

Intervenção docente em atividades de modelagem matemática e o uso de andaimés¹

Teacher intervention in mathematical modeling activities and the scaffolding

Lourdes Maria Werle de Almeida²

Rosângela Maria Kowalek³

Flavio Lima de Souza⁴

Resumo: No artigo investiga-se a intervenção docente mediada por andaimés em atividades de modelagem matemática. O quadro teórico inclui o *scaffolding* em modelagem e discussões relativas à intervenção do professor em atividades dessa natureza. Uma pesquisa empírica inclui dois cenários: modelagem em aulas de Matemática no Ensino Médio e modelagem em uma disciplina de Modelagem Matemática em um curso de Licenciatura em Matemática. Os andaimés usados nos cenários são um plano de resolução e uma ficha de acompanhamento, respectivamente. A metodologia segue orientações da abordagem qualitativa e a análise resulta na identificação de especificidades da intervenção em cada cenário. Resultados apontam que a intervenção mediada por andaimés se torna eficiente na medida em que se ajusta às necessidades dos alunos.

Palavras-chave: Modelagem Matemática. Andaimés. Intervenção do professor.

Abstract: In this article, teaching intervention mediated by scaffolding in mathematical modeling activities is investigated. The theoretical framework includes scaffolding in modeling and discussions regarding the teacher's intervention in activities of this nature. An empirical research includes two scenarios: modeling in Mathematics classes in High School and modeling in a Mathematics Modeling discipline in a Mathematics Degree course. The scaffolding used in the scenarios is a resolution plan and a follow-up card, respectively. The methodology follows guidelines of the qualitative approach and the analysis results in the identification of specificities of the intervention in each scenario. Results indicate that the intervention mediated by scaffolding becomes efficient insofar as it adjusts to the students' demands.

Key-words: Mathematical Modeling. Scaffolding. Teacher intervention.

1 Introdução

A introdução da modelagem matemática nas aulas de Matemática tem crescido nas últimas décadas. Entretanto, pesquisas e práticas ainda dirigem boa atenção às demandas que a modelagem propõe, apontando para dificuldades no enfrentamento de barreiras na realização dessas atividades (Schukajlow *et al.* 2023; Almeida, 2022; Blum, 2015; Galbraith & Stillman, 2006).

Por um lado, as investigações se direcionam para processos psicológicos dos alunos, dando ênfase a aspectos cognitivos e metacognitivos que circundam esses enfrentamentos (Almeida & Castro, 2023; Vorhölter, 2019; entre outros). Por outro lado, discutir e apontar para

¹ Andaimé é tradução da palavra inglesa *scaffolding* que neste artigo será utilizada para designar o suporte temporário oferecido pelo professor aos alunos para a realização de uma tarefa.

² Universidade Estadual de Londrina • Londrina, PR — Brasil • ✉ lourdes@uel.br • ORCID <https://orcid.org/0000-0001-8952-1176>

³ Universidade Estadual de Londrina • Londrina, PR — Brasil • ✉ rosangelakowalek1@gmail.com • ORCID <https://orcid.org/0000-0002-2750-4829>

⁴ Instituto Federal do Paraná • Pitanga, PR — Brasil • ✉ flavio.lima@ifpr.edu.br • ORCID <https://orcid.org/0009-0003-0025-3630>

possibilidades e finalidades das ações do professor na superação de obstáculos e fomento da competência de modelagem dos alunos vem merecendo atenção (Barbosa, 2007; Almeida, Silva & Vertuan, 2012; Veronez & Castro, 2018; Lima & Araújo, 2021).

Assim, pensar a introdução da modelagem matemática nas aulas implica em associar de maneira substancial dois aspectos: o suporte necessário ao aluno quando realiza atividades de modelagem; e, a intervenção do professor relativamente à indicação e à avaliação das ações dos alunos.

No presente artigo, o olhar é dirigido a estes dois aspectos, considerando a sua interdependência. O suporte necessário ao aluno para o seu desempenho em modelagem matemática é discutido a partir da ideia de *scaffolding*, palavra que na língua brasileira diz respeito a *andaimes* para servir de suporte e apoio aos alunos. Particularmente, o uso de dois tipos de andaimes é abordado no texto: um plano de resolução e uma ficha de acompanhamento.

Relativamente à intervenção do professor, conforme sugerem Tropper *et al.* (2015), ainda há na área de modelagem matemática controvérsias sobre a intensidade da orientação do professor necessária ou adequada. No âmbito brasileiro, diferentes resultados e encaminhamentos têm sido indicados, incluindo a caracterização, a intensidade e a finalidade da intervenção docente em atividades de modelagem matemática (Barbosa, 2007; Almeida, Silva & Vertuan, 2012; Veronez & Castro, 2018; Lima & Araújo, 2021; Malheiros, 2008).

A pesquisa aqui referida coloca foco na intervenção do professor quando ele oferece algum tipo de suporte aos alunos na realização de atividades de modelagem matemática. Uma pesquisa empírica inclui dois cenários: uma disciplina de Matemática no Ensino Médio cujos alunos não possuíam experiências anteriores com modelagem matemática; e uma disciplina de Modelagem Matemática em um curso de Licenciatura em Matemática em que os alunos já tinham familiaridade com esse tipo de atividade. Com este enfoque, o objetivo no artigo consiste em investigar a intervenção docente mediada por andaimes em atividades de modelagem matemática.

2 Intervenção do professor em atividades de modelagem matemática

A modelagem matemática consiste na investigação de uma situação real mediada pela Matemática, visando resolver um problema com o uso da Matemática (Blum, 2015). O fazer modelagem matemática é permeado por ações que requerem a identificação de uma situação-problema, a realização de simplificações e suposições, decidindo o que manter e o que ignorar para construir um modelo matemático e por fim, a avaliação e validação dos resultados obtidos (Almeida, Silva & Vertuan, 2012).

