspectiva*, entendendo que os diferentes propósitos de uso da modelagem não configuram diferentes perspectivas, mas que estes se relacionam com as duas abordagens genéricas por ele caracterizadas.

Blum (2015), por sua vez, sugere quatro finalidades para a introdução da modelagem nas aulas: (1) finalidade pragmática: a modelagem visa conhecer situações da realidade cuja investigação não é possível em atividades intra-matemáticas; (2) finalidade formativa: a modelagem desenvolve competências específicas; um exemplo é a competência de argumentação que se desenvolve quando situações da realidade são estudadas mediante conceitos ou métodos da matemática; (3) finalidade cultural: as relações com o mundo extra-matemático, promovidas pelas atividades de modelagem, são indispensáveis para uma imagem adequada da matemática como ciência em um sentido abrangente; (4) finalidade psicológica: exemplos do mundo real podem contribuir para aumentar o interesse dos estudantes pela matemática, para motivá-los a estruturar o conteúdo matemático, para melhor entendê-lo e retê-lo por mais tempo.

Segundo (2015), de modo geral, existe uma dualidade na caracterização, destas finalidades. O autor adverte que a finalidade pragmática lida com a matemática como um auxílio para a compreensão da realidade; nas outras três finalidades, a situação da realidade fomenta o ensino e a aprendizagem da matemática. Ampliando o quadro de perspectivas de modelagem apresentado em Kaiser e Sriraman (2006), Blum (2015) defende que podem se caracterizar perspectivas para a modelagem por meio do par (*finalidade (ou objetivo) da modelagem | uso de um exemplo adequado*), associando a finalidade da modelagem com as atividades escolhidas para a sala de aula. O autor caracteriza seis pares e os associa as perspectivas de modelagem: (pragmática | autêntico) refere-se à modelagem realística; (formativa | cognitivamente rico) diz respeito à modelagem educacional; (cultural com uma intenção emancipatória | autêntico) associa-se à modelagem sócio-crítica; (cultural em relação à matemática | epistemologicamente rico) refere-se à modelagem epistemológica; (psicológica com intenção de motivar os estudantes | motivacional) caracteriza a perspectiva pedagógica para a modelagem; e (psicológica | uso da matemática) leva o autor a caracterizar a perspectiva contextual para a modelagem matemática. Nesta organização, Werner Blum acrescenta às perspectivas de Kaiser e Sriraman (2006) uma perspectiva, denominada por ele de *pedagógica*, em que, na sala de aula, a modelagem matemática é um meio usado pelo professor para promover a motivação para lidar com a matemática na sala de aula.

As classificações de Blum (2015), Galbraith (2012) e Kaiser e Sriraman (2006) também não são excludentes. É possível ponderar que em cada uma delas as quatro finalidades da modelagem apontadas por Blum (2015) (pragmática, formativa, cultural e psicológica) podem ser vislumbradas, sendo, entretanto, adequado que o professor promova a introdução da modelagem na sala de aula à luz do par (finalidade | atividade adequada).

A partir desses diferentes modos de ver a modelagem matemática (denominados pelos autores de perspectivas ou abordagens) na sala de aula é que a presente pesquisa procura promover reflexões sobre a aprendizagem na modelagem matemática.

5. Um diálogo entre aprendizagem e modos de ver na modelagem matemática

Por um lado, a aprendizagem em atividades de modelagem matemática, discutida a partir de diferentes bases teóricas, conforme apresentado em seção anterior, é associada à matematização de situações-problema da realidade e agrega aspectos cognitivos, sociais e culturais, extrapolando o domínio da matemática. Além disso, o que pode se tornar aprendido inclui aprendizagem acerca do fenômeno, acerca dos encaminhamentos para a resolução do problema e acerca da matemática.