Esse conjunto de ações envolve a iniciativa dos alunos bem como uma dinâmica do professor para lidar com as especificidades e condições para resolver o problema mediante ações vinculadas a etapas (ou fases) do fazer modelagem matemática (Almeida & Silva, 2014).

Borromeo Ferri (2018) pontua que, enquanto para os alunos são relevantes o interesse, a disponibilidade e o enfrentamento de desafios que atividades de modelagem requerem, o professor atua como um orientador que deve oferecer o suporte necessário aos alunos. Conforme sugerem Blum (2015), Oliveira e Barbosa (2007), Almeida (2022a), entre outros, o equilíbrio entre a orientação do professor e a independência dos alunos em atividades de modelagem matemática é fundamental na sua introdução na sala de aula.

Nesse contexto, discutir a atuação do professor nas aulas com modelagem tem sido foco de interesse na área (por exemplo, Barbosa, 2007; Lima & Araújo, 2021; Veronez & Castro, 2018; Tropper *et al.*, 2015; Sahin, Dogan & Gürbüz, 2022; Almeida, Silva & Vertuan, 2012; Malheiros, 2008).

Para Almeida, Silva e Vertuan (2012) o professor deve orientar, indicar caminhos,

sugerir procedimentos, fazer perguntas no desenvolvimento da atividade de modelagem matemática. Malheiros (2008) destaca o papel de orientação, colocando ênfase na comunicação com os alunos, privilegiando o diálogo como ação marcante.

Veronez e Castro (2018), ao investigar intervenções do professor no desenvolvimento de atividades de modelagem matemática caracterizam três tipos de intervenções: o *questionamento* que se refere à intervenção permeada por perguntas na intenção de que os alunos reflitam sobre seus modos de agir; a *sugestão* que caracteriza intervenções com o propósito de orientar e direcionar o trabalho dos alunos; o *esclarecimento* que inclui as intervenções com caráter explicativo.

Considerando os processos que permeiam uma atividade de modelagem matemática, Lima e Araújo (2021), por sua vez, sugerem que as intervenções dos professores tendem a seguir a ordem do próprio processo de modelagem, ou seja, as ações tendem a guiar os alunos nas fases do ciclo de modelagem. Diante disso, caracterizam *intervenções convergentes*, aquelas nas quais o professor intervém em uma etapa específica e suas intervenções se referem, exatamente, àquela etapa; e *intervenções divergentes*, nas quais a intervenção do professor se refere a etapas para além daquela em que ela acontece.

Barbosa (2007) se refere à intervenção docente apontando para estilos, ponderando que há: intervenções diretas, em que o professor, diretamente, oferece uma resposta para uma pergunta dos alunos e intervenções abertas, em que o professor procura ele mesmo fazer perguntas considerando demandas observadas nos alunos.

Dentre as atuações do professor em atividades de modelagem matemática, Sahin, Dogan e Gürbüz (2022) destacam como possibilidades a intervenção com dicas, questionamentos, exemplos, listas com questões, guias, explicações dentre outras, mas ressaltam que o apoio deve ser adaptado ao desempenho dos alunos. É nesta linha de encaminhamentos que vem se discutindo o *scaffolding* para delinear caminhos, possibilidades e consequências da intervenção do professor (Tropper *et al.*, 2015).

3 O andaime como suporte em atividades de modelagem matemática

O termo *andaime* deriva da construção civil em que é utilizado para designar uma estrutura montada para viabilizar alguns tipos de trabalho dos operários em reformas ou construções, servindo-lhes como suporte para os alcances pretendidos.

No âmbito educacional, entretanto, sua origem se associa com a terminologia *scaffolding*, tendo sido originalmente usado por Wood, Bruner e Ross (1976) para tratar da interação dialógica entre adultos e crianças, referindo-se ao apoio, em geral temporário, fornecido na intenção de facilitar que uma criança ou um iniciante resolva um problema ou execute uma tarefa que não conseguiria sem um auxílio.

Nas últimas décadas o uso do termo é recorrente, e de forma mais acentuada no contexto internacional, referindo-se ao andaime como um suporte ajustável oferecido aos alunos em suas atividades escolares (Van de Pol *et al.*, 2010, 2011, 2012; Stender & Kaiser, 2015; Davis & Miyake, 2004).

O conceito de andaime tem relação com a teoria sociocultural de Lev Vygotsky, mais especificamente, está associado ao conceito de Zona de Desenvolvimento Proximal (Vygotsky, 1978), sendo o suporte fornecido pelo andaime aquilo que *preenche o espaço* entre o nível de desenvolvimento real de um indivíduo (o que ele pode fazer de forma independente) e o nível de desenvolvimento potencial (o que ele se torna capaz de fazer sob alguma orientação).

Ao longo do tempo, o termo *andaime* foi ampliado e adaptado, sendo estudado em diversas áreas, como na Educação e na Educação Matemática (Sunaryo & Fatimah, 2020; Smit & Eerde, 2013; Schukajlow *et al.*, 2023). Em geral, em situações de ensino e de aprendizagem,

o andaime é visto como o suporte oferecido pelo professor aos alunos para a realização de uma tarefa que eles não conseguiriam realizar de forma independente. Segundo Li *et al.* (2023), no uso de andaimes, os professores ajustam de forma flexível o nível de sua intervenção em relação às necessidades dos alunos. Nesse sentido o andaime assume características de auxiliador de acordo com cada situação e, como indicam Van de Pol *et al.* (2010), ele descreve uma estrutura de apoio dinâmico para os alunos superarem suas dificuldades.

No decorrer do uso do termo no contexto educacional, diferentes tipos e elementos pertinentes aos andaimes vêm sendo identificados. Conforme sugerem Tropper *et al.* (2015), a contingência, entendida como a capacidade de resposta do aluno no decorrer da realização de uma tarefa, é o aspecto mais frequentemente sublinhado e implica na adaptação do apoio do professor ao desempenho do aluno quando do uso de andaimes. A contingência, portanto, requer que o professor, no decorrer da realização de uma tarefa, se atente para estratégias de diagnóstico bem como para estratégias de intervenção em seu processo de ensino (Van de Pol *et al.*, 2011).

Além da contingência, Van de Pol *et al.* (2010) propõem mais dois aspectos: a diminuição gradual e a transferência de responsabilidade. A diminuição gradual é a retirada do apoio quando o desempenho do aluno aumenta. Já a transferência de responsabilidade refere-se à transferência gradual da responsabilidade do professor para o aluno, passando o próprio aluno a ter o autogerenciamento da sua aprendizagem.

Há uma relação intrínseca entre estes três aspectos. De fato, a contingência conduz ao enfraquecimento do suporte na medida em que aumenta o desempenho do aluno. Este enfraquecimento, por sua vez, leva à mudança de responsabilidade (Van de Pol *et al.*, 2011).

No âmbito da modelagem matemática, as ações requeridas dos alunos nessas atividades vêm sendo impulsionadas por algum tipo de apoio, tratando do andaime como um instrumento estratégico subsidiado pelos professores para as atividades de modelagem matemática, pois permite oferecer suporte e orientação aos alunos. Pesquisadores e professores têm se interessado pela utilização de andaimes em modelagem matemática (Almeida, Kowalek & Souza, 2024; Becksculte, 2020; Durandt & Lautenbach, 2020; Schukajlow *et al.*, 2015; Stender *et al.*, 2017; Stender & Kaiser, 2015), havendo a sinalização de que o seu uso em atividades dessa natureza pode ser promissor para a sua inclusão nas aulas.

Entre os tipos de andaimes utilizados em atividades de modelagem matemática constam *apoio estratégico* (Stender *et al.*, 2017), *ensaios heurísticos* (Hanze & Leiss, 2022), *cartões de ajuda* (Alfke, 2017), *ensino dialógico* (Stender *et al.*, 2017; Stender & Kaiser, 2015), *plano de resolução* (Almeida, Kowalek & Souza, 2024; Becksculte, 2020; Durandt & Lautenbach, 2020; Schukajlow *et al.*, 2015), *ficha de acompanhamento* (Almeida, 2022a) que, segundo os autores das pesquisas mencionadas, tornam-se eficientes a partir da intervenção do professor mediada pelo instrumento de suporte em cada atividade de modelagem. No presente texto, dirigimos a atenção a dois desses instrumentos: plano de resolução e ficha de acompanhamento.

O *plano de resolução*, conforme sugerem Schukajlow *et al.* (2015), refere-se a instrumento estratégico e instrucional para dar suporte aos alunos. Para Becksculte (2020), o plano é definido como um *ciclo de modelagem simplificado* cujo objetivo não é fornecer ajuda com o conteúdo matemático, mas auxiliar na identificação das etapas da modelagem matemática e na definição das ações dos alunos em cada etapa. Assim estruturado, o plano de resolução pode promover, segundo Schukajlow *et al.* (2015), competências para fazer modelagem, levando a identificar e realizar ações estratégicas em cada etapa da atividade.

A *ficha de acompanhamento*, por sua vez, como sugerida em Almeida (2022a), visa indicar estratégias para os alunos consoante às demandas da atividade em cada etapa, considerando, entretanto, que os alunos já tiveram algum contato anterior com modelagem matemática. As intervenções do professor então são mediadas pelas interações entre alunos e

professor a partir das anotações dos alunos em uma ficha elaborada pelo professor e entregue aos alunos no início da atividade de modelagem. Assim, a ficha é também um instrumento instrucional, que permanece em poder dos alunos e serve como balizador do que já está feito e do que ainda precisam fazer, considerando o autogerenciamento das ações, mas também a intervenção do professor.

A experiência dos alunos com atividades de modelagem matemática bem como os desafios de cada atividade são aspectos relevantes para a estruturação e o uso de instrumentos que atuam como andaimes para a realização de atividades de modelagem (Beckschulte, 2020). Considerando este entendimento, no presente artigo dois instrumentos distintos são usados considerando esta experiência.

4 Metodologia e questão de pesquisa

O uso de andaimes pelo professor na sala de aula é uma ação contextual de modo que a complexidade da atividade e a experiência (ou o conhecimento) dos alunos são elementos que orientam esse uso. Neste sentido, os andaimes são ajustáveis aos diferentes contextos e, em geral seu uso se dá a partir da identificação de que a maior parte dos alunos (e não somente um deles) ainda não consegue fazer sozinho a atividade pretendida pelo professor.

Também, as características dos andaimes, conforme apontado na seção anterior, são interligadas de modo que, relativamente ao fazer modelagem matemática, é adequado considerar a familiaridade que os alunos já têm com esse tipo de atividades para introduzir instrumentos de suporte que colaborem para a competência do fazer modelagem matemática. A contingência, portanto, implica em valer-se de um diagnóstico para averiguar o desempenho dos alunos e então proceder às intervenções considerando este estado inicial dos alunos relativamente às suas experiências com a modelagem matemática.

Assim, para investigar a intervenção docente mediada por andaimes em atividades de modelagem matemática desenvolvemos uma pesquisa empírica em que dois cenários são considerados.

O cenário 1 refere-se à uma atividade realizada por vinte e cinco alunos do Ensino Médio (Técnico em Alimentos), sendo este o seu primeiro contato com a modelagem matemática na sala de aula. Na introdução e realização da atividade, aos alunos, distribuídos em grupos, foi dado como andaime um plano de resolução, sendo, a intervenção do professor, um dos autores desse texto, mediada por este instrumento. O plano de resolução como andaime, neste caso, é introduzido a partir do diagnóstico da ausência de familiaridade com a modelagem e o plano, como *ciclo de modelagem simplificado* (Beckschulte, 2020), oferece um suporte robusto, apontando aos alunos encaminhamentos pertinentes à realização da atividade.