Particularmente, no texto, são elucidados sete traços característicos dessa aprendizagem evidenciados na pesquisa de Seki (2023). (1) Os estudantes aprendem conteúdos matemáticos;

(2) Os estudantes aprendem conteúdos de outras áreas do conhecimento; (3) Os estudantes aprendem a resolver problemas; (4) Os estudantes aprendem a ser críticos e reflexivos; (5) Os estudantes desenvolvem habilidades de comunicação e argumentação; (6) Os estudantes aprendem a tomar decisões, tornando-se sujeito ativo na sua construção de conhecimento; (7) Caracterizado como meta-traço, a aprendizagem em atividades de modelagem é mediada pelo interesse e pela motivação dos estudantes.

Por outro lado, para a modelagem matemática na sala de aula são identificados diferentes modos de ver, associando-se perspectivas, finalidades e abordagens. O que se pode observar relativamente a estes modos de ver é que a própria conceitualização do que é uma *perspectiva* vai se diversificando nas pesquisas. Kaiser e Sriraman (2006) referem-se a cinco modos de entender, referidos como perspectivas, em relação à modelagem na sala de aula (realística, contextual, educacional, sócio-crítica e epistemológica) e uma meta-perspectiva denominada de cognitiva; Galbraith (2012) agrupa os interesses dessas perspectivas e caracteriza duas abordagens mais amplas (modelagem como veículo e modelagem como conteúdo); Blum (2015), por sua vez, para caracterizar uma perspectiva, agrega finalidades da modelagem e especificidades das atividades usadas na sala de aula, construindo pares (finalidade | atividade adequada), adicionando às até então caracterizadas, uma perspectiva denominada *pedagógica*.

Levando em consideração este panorama para a modelagem matemática e a aprendizagem em atividades dessa natureza, o que se pretende trazer ao debate na presente pesquisa é a não independência de modos de ver e de fazer a modelagem e a aprendizagem que se almeja para os estudantes nessas atividades. Assim, considerando os traços da aprendizagem e os modos de ver e de fazer modelagem, propomos que, para deliberar sobre a aprendizagem pretendida, sobre as possibilidades de sua ocorrência ou sobre possibilidades do foco do professor ao introduzir atividades de modelagem, é possível considerar a n-upla⁴ (n=4) assim definida: (*traço da aprendizagem, finalidade da modelagem, perspectiva de modelagem, tipo de atividade*). No Quadro 1, apresentamos a construção dessas n-uplas, associando estes aspectos, visando expressar o que se pode dizer da *aprendizagem* em atividades de modelagem matemática.

Quadro 1: Associação entre os traços de aprendizagem e a finalidade, perspectiva e tipo de atividade

(<i>traço da aprendizagem,</i>	<i>finalidade da ,</i> <i>modelagem</i>	<i>perspectiva da ,</i> <i>modelagem</i>	<i>tipo de atividade</i>)
aprendizagem da matemática	formativa	educacional	matematicamente rica
aprendizagem extra matemática	pragmática	realística	epistemologicamente rica
aprendizagem da resolução de problemas	pragmática	realística	autêntica ⁵

⁴ N-upla é uma sequência ordenada de n elementos, que pode ser definida pela recursão do par ordenado.

⁵ Atividades autênticas permitem refletir sobre o que está acontecendo no mundo real, além de ser uma adaptação da realidade sob condições controladas, uma busca pela semelhança com a realidade. (Carreira & Baioa, 2018). Uma discussão abrangente sobre a autenticidade em atividades de modelagem matemática é apresentada em Almeida e Omodei (2022).

estímulo à criticidade e reflexão	formativa	sócio-crítica	com alto índice de autenticidade
desenvolvimento de habilidades de comunicação e argumentação	cultural	pedagógica	autêntica epistemologicamente rica
	formativa	epistemológica	
movimentos de tomada de decisão e auto-regulação	cultural	sócio-crítica realística	autêntica epistemologicamente rica
aprendizagem mediada pelo interesse e pela motivação (meta-traço)	psicológica	educacional	matematicamente rica
		contextual	autêntica
		epistemológica	epistemologicamente rica
		pedagógica	altamente motivacional
		sócio-crítica	

Fonte: Os autores.

A associação estruturada conforme indica o Quadro 1, sinaliza que as possibilidades para a aprendizagem em atividades de modelagem matemática não são independentes de um modo de ver e de fazer nessas atividades. Elementos como os propósitos do professor, os interesses dos estudantes e as intermediações com o contexto em que a atividade se dá, balizam a perspectiva e as finalidades e devem orientar a introdução das atividades na aula. A aprendizagem é então decorrente destas condições que orientam o desenvolvimento da atividade de modelagem.

Na n-upla (*aprendizagem da matemática, formativa, educacional, matematicamente rica*) a aprendizagem da matemática associa-se à finalidade formativa e à perspectiva educacional da modelagem matemática, visando a aprendizagem de conteúdos matemáticos curriculares por meio do uso de conceitos ou métodos matemáticos na investigação de situações da realidade. As atividades são consideradas matematicamente ricas, propiciando a interação entre conhecimentos prévios e novos conhecimentos (Souza, 2021, Melo & Kato, 2023), o uso de diferentes registros de representação semiótica (Pires, Costa & Boiago, 2020; Almeida, Silva & Brito, 2022), o uso de regras matemáticas em produções discursivas dos estudantes (Souza & Barbosa, 2019), um modo linguístico-visual de expressar a aprendizagem de conceitos matemáticos (Brito & Almeida, 2021). Esses aspectos decorrem da matematização da situação-problema, em que se faz a estruturação matemática da situação investigada (Almeida, 2022).

Para (*aprendizagem extra matemática, pragmática, realística, epistemologicamente rica*) considera-se que em atividades de modelagem matemática, com finalidade pragmática e perspectiva realística, os estudantes podem aprender não somente matemática, mas também conteúdos de outras áreas do conhecimento, enquanto resolvem situações-problema da realidade. As atividades são epistemologicamente ricas, promovendo o uso de conhecimentos associados à situação da realidade, em articulação com conhecimentos matemáticos com foco na resolução da situação-problema (Silva, Madruga & Silva, 2019; Borssoi, Silva & Ferruzzi, 2021; Almeida & Castro, 2023).

Na n-upla (*aprendizagem da resolução de problemas, pragmática, realística, autêntica*), ao se envolverem com atividades de modelagem matemática considerando-se a finalidade pragmática e a perspectiva realística, os estudantes aprendem a resolver problemas autênticos,

por meio do desenvolvimento de competências identificadas a partir de um ciclo de modelagem matemática. As atividades são autênticas tanto em relação a natureza da situação-problema, quanto ao processo do fazer modelagem matemática (Almeida & Omodei, 2022) e podem promover o desenvolvimento de competências de modelagem matemática (Ramírez-Montes, Henriques & Carreira, 2021; Cahyono *et al.*, 2020; Silva & Trindade, 2023).

Atividades de modelagem matemática, com finalidade formativa, podem promover o desenvolvimento da criticidade e da reflexão como competências específicas que se associam à perspectiva sócio-crítica, em que se foca no papel dos modelos matemáticos na sociedade mediante a associação indicada na n-upla (*estímulo à criticidade e reflexão, formativa, sócio-crítica, com alto índice de autenticidade*). As atividades aí incluídas possuem alto índice de autenticidade por possibilitar a reflexão sobre aspectos concernentes ao mundo real (Carreira & Baioa, 2018), contribuindo para a desmitificação da imagem de uma matemática neutra e do seu papel em diferentes esferas, sejam elas sociais, políticas ou econômicas (Martins & Kato, 2023; Araújo & Lima, 2023; Littig *et al.*, 2019).