O cenário 2, por sua vez, refere-se ao desenvolvimento de uma atividade de modelagem realizada por vinte alunos de um curso de Licenciatura em Matemática em uma disciplina de Modelagem Matemática no quarto ano desse curso e ministrada por um dos autores desse texto. O cenário considera o uso de uma ficha de acompanhamento como andaime fornecido aos alunos que já tiveram experiências anteriores com modelagem matemática. Os alunos formaram cinco grupos, sendo que cada grupo foi responsável pela escolha de uma situação, definição e resolução de um problema concernente a essa situação. A ficha de acompanhamento proporciona aos alunos um suporte, mas lhes requer alguma capacidade de resposta relativa ao fazer modelagem, baseando-se no diagnóstico de que a *práxis* com a modelagem não lhes é desconhecida.

Para as reflexões aqui apresentadas, são coletados dados nos dois cenários. Falas e gestos dos alunos obtidos por meio de gravação em áudio e vídeo do desenvolvimento das atividades, além de fotos dos materiais, dos relatórios entregues e das anotações do diário de

campo do professor em cada cenário constituem o material de análise. O caminho metodológico segue orientações da abordagem qualitativa e interpretativa considerando características para a pesquisa em Educação Matemática, como sugerem Fiorentini e Lorenzato (2006).

5 Cenário 1 – O primeiro contato com a modelagem matemática

Neste cenário, alunos de um curso Técnico em Alimentos foram introduzidos à modelagem matemática a partir de um momento de descontração na aula de Matemática em que o professor levou um bolo. Algumas considerações do professor, seguidas da degustação de um bolo conduziu à primeira experiência dos alunos com a modelagem matemática, levando-os a estudar: Por qual valor esse bolo deve ser vendido, considerando que quem o produziu não pode ter prejuízo? (Figura 1).

Antes da degustação do bolo, formaram-se grupos de alunos e as primeiras ideias sobre a abordagem da situação foram sendo estruturadas, sendo que alguns realizaram medições do bolo e fizeram estimativas sobre seu peso (massa). Ao final dessa aula o bolo foi degustado de modo que mais informações poderiam ser consideradas tais como o tipo de massa e de recheio do bolo.

Figura 1⁵: O problema na atividade *A matemática e o bolo*

A MATEMÁTICA E O BOLO	
<p>O professor levou para a aula de matemática um bolo. A partir da degustação desse bolo, identificando sabor, textura, tipo de massa e de recheio, usar matemática para responder a seguinte questão: Esse bolo deve ser vendido por qual valor, considerando que quem o produziu não pode ter prejuízo?</p>	

Fonte: Dados da Pesquisa

Considerando que os alunos não tinham nenhuma experiência anterior com modelagem o suporte, organizado *a priori* pelo professor, foi um plano de resolução (Figura 2).

O plano, como estruturado, inclui indicações das ações requeridas na atividade de modelagem, embora essas ações possam não ocorrer de forma linear como idealizado nos itens do plano. No entanto, o plano, como um andaime, visa oferecer pistas estratégicas para os alunos.

Assim, fornecer aos alunos um plano de resolução já é uma intervenção do professor que, neste caso, se alinha com o que sugerem Almeida, Silva e Vertuan (2012) sobre a intervenção docente como orientação. Entretanto, na pesquisa aqui apresentada, argumentando em favor do provimento de suporte para os alunos, oferecendo-lhes andaimes, busca-se por nuances que esta intervenção tem quando o aluno recebe este instrumento de suporte.

Os alunos neste cenário, buscando no plano de resolução encaminhamentos para a sua atividade de modelagem, todavia, requereram a intervenção docente, sobretudo para definir ações já sinalizadas no plano. Esse é o caso, por exemplo, do grupo que, ao se deparar com o item 1 do plano (Inteirar-se da situação) solicitou o auxílio do professor.

Figura 2: Plano de resolução entregue aos alunos

⁵ A proposição da situação na aula era acompanhada de um texto informativo sobre fabricação e comercialização de bolos.

PLANO DE RESOLUÇÃO: A MATEMÁTICA E O BOLO

1) Para inteirar-se com a situação

*Leia o texto informativo.

*Quais informações são necessárias para resolver o problema? (Por exemplo: o sabor do bolo, a massa do bolo, os ingredientes usados).

2) Para organizar a resolução do problema

*Defina variáveis para resolver o problema. Faça suposições bem fundamentadas, por exemplo, sobre os ingredientes utilizados na massa e no recheio do bolo, sobre o custo dos ingredientes, sobre o preço de venda de bolo. Considere simplificações, se necessário.

*Escolha conteúdos, conceitos, regras e procedimentos matemáticos para a resolução do problema a partir do que organizou até o momento (por exemplo, proporção, porcentagem).

3) Sobre o uso da matemática

*Resolva o problema a partir das suas escolhas matemáticas. Verifique se os procedimentos usados produziram uma solução. Se necessário, mude os procedimentos ou complemente informações.

*Escreva uma resposta para o problema.

4) Para explicar os resultados

*Questione-se: A resposta para o problema tem sentido? Você compraria o bolo por este valor? Você considerou custos com os ingredientes e com mão-de-obra? Você fez ou considera pertinente fazer uma estimativa de lucro com a venda do bolo?

*Como assegurar que a resposta está correta? Alguma comparação o preço de venda em confeitarias pode ser adequado?

*Escreva sua resposta final para o problema.

Fonte: Produzido pelos autores

Maria: Ah, então precisamos de mais informações!

Camila: Sim, eu acho que sim.

Ana: Mas nós medimos bolo, então temos isso.

Pedro: E o peso (o aluno se refere à massa do bolo), não sabemos! Será que o professor sabe quanto pesa o bolo? Vamos perguntar!

Pedro: Professor, qual é o peso do bolo, o senhor sabe?

Professor: Vejam eu não tenho essa informação. Mas vocês podem fazer suposições ou hipóteses considerando o tamanho e o tipo de recheio, por exemplo.