Na n-upla (*desenvolvimento de habilidades de comunicação e argumentação, cultural/formativa, pedagógica/epistemológica, autêntica/ epistemologicamente rica*) o desenvolvimento de habilidades de comunicação e argumentação como traço característico da aprendizagem pode ser associada à finalidade formativa, em que tanto a comunicação quanto a argumentação são desenvolvidas quando situações da realidade são estudadas mediante conceitos ou métodos da matemática e à finalidade cultural, visando o desenvolvimento de argumentos matemáticos acerca da matemática como uma ciência em um sentido abrangente. Na perspectiva pedagógica, esse traço se evidencia no propósito de promover a confiança dos estudantes para lidar com suas dificuldades e, na perspectiva epistemológica, em que as situações-problema podem promover o desenvolvimento de conceitos matemáticos em aula e, conseqüentemente, a argumentação e a comunicação matemática. As atividades são autênticas e epistemologicamente ricas e se orientam pela socialização e compartilhamento de conhecimentos dos estudantes acerca de modos de ver a situação-problema investigada, geralmente a partir da interação entre estudantes e estudantes e professor (Borssoi, Silva & Ferruzzi, 2021; Huf, Burak & Pinheiro, 2021; Silva, Madruga & Silva, 2019).

Na associação (*movimentos de tomada de decisão e auto-regulação, cultural, sócio-crítica/realística, autêntica/epistemologicamente rica*), a aprendizagem em atividades de modelagem matemática se caracteriza por movimentos de tomada de decisão e de auto-regulação dos estudantes sobre o próprio processo de aprendizagem, frente às relações com o mundo extra-matemático, em uma finalidade cultural, e ao papel dos modelos matemáticos na tomada de decisões na sociedade, na perspectiva sócio crítica. As atividades são autênticas e epistemologicamente ricas, cujo uso de conhecimentos da situação da realidade e de conhecimentos matemáticos formam um arcabouço que subsidia a tomada de decisões em atividades de modelagem matemática (Souza, 2021; Huf, Burak & Pinheiro, 2021; Silva, Madruga & Silva, 2019, Taranto *et al.*, 2022).

Por fim, a n-upla (*aprendizagem mediada pelo interesse e pela motivação (meta-traço), educacional/contextual/epistemológica/pedagógica, matematicamente rica/ autêntica/ epistemologicamente rica/ altamente motivacional*) considera o interesse e a motivação dos estudantes como uma condição para a aprendizagem em modelagem matemática. Como um meta-traço, associa-se à finalidade psicológica, em que o uso de situações da realidade pode contribuir para aumentar o interesse dos estudantes pela matemática e gerar motivação para a aprendizagem, permeando as diferentes perspectivas e os tipos de atividades das outras n-uplas.

Levar em conta o interesse dos estudantes é considerado por diversos autores como um aspecto fundamental para o desenvolvimento de atividades de modelagem matemática e para a aprendizagem nessas atividades (Huf, Burak & Pinheiro, 2021; Rehfeldt *et al.*, 2018; Supriadi, 2020).

Neste sentido, para dizer da aprendizagem em atividades de modelagem matemática é preciso ponderar que as circunstâncias e as condições em que as atividades se dão oferecem o repertório para sua ocorrência e sua qualificação.

6 Considerações finais

Neste artigo, dirige-se a atenção para a questão: o que se pode dizer da *aprendizagem* em atividades de modelagem matemática? A partir de traços característicos da aprendizagem em atividades de modelagem matemática identificados em Seki (2023), propõe-se uma associação entre esses traços e diferentes modos de ver e fazer modelagem matemática, caracterizados por perspectivas, finalidades e abordagens que se diversificam no decorrer das pesquisas (Blum, 2015, Galbraith, 2012; Kaiser & Sriraman, 2006).

Como resultado, são estruturadas sete n-uplas ($n=4$), associando (traço de aprendizagem, finalidade da aprendizagem, perspectiva da modelagem, tipo de atividade), que relacionam traços de aprendizagem em atividades de modelagem matemática (aprendizagem da matemática; aprendizagem extra matemática; aprendizagem da resolução de problemas; estímulo à criticidade e reflexão, desenvolvimento de tomadas de decisão e auto-regulação; aprendizagem mediada pelo interesse e pela motivação (meta-traço)), com finalidades da modelagem (formativa, pragmática, cultural, psicológica), perspectivas de modelagem (educacional, realística, sócio-crítica, pedagógica, contextual, epistemológica) e tipos de atividades (matemática rica, epistemologicamente rica, autêntica, com alto índice de autenticidade, altamente motivacional, educacional, realística).

As n-uplas caracterizadas propõe que a aprendizagem em atividades de modelagem matemática não é independente dos modos de ver e fazer modelagem matemática e se dá a partir dos propósitos do professor e do interesse dos alunos, bem como da estrutura subjacente ao desenvolvimento das atividades em diferentes perspectivas e abordagens. Os traços característicos formam diferentes facetas da aprendizagem e podem ser qualificados e discutidos a partir de diversas condições e circunstâncias em que as atividades de modelagem matemática são desenvolvidas. Tais n-uplas não são, todavia, excludentes uma vez que diferentes traços característicos podem ser sinalizados, em maior ou em menor grau, a depender da finalidade e da perspectiva do desenvolvimento de atividades de modelagem matemática em sala de aula. Entretanto, elas podem orientar a introdução desse tipo de atividades na sala de aula, atuando como subsídio para professores e pesquisadores que se interessam pela modelagem matemática e almejam explorar a aprendizagem em atividades de modelagem, considerando especificidades do contexto e das circunstâncias em que essa introdução se dá.

Não obstante essa estruturação, propondo a associação entre traços da aprendizagem e modos de fazer modelagem, suas finalidades e tipos de atividades na sala, a aprendizagem em atividades de modelagem matemática constitui uma totalidade que inclui elementos cognitivos, sociais, culturais, psicológicos, entre outros. As condições para sua ocorrência, entretanto, podem se fortalecer mediante esta associação. Assim, pode-se falar de uma epistemologia da aprendizagem em atividades de modelagem matemática em que as diferentes nuances a ela associadas são articuladas.

Referências

- Almeida, L. M. W. de. (2022). Uma abordagem didático-pedagógica da modelagem matemática. *Vidya*, 42(2), 121-145.
- Almeida, L. M. W.; Silva, K. A. & Brito, D. dos S. (2022). Interface Didática entre Modelagem Matemática e Semiótica. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 36 (73), 777-800.
- Almeida, L. M. W. & Omodei, L. B. C. (2022). Autenticidade em Atividades de Modelagem Matemática: em busca de um design. *Educação Matemática Pesquisa*, 24(3), 108-144.
- Almeida, L. M. W & Castro, E. M. V. (2023). Metacognitive strategies in mathematical modelling activities: structuring an identification instrument. *REDIMAT - Journal of Research in Mathematics Education*, 12, 210-228.
- Almeida, L. M. W; Silva, K.A. P.& Ramos, D. C. (2018). Sobre ensinar e aprender o 'fazer' modelagem matemática. In: Anais do VII Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática, (VII SIPEM). Foz do Iguaçu: SBEM, pp.1-12.
- Almeida, L. M. W; Seki, J. T P. & Martins, B. O. (2021). Critérios de compreensão em atividades de Modelagem Matemática: uma perspectiva Wittgensteiniana. In: Anais do Seminário Internacional de Educação Matemática (VIII SIPEM), Rio de Janeiro: SBEM, pp. 1-15.
- Araújo, J. L. & Lima, F. H. (2023). Modelagem matemática e educação matemática crítica: uma interlocução possível. *Vidya*, 43(2), 267-286.
- Blum, W. (2015) Quality teaching of mathematical modelling: What do we know, what can we do? In: S. J. Cho (Ed). *The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education: Intellectual and Attitudinal Changes*. (pp. 73-96). NY: Springer.
- Borssoi, A. H.; Silva, K. A. P. & Ferruzzi, E. C. (2021). Aprendizagem colaborativa no contexto de uma atividade de modelagem matemática. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 35, 937-958.
- Braga, R. M. (2015). *Aprendizagem em Modelagem Matemática pelas Interações dos Elementos de Um Sistema de Atividade na Perspectiva da Teoria da Atividade de Engeström*. 2015. 133f. Tese (Doutorado em Educação em Ciências e Matemática). Universidade Federal do Pará. Belém, PA.
- Braz, B. C. (2014). *Contribuições da Modelagem Matemática na constituição de Comunidades de Prática Locais: Um estudo com alunos do Curso de Formação de Docentes*. 2014, 185f. Dissertação (Mestrado em Educação para o Ensino de Ciências e Matemática). Universidade Estadual de Maringá, Maringá, PR.
- Brito, D. S. *Aprender Geometria em Práticas de Modelagem Matemática: Uma Compreensão Fenomenológica*. 2018. 205f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática). Universidade Estadual de Londrina, Londrina, PR.
- Brito, D. S. & Almeida, L. M. W. (2021). Práticas de modelagem matemática e dimensões da aprendizagem da geometria. *Actualidades Investigativas en Educación*, 21(1), 169-198.
- Bryman, A. (2012). *Social research methods* (4. ed.). Oxford: Oxford University Press, 2012.
- Carreira, S., & Baioa, A. M. (2018). Mathematical modelling with hands-on experimental tasks: On the student's sense of credibility. *ZDM*, 50(1), 201-215.
- Cahyono, A. N.; Sukestiyannro, Y. L.; Asikin, M.; Miftahun, M.; Ahsan, M. G. K & Ludwig, M. (2020). Learning Mathematical Modelling with Augmented Reality Mobile Math Trails Program: How Can It Work? *Journal on Mathematics Education*, 11(2), 181-192.