A intervenção, solicitada pelos alunos neste momento, vem confirmar a necessidade de informações não disponíveis até então, ao mesmo tempo em que ela também emite o alerta para uma ação relevante em atividades de modelagem: a formulação de hipóteses. É justamente essa a razão de uma outra solicitação de intervenção, conforme sugere o diálogo a seguir.

Pedro: Professor, o que são suposições bem fundamentadas? (expressão que consta no plano de resolução)

Professor: São suposições que vocês podem fazer, mas que estão baseadas no conhecimento de vocês em relação à situação.

Ana: Então precisamos ver se é razoável considerar esse peso (2,5kg).

Maria: E também ver quais são os ingredientes do bolo, porque isso influencia.

João: É, então vamos pesquisar sobre isso.

Esta intervenção, com finalidade de *esclarecimento*, como sugerem Veronez e Castro (2018), e *direta* para oferecer uma resposta, na classificação de intervenções docentes, realizada em Barbosa (2007), levou os alunos a pesquisar e articular informações que pudessem ser o subsídio da suposição de que o bolo pesa 2,5kg. Por meio de uma pesquisa na internet, o grupo encontrou informações relativas ao rendimento de bolo usando uma forma retangular cujas dimensões são 25 cm de comprimento, 17 cm de largura e 10 cm de altura (medidas bem

próximas daquelas do bolo). Conforme essa informação, uma receita de massa de pão de ló resulta em um bolo com, aproximadamente 3kg. Como o tamanho da forma não corresponde exatamente ao tamanho do bolo degustado na aula, os alunos aceitaram a estimativa de que o bolo tem, aproximadamente 2,5 kg, considerando esta uma suposição aceitável.

O uso da matemática para responder à questão que orienta essa atividade de modelagem foi uma das demandas mais desafiadoras para o grupo de alunos. As pistas estratégicas do item 3 do plano de resolução (Sobre o uso da matemática), por um lado se mostraram eficientes para a percepção de como determinar o valor (monetário) dos ingredientes usados no bolo, por outro lado, entretanto, fizeram os alunos requerer intervenção do professor para chegar a construção de uma expressão matemática para esse valor. No diálogo a seguir há indicativos dessa percepção.

Pedro: Como podemos escrever isso, professor? (referindo-se à especificação do preço dos ingredientes do bolo)

João: É, professor, podemos usar símbolos ou só fazer as contas mesmo?

Professor: Como vocês me explicam a conta que fizeram?

Pedro: Professor, em cada linha, o valor final (em reais) é o resultado da divisão do valor do ingrediente pela quantidade como ele é vendido no mercado, multiplicado pela quantidade usada.

Pedro: É, professor, é tipo uma regra de três.

Professor: Então tentem escrever uma forma geral disso que pode ser usada para qualquer um dos ingredientes.

Esta intervenção do professor, ainda que solicitada pelos alunos, foi aberta (Barbosa 2007), no sentido de não indicar um procedimento específico, mas servir como uma sugestão para a construção de um modelo matemático. Os alunos, de fato, propuseram ao professor uma expressão (Figura 3).

Figura 3: Modelo proposto pelos alunos

$$\text{valor final} = \text{valor} \div \text{qtd} \times \text{qtd usada}$$

Fonte: Dados da Pesquisa

As intervenções solicitadas pelos alunos, tanto foram referentes aos itens do plano de resolução, quanto à organização e sistematização da situação e de sua matematização. Todavia, o professor também entrevistou, considerando indicações do plano, relativamente a dois aspectos em que, espontaneamente, os alunos não o solicitaram. Primeiramente, apontando para os alunos a possibilidade de usar uma linguagem matemática mais adequada para escrever a expressão da Figura 3, assessorando-os na escrita para substituí-la pela Figura 4. Segundo, para incentivá-los na estruturação de um modelo matemático para expressar o preço final de um bolo, considerando os itens que compõe a precificação do bolo, consoante às indicações do item 4 do plano de resolução (Para explicar os resultados), orientando os alunos para a construção do modelo matemático.

Figura 4: Modelo alterado pela intervenção docente

$$\text{preço da quantidade utilizada} = \frac{\text{preço da quantidade vendida}}{\text{quantidade vendida}} \times \text{quantidade utilizada}$$

Fonte: Dados da Pesquisa

De fato, a partir da intervenção do professor de que um modelo mais geral para determinar o preço de venda de um bolo deveria incluir outras variáveis e inclusive um

percentual de lucro desejado, os alunos apresentaram o modelo

$$\text{Preço de venda} = P_V = (CP + CM + CE + CF)(1 + P)$$

em que em que (P_V) é preço de venda; (CP) é o custo de produção; CM custo de mão de obra; (CE); é o preço da embalagem; (CF) são custos fixos da confeitaria e P é percentual de lucro *a priori* definido pelo confeitoiro.

6 Cenário 2 – Alunos com experiências de modelagem propondo e resolvendo um problema de modelagem matemática

Este cenário é referente a aulas da disciplina de Modelagem Matemática para 25 alunos do quarto ano de um curso de Licenciatura em Matemática e que já tinham familiaridade com atividades de modelagem. Entretanto, diferentemente de suas experiências anteriores, no cenário aqui referido, cada um dos cinco grupos deveria propor e resolver um problema concernente a uma situação da realidade identificada pelo próprio grupo de alunos.

Assim, para dar suporte aos alunos no decorrer dos seis dias de aula destinados a essa atividade, cada grupo recebeu uma Ficha de Acompanhamento, conforme indica a Figura 5.