- Cantoral, R.; Moreno-Durazo, A. & Caballero-Pérez, M. (2018). Socio-epistemological research on mathematical modelling: An empirical approach to teaching and learning. *ZDM*, 50, 77-89.
- Castro, E. M. V. & Almeida, L. M. W. (2023). A natureza individual ou colaborativa de estratégias metacognitivas e seus desdobramentos para a modelagem matemática. *Acta Scientiae*, 25(3), p. 1-25, 2023.
- Galbraith, P. (2012). Models of modelling: genres, purposes or perspectives. *Journal of Mathematical Modelling and Application*, 1(5), 3-16.
- Ferri, R. B. (2018). *Learning how to teach mathematical modeling in school and teacher education*. Springer.
- Gomes, J. C. S. P.; Kowalek, R. M. & Almeida, L. M. W. (2022). Concepções de Aprendizagem na Modelagem Matemática: um olhar para dois eventos da área. In: *Anais do 9º Encontro Paranaense de Modelagem na Educação Matemática* (pp. 1-14). União da Vitória, PR.
- Huf, S. F.; Burak, D. & Pinheiro, N. A. M. (2021). Modelagem matemática no ensino e aprendizagem da educação do campo. *Educere et Educare*, (16)38, 451-475.
- Julie, C. & Mudaly, V. (2007). Mathematical Modelling of Social Issues in School Mathematics in South Africa. In W. Blum, et al. (Eds.). *Modelling and Applications in Mathematics Education*. (pp. 503-510). Boston, MA: Springer.
- Kaiser, G. & Sriraman, B. (2006). A global survey of international perspectives on modeling in mathematics education. *ZDM*, 38(3), 302-310.
- Kaiser-Messmer, G. (1986). *Anwendungen im Mathematikunterricht. Band 2 – Empirische Untersuchungen*. Bad Salzdetfurth: Franzbecker.
- Khusna, H. & Heryaningsih, N. Y. (2018). The influence of mathematics learning using SAVI approach on junior high school students' mathematical modelling ability. *Journal of Physics: Conference Series*, 948(1), 1-4.
- López-Reyes, L. J.; Jiménez-Gutiérrez, A. L. & Costilla-López, D. (2022). The Effects of Blended Learning on the Performance of Engineering Students in Mathematical Modeling. *Education Sciences*, 12(931), 1-11.
- Lowe, J.; Carter, M. & Cooper, T. (2018). Mathematical modelling in the junior secondary years: An approach incorporating mathematical technology. *Australian Mathematics Teacher*, 74(1), 4-12.
- Littig, J.; Lorenzoni, L. L.; Rezende, O. L. & Sousa, M. A. V. F. (2019). A Modelagem Matemática na perspectiva sociocrítica e a Teoria da Situação Didática: identificando aproximações potencializadores da aprendizagem e do desenvolvimento do conhecimento reflexivo. *RENCIMA: Revista de Ensino de Ciências e Matemática*, 10(1), 1-13.
- Melo, P. A. P. & Kato, L. A. (2023) Aprendizagem significativa e modelagem matemática: uma atividade sobre a temática depressão. *Contribuciones A Las Ciencias Sociales*, 16(8), 11455-11469.
- Martins, A. L. & Kato, L. (2023). A. um olhar para o programa agrinho como potencial para o desenvolvimento de atividades de modelagem matemática na perspectiva crítica. *EDUCERE: Revista de Educação da UNIPAR*, 23(2), 1018-1039.
- Niss, M. & Højgaard, T. (2019). Mathematical competencies revisited. *Educational Studies in Mathematics*, 102(1), 9–28.