Figura 5: Ficha de acompanhamento entregue aos alunos

	18/04	25/04	02/05	09/05	16/05	23/05
Ideias do grupo com relação ao tema (Qual é a ideia? Como surgiu no grupo? Todos estão dispostos a estudar essa situação?)						
Processo de coleta de informações e dados (Quais informações são necessárias? Aonde serão obtidas?)						
Definição do problema (Na situação qual é o problema a estudar? Como é o problema matemático?)						
Matematização da situação (Qual matemática usar? Que hipóteses assumir? Quais variáveis incluir?)						
Estágio da resolução do problema (Foi encontrada uma solução? Estão satisfeitos com a solução?)						
Estágio da construção da resposta (Já tem uma solução? Foi validada a solução?)						
Estágio da elaboração do relatório						
Solicitação de orientação da professora (Ocorreu? Foi necessária? Como se deu? Foi solicitada? Em que contribui?)						
Etapas do ciclo de modelagem (Estão sendo atendidas? Foram retomadas?)						
Outras observações						

Fonte: Dados da Pesquisa

A ficha de acompanhamento foi oferecida aos alunos como andaime, visando dar-lhes suporte para, de forma mais independente possível, definir e resolver um problema usando modelagem matemática. A intervenção docente foi mediada por elementos e indicações desta ficha.

Os cinco grupos desenvolveram e discutiram com seus pares cinco atividades de modelagem, sendo realizada uma em cada grupo. As temáticas investigadas pelos grupos são: custo-benefício entre uso de Uber ou carro pessoal; qual é o melhor celular considerando atributos como preço e performance; o carro elétrico em comparação com o carro híbrido; como conservar o suco de laranja; a matemática no jogo *Starded Valley*.

O processo analítico leva à identificação de quatro aspectos relativamente à intervenção

do professor mediada pela Ficha de Acompanhamento nestas cinco atividades caracterizados como: razão; abrangência; alcances; e iniciativa. Para cada aspecto foram identificados oito elementos nos dados conforme indica o Quadro 1. Ou seja, foram identificadas intervenções associadas a oito razões, tendo as iniciativas variado entre professor ou alunos; cada intervenção teve uma abrangência relativamente ao seu papel na atividade; também, cada intervenção teve alcances relativamente ao seu efeito sobre as ações dos alunos na atividade de modelagem.

Quadro 1: Especificidades da intervenção docente

Razão da intervenção	Abrangência da intervenção	Alcances da intervenção	Iniciativa da intervenção
Dificuldades dos alunos na escolha do tema	Organizacional – dar suporte ao planejamento da atividade.	Auxiliou os grupos na escolha do tema	Conjunta (professor e alunos).
Indecisões relativas à formulação do problema matemático	Estratégica - dar suporte à formulação de um problema	Orientou o processo de matematização da situação.	Alunos dos grupos
Dificuldades no processo de resolução	Estratégica - apontar para conteúdos e técnicas de resolução	Deu suporte no uso da matemática e seu potencial para a resolução do problema	Alunos dos grupos
Requerer apoio no uso da tecnologia digital	Estratégica – apontar para o papel da tecnologia	Deu suporte ao uso de ferramentas tecnológicas, discutindo seus alcances	Alunos dos grupos
Discutir o detalhamento do relatório e sua discussão na sala de aula	Organizacional – dar suporte à elaboração do relatório e sua apresentação	Promoveu a definição da estrutura do relatório	Conjunta (professor e alunos).
Investigar, nos grupos, como será a etapa de validação	Diagnóstica	Promoveu meios para a validação do modelo e da resposta	Professor
Orientar para a relevância das variáveis consideradas na situação	Estratégica: oferecer pistas estratégicas	Alertou para a inclusão de variáveis relevantes	Professor
Realizar uma pré-avaliação	Oferecer feedback	Apontou potencialidades e fragilidades na atividade de modelagem	Professor

Fonte: Construído pelos autores

A ficha de acompanhamento teve um caráter situacional e interativo, promovendo uma interação entre alunos nos grupos e entre professor e aluno, de modo que a intervenção do professor, ora por sua iniciativa e ora por iniciativa dos alunos, promoveu a adaptabilidade da ficha, considerando tanto bloqueios dos alunos quanto seu potencial para o fazer modelagem.

De fato, quando a razão da intervenção solicitada pelos alunos foi relativa ao uso da tecnologia, por exemplo, enquanto alunos do grupo que estudou relações entre uso de carro elétrico e carro convencional se referia a dificuldades no processo de coleta de dados, o grupo que trabalhou com relações entre uso de Uber e de carro próprio, o fez para mostrar o potencial de um software no processo de resolução. Os diálogos a seguir são indicativos desta circunstância.

Atividade: Carro elétrico ou carro à combustão

Aluna 2: Nossa dúvida, professora, ainda é sobre os dados. Porque, só encontramos nos sites mesmo e também tem algo nas revendedoras de carros. Aí os dados podem ser desses lugares, não é?

Professora: Sim, podem.

[...]

Atividade: Carro próprio ou serviços de transporte por aplicativo

Aluno 5: Professora, nós definimos nosso problema assim: A partir de qual distância percorrida mensalmente, um consumidor deveria optar pelo carro próprio em vez de usar aplicativos de viagens?

Professora: Certo, e aí como vai ficar o modelo, considerando que essa opção depende de preferências do usuário?

Aluna 6: Olha, no nosso modelo fica assim: à medida que a preferência do consumidor por ter um veículo aumenta, a inclinação da função custo de viagens por aplicativo se modifica, deslocando-se no sentido positivo do eixo y. No GeoGebra, isso fica assim (apontando para a figura na tela do computador).

Analogamente, na abrangência diagnóstica da professora, ao inquirir os alunos sobre modos de realizar a validação, o grupo que estudou o jogo *Starded Valley* sinalizou não ter ainda se atentado para como validar sua resposta, aquele que estudou a relação entre uso de Uber e de carro próprio, já apresentou um questionário de preferências a ser respondido por todos os alunos e a partir do qual o modelo construído seria validado.

Atividade: O jogo *Starded Valley*

Aluno 9: Nossa questão agora é que ainda não sabemos como validar a resposta!

Professora: É mesmo... Trata-se de um jogo. Penso que precisam olhar para a relação entre o modelo que construíram e os lucros que decorrem para o jogador.

Atividade: Carro próprio ou serviços de transporte por aplicativo

Aluna 5: Professora, nós vamos validar o nosso modelo fazendo um questionário de pesquisa com os alunos do 4º ano de Licenciatura de Matemática do ano de 2024, público jovem que se depara com a decisão de comprar o seu primeiro veículo. Então vamos buscar os dados desse perfil de pessoas.

Professora: Muito bom!

Aluna 5: O questionário, eles vão responder aqui no *Google Docs*. Vou mostrar para você, professora.

[...]

7 Resultados

A intervenção do professor no fazer modelagem matemática mediada por um plano de resolução no cenário 1, em que alunos da Educação Básica sem experiências anteriores com modelagem foram introduzidos a uma atividade desse tipo: i) viabilizou a percepção da necessidade de informações sobre a situação; ii) proporcionou aos alunos entender o que é uma hipótese e qual a sua finalidade na modelagem matemática; iii) deu suporte à formulação de um modelo matemático; iv) incentivou a generalização da resposta para a situação particular mediante a construção de um modelo matemático para o preço de venda de bolos.

No cenário 2, por sua vez, quando uma ficha de acompanhamento foi oferecida como andaime aos alunos, foi possível caracterizar a intervenção docente a partir de aspectos que apontam a razão da intervenção, sua abrangência bem como seus alcances para o fazer modelagem matemática. Neste caso, essa intervenção: i) ofereceu apoio com base no diagnóstico de um potencial problema ou de uma capacidade dos alunos; ii) foi menos diretiva e mais aberta, considerando o interesse em ativar encaminhamentos de experiências anteriores; iii) promoveu, ao mesmo tempo em que também requereu, processos de reflexão relativa a ações inerentes às diferentes etapas da modelagem matemática.

Em ambos os cenários, entretanto, houveram intervenções solicitadas pelos alunos bem como aquelas realizadas pelo professor a partir de diagnósticos de fragilidades ou possíveis

dificuldades dos alunos. Nas duas formas de intervenção, por um lado, ela ofereceu apoio que permitiu aos alunos continuar o seu processo de forma independente, ou seja, puderam seguir aquela etapa da atividade sem um apoio adicional. Por outro lado, o apoio foi tão importante que, se ele não tivesse acontecido, os alunos não teriam sido capazes de agir de forma independente e os bloqueios ou dificuldades poderiam não ser superados, não indicando, portanto, para a competência do fazer modelagem.

O que se pode concluir também, considerando as especificidades dos dois cenários, é que a intervenção mediada pelos andaimes não pode ignorar o estado atual de competência dos alunos. Assim, o plano de resolução para alunos iniciantes, sendo mais diretivo relativamente às indicações do fazer modelagem, levou a intervenções mais diretas e provedoras de indicações. A ficha de acompanhamento como andaime usado com alunos que já tiveram experiências anteriores, ao mesmo tempo em proporcionou avanços relativamente ao fazer modelagem dos alunos, também requereu um estado de atenção da professora sintonizado com o que seus alunos já eram capazes de fazer sozinhos, intervindo para atender demandas em que eles ainda não tinham independência.

8 Considerações finais

Na presente pesquisa, a intervenção do professor em atividades de modelagem é mediada por suportes oferecidos aos alunos, alinhando-se com o que nas pesquisas é tratado como o fornecimento de andaimes ou o *scaffolding*. Os dois cenários analisados, considerando alunos iniciantes e alunos que já tiveram experiências anteriores com modelagem matemática, levam a concluir que as intervenções mediadas por andaimes oferecem meios para levar em consideração um diagnóstico do professor, tornando-se um processo interativo que ocorre entre alunos e professor, cujo papel é dar suporte aos alunos.

As ações decorrentes dos suportes nos dois cenários sinalizam que a intervenção, quando solicitada pelos alunos e também quando é uma iniciativa do professor, tanto possibilitou meios para a superação de obstáculos quanto favoreceu que os alunos usassem o seu potencial relativo ao fazer modelagem, podendo ser mais diretiva ou mais aberta, como menciona Barbosa (2007). Entretanto, o que a intervenção guiada por andaimes proporciona é o desenvolvimento de habilidades dos alunos para lidar com as especificidades da modelagem matemática, como por exemplo, a falta de informações iniciais e a possibilidade de construir de diferentes maneiras as respostas. O professor deve, sobretudo, endereçar esses aspectos em suas intervenções.

É relevante, portanto, ponderar que para a intervenção mediada por andaimes, é preciso considerar que o *scaffolding* implica em prezar pela contingência, primando pela observância, nas intervenções, do desempenho dos alunos até aquele momento.

Assim, o uso de andaimes para mediar a intervenção docente traz para a comunidade de modelagem um olhar complementar ao que pesquisas anteriores já tenham apontado.

Referências

Alfke, D. S. (2017). Mathematical modelling with increasing learning aids: A video study. In G. Stillman, W. Blum, & G. Kaiser (Eds.), *Mathematical modelling and applications: International perspectives on the teaching and learning of mathematical modelling*. Cham: Springer, 25-35.

Almeida, L. M. W. (2022). Uma abordagem didático-pedagógica da modelagem matemática. *Vidya*, 42(2), 121-145.



Almeida, L. M. W. (2022a). A intervenção do professor em atividades de modelagem matemática. Anais da XIII Conferência Nacional sobre Modelagem na Educação Matemática (CNMEM). Porto Alegre, RS.

Almeida, L. M. W & Castro, E. M. V. (2023). Metacognitive strategies in mathematical modelling activities: structuring an identification instrument. *REDIMAT - Journal of Research in Mathematics Education*, 12, 210-228.

Almeida, L. M. W.; Kowalek, R. M. & Souza, F. L. (2024). Suporte em atividades de modelagem matemática: olhar sobre um plano de resolução. *Ensino e Tecnologia em Revista*. Londrina, v. 8, n. 2, p. 318-336.