- Pires, R. F.; Costa, C. S. & Boiago, C. E. P. (2020). Modelagem matemática para o estudo de função afim: uma possibilidade de aprendizagem a partir da conta de água. *INTERMATHS*, 1(1), 77-100.
- Ramírez-Montes, G.; Henriques, A. & Carreira, S. (2021). Undergraduate students' learning of linear algebra through mathematical modelling routes. *Canadian Journal of Science, Mathematics and Technology Education*, 21(2), 357-377.
- Rehfeldt, M. J. H.; *et al.* (2018). Modelagem matemática no ensino médio: uma possibilidade de aprendizagem a partir de contas de água. *RENCIMA: Revista de Ensino de Ciências e Matemática*, 9(1), 103-121.
- Seki, J. T. P. (2023). *Uma visão panorâmica da aprendizagem em modelagem matemática*. 2023. 247f. Tese (Doutorado em Ensino de Ciências e Educação Matemática). Universidade Estadual de Londrina, Londrina, PR.
- Silva, S. C.; Silva, F. S. & Madruga, Z. E. F. (2019). Software Modellus e Modelagem Matemática: um estudo sobre a aprendizagem de função quadrática. *Revista Thema*, 16(4), 795-809.
- Silva, S. C.; Madruga, Z. E. & Silva, F. dos S. (2019). Modelagem Matemática como apoio ao ensino e aprendizagem de função quadrática. *Revista de Educação Matemática*, 16(21), 101-118.
- Silva, K. A. P. & Trindade, S. L. (2023). Componentes da aprendizagem evidenciados nas fases de uma atividade de modelagem matemática. *Quadrante*, (32)1, 50-76.
- Souza, E. G. & Barbosa, J. C. (2014). Contribuições teóricas sobre a aprendizagem matemática na modelagem matemática. *Zetetiké*, 22(41), 31-58.
- Souza, E. G. & Barbosa, J. C. (2019). A aprendizagem de regras do sistema matemático escolar na modelagem matemática. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 22(1), 39-66.
- Souza, J. S. S. (2021). Modelagem Matemática e Aprendizagem Significativa: uma relação subjacente. *Jornal Internacional de Estudos em Educação Matemática*, 14(2), 241-247.
- Sousa, B. N. P. A. & Almeida, L. M. W. (2019). Apropriação Linguística e Significado em Atividades de Modelagem Matemática. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 33(65), 1195-1214.
- Supriadi, S. (2020). Pre-service elementary teachers: analysis of the disposition of mathematical modeling in ethno mathematics learning. *Ilkogretim Online*, 19(3), 1407-1421.
- Taranto, E.; Colajanni, G.; Gobbi, A.; Picchi, M. & Raffaele, A. (2022). Fostering students' modelling and problem-solving skills through Operations Research, digital technologies and collaborative learning. *International Journal Of Mathematical Education In Science And Technology*, 1-42.