Almeida, L. M. W. & Silva, K. A. P. (2014). O significado em atividades de modelagem matemática: um olhar sobre pesquisas brasileiras. *REVEMAT*, v. 9, p. 124-145.

Almeida, L. W.; Silva, K. P. & Vertuan, R. E. (2012). *Modelagem Matemática na Educação Básica*. São Paulo: Contexto.

Barbosa, J. C. (2007). Teacher-student interactions in mathematical modelling. In: Haines, C. et al (Ed.). *Mathematical Modelling (ICTMA12): education, engineering and economics*. Chichester: Horwood Publishing, 232-240.

Beckschulte, C. (2020). Mathematical modelling with a solution plan: An intervention study about the development of grade 9 students' modelling competencies. In G. A. Stillman, G. Kaiser, & C. E. Lampen (Eds.), *Mathematical modelling education and sense-making: International perspectives on the teaching and learning of mathematical modelling*. Cham: Springer, 129-138.

Blum, W. (2015). Quality teaching of mathematical modelling: What do we know, what can we do? In: S. J. Cho (Ed). *The Proceedings of the 12th International Congress on Mathematical Education: Intellectual and Attitudinal Changes*. NY: Springer. 73-96.

Borromeo Ferri, R. (2018). *Learning How to Teach Mathematical Modeling in School and Teacher Education*. Springer International Publishing.

Davis, E. A., & Miyake, N. (2004). Explorations of scaffolding in complex classroom systems. *The Journal of the Learning Sciences*, 13(3), 265–272.

Durandt, R. & Lautenbach, G. (2020). Strategic support to students' competency development in the mathematical modelling process: A qualitative study. *Perspectives in Education*, 38(1), 211–223.

Fiorentini, D. & Lorenzato, S. (2006). *Investigação em educação matemática: percursos teóricos e metodológicos*. Autores Associados, Campinas, SP.

Galbraith, P. & Stillman, G. (2006). A framework for identifying student blockages during transitions in the modelling process. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 38, 143–162.

Hanze, M. & Leiss, D. (2022). Using heuristic worked examples to promote solving of reality-based tasks in mathematics in lower secondary school. *Instructional Science*, 50, 529–549.

Li, R.; Cao, Y.; Tang, H. & Kaiser, G. (2023). Teachers' Scaffolding Behavior and Visual Perception During Cooperative Learning. *International Journal of Science and Mathematics Education*. 22, 333–352.

Lima, F. H. & Araújo, J. L. (2021). Em direção a uma caracterização da intervenção docente: ações de um professor em uma prática de modelagem matemática. *Revista de Ensino de Ciências e Matemática*, v. 12, n. 2, 1-25.

Malheiros, A. P. S. (2008). *Educação Matemática online: a elaboração de projetos de Modelagem Matemática*. 2008. 187f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Instituto de Geociências e Ciências Exatas, Universidade Estadual Paulista, Rio Claro, SP.

Oliveira, A. M. P. & Barbosa, J. C. (2007). A primeira experiência de Modelagem Matemática e a tensão do “próximo passo”. In: Encontro Nacional de Educação Matemática, 9, Belo Horizonte. Anais... Recife: *Sociedade Brasileira de Educação Matemática*. CDROM.

Sahin, S.; Dogan, M. F. & Gürbüz, R. (2022). Examining teacher interventions in teaching mathematical modeling: A case of middle school teacher. *International Journal of Scholars in Education*, v. 5, n. 2, 60-79.

Schukajlow, S.; Kolter, J. & Blum, W. (2015). Scaffolding mathematical modelling with a solution plan. *ZDM*, 47(7), 1241–1254.

Schukajlow, S.; Krawitz, J.; Kanefke, J. & Blum, W. (2023). Open modelling problems: cognitive barriers and instructional prompts. *Educational Studies in Mathematics*, n. 114, 417 - 438.

Smit, J. & Eerde, H. A. A. (2013). What counts as evidence for the long-term realisation of whole-class scaffolding? *Learning, Culture and Social Interaction*, 2, 22–31.

Stender, P.; Krosanke, N. & Kaiser, G. (2017). Scaffolding complex modelling processes: An in-depth study. In G. Stillman, W. Blum, & G. Kaiser (Eds.), *Mathematical modelling and applications: Crossing and researching boundaries in mathematics education*. Cham: Springer, 467–477.

Stender, S. & Kaiser, G. (2015). Scaffolding in complex modelling situations. *ZDM*, 47(7), 1255–1267.

Sunaryo, Y. & Fatimah, A. T. (2020). Contextual approach with scaffolding: An effort to improve student's mathematical critical thinking. *Journal of Physics: Conference Series*, 1521, 1-6.

Tropper, N.; Leiss, D. & Hanze, M. (2015). Teachers' temporary support and worked-out examples as elements of scaffolding in mathematical modeling. *ZDM*, 47(7), 1225-1240.



Van de Pol, J.; Volman, M. & Beishuizen, J. (2012). Promoting teacher scaffolding in small-group work: A contingency perspective. *Teaching and Teacher Education*, 28(2), 193–205.

Van de Pol, J.; Volman, M. & Beishuizen, J. (2011). Patterns of contingent teaching in teacher–student interaction. *Learning and Instruction*, 21(1), 46–57.

Van de Pol, J.; Volman, M. & Beishuizen, J. (2010). Scaffolding in teacher–student interaction: A decade of research. *Educational psychology review*, v. 22, 271- 296.

Veronez, M. R. D.; & Castro, E. M. V. (2018). Intervenções do Professor em Atividades de Modelagem Matemática. *Acta Scientiae*, Canoas, v.20, n.3, 431-450.

Vorhölter, K. (2019). Enhancing metacognitive group strategies for modelling. *ZDM*, 51(4), 703-716.

Vygotsky, L. S. (1978). *Mind in society: The development of higher psychological processes*. Cambridge: Harvard University.

Wood, D.; Bruner, J. & Ross, G. (1976). The role of tutoring in problem solving. *Child Psychology and Psychiatry*, 17, 88–10.