Concepções de professores sobre equivalência e divisão de frações a partir de materiais manipuláveis montessorianos

Teachers' conceptions about equivalence and division of fractions based on Montessori manipulative materialsn English

Edilene Regina Dotto Janjar[1]
Cristina Cavalli Bertolucci[2]

Resumo: Este artigo apresenta dados de uma pesquisa empírica de mestrado em andamento, a qual propôs-se conhecer de que forma professores de matemática que trabalham nos anos iniciais do Ensino Fundamental compreendem a equivalência e divisão de frações. A metodologia utilizada para coleta e análise dos dados foi o Método Clínico Piagetiano, as entrevistadas responderam perguntas da Entrevista Clínica enquanto manipulavam materiais concretos montessorianos. A coleta de dados identificou como as participantes entendem a divisão de frações, evidenciando que apenas algumas das participantes conseguiram realizar as divisões de frações no material manipulável e explicar completamente as situações propostas. As demais tiveram necessidade de realizar o algoritmo e aplicar regras de memorização, para posteriormente tentar encontrar o mesmo resultado no material.

Palavras-chave: Divisão de Frações. Método Clínico Piagetiano. Materiais Manipuláveis. Sistema Montessori. Professor que Ensina Matemática

Abstract: This article presents data from ongoing empirical master's research, which aimed to understand how mathematics teachers working in the early years of Elementary School understand the equivalence and division of fractions. The methodology used for data collection and analysis was the Piagetian Clinical Method, the interviewees answered questions from the Clinical Interview while manipulating concrete Montessori materials. Data collection identified how participants understand the division of fractions, showing that only some of the participants were able to divide fractions on the manipulative material and fully explain the proposed situations. The others had to perform the algorithm and apply memorization rules, to later try to find the same result in the material.

Keywords: Division of Fractions. Piagetian Clinical Method. Manipulable Materials. Montessori System. Teacher Teaching Mathematics

1 Introdução

A compreensão e a habilidade de manipular frações são elementos importantes no desenvolvimento matemático, tanto de estudantes quanto de professores. As frações são muito utilizadas na resolução e compreensão de diversos problemas do cotidiano, como situações que envolvem medidas de grandezas ou o resultado de uma divisão, dentre outros. Em especial, a divisão de frações frequentemente apresenta desafios conceituais, pois envolve a aplicação de conceitos abstratos em situações concretas.

Lorenzato (2006) define material didático como qualquer instrumento útil ao processo de ensino-aprendizagem. O autor enfatiza a importância do uso de materiais manipuláveis, mostrando o que entendiam grandes pensadores e pesquisadores sobre a utilização dessa

[1] Universidade Federal do Rio Grande do Sul • Porto Alegre, RS — Brasil • ✉ edilenejanjar@gmail.com • ORCID https://orcid.org/0000-0002-7298-9044
[2] Universidade Federal do Rio Grande do Sul • Porto Alegre, RS — Brasil • ✉ tinabertolucci@gmail.com • ORCID https://orcid.org/0000-0001-9678-1638

ferramenta didática. Comenius, considerado o pai da Didática Moderna, defendia que o ensino deveria dar-se do concreto ao abstrato, justificado assim que o conhecimento começa pelos sentidos e que só se aprende fazendo. Locke, já em 1680, dizia da necessidade da experiência sensível para alcançar o conhecimento (LORENZATO, 2006). Outros pesquisadores, como Montessori e Piaget, também defendem a utilização de materiais manipuláveis em sala de aula. Montessori deixou-nos vários exemplos de materiais didáticos e atividades de ensino que valorizam a aprendizagem através dos sentidos, especialmente do tátil. Piaget mostrou que o conhecimento se dá pela ação do sujeito, refletida sobre o objeto (LORENZATO, 2006).

Reconhecendo a importância de abordagens educacionais eficazes para promover a compreensão das frações, este estudo se concentra em entender as concepções de professores que ensinam ou já ensinaram a divisão de frações nos anos iniciais do Ensino Fundamental. Entendemos que todas as operações com frações, a partir do material concreto, conseguem ser realizadas com as equivalências de frações. Nesta investigação utilizamos especificamente o uso de materiais manipuláveis montessorianos como instrumentos investigativos.

A abordagem montessoriana enfatiza a aprendizagem por meio da manipulação de materiais concretos, permitindo que os estudantes construam autonomamente seus conhecimentos matemáticos (MONTESSORI, 1965). Os materiais manipuláveis são projetados para oferecer experiências táteis e visuais que facilitam a compreensão de conceitos matemáticos abstratos, incluindo frações.

No início desta investigação foi realizado uma revisão de literatura, selecionando dissertações e teses que tenham investigado sobre a divisão de frações a partir do uso de materiais montessorianos. Até hoje, pesquisas específicas nesse tema são escassas. Há um consenso entre as publicações nacionais, internacionais e os sistemas oficiais de avaliação sobre as dificuldades conceituais relacionadas à divisão e aos números racionais (SILVA, 2007; NEVES, FÁVERO, 2009). Reconhece-se também os benefícios do material manipulável montessoriano na construção de conhecimentos matemáticos (ALVES, 2009).

A Base Nacional Comum Curricular – BNCC, prevê introduzir conceitos elementares de frações a partir do 2º Ano e trabalhá-los de forma progressiva até o 8º Ano do Ensino Fundamental (BRASIL, 2018). Este estudo busca contribuir para esta lacuna na literatura, investigando as concepções de professores sobre a equivalência e a divisão de frações, a partir da interação com os materiais manipuláveis montessorianos. Ao explorar as percepções e estratégias dos professores durante a resolução de problemas de equivalência e divisão de frações, com o suporte desses materiais, este estudo visa fornecer entendimentos valiosos para educadores e pesquisadores interessados em promover uma compreensão mais sólida das frações em contextos educacionais.

Neste artigo apresentaremos a investigação de mestrado que se encontra em fase final de análise dos dados, apresentando-se o referencial teórico que norteou o estudo, os procedimentos metodológicos adotados e esboça-se as categorias de análise dos dados emersos.

2 O entendimento de frações e a divisão

Em geral, o significado mais usual de fração para o aluno é o de parte e todo, entendido como a partição de um todo em n partes iguais, em que cada parte pode ser representada como 1/n. Contudo, este significado não é o único. Cavalcanti e Guimarães (2008) indicam outros significados associados à fração, como o quociente da divisão, uma probabilidade, um operador multiplicativo, um número, uma medida e uma razão. Kieren (1976) e Behr et al. (1983) afirmam que as interpretações para frações que parecem ser adotadas pela maioria dos autores da Educação Matemática são cinco: parte-todo, razão, quociente, operador e medida.

Como forma de organizar conhecimentos sobre os números racionais Bertoni (2009) explica que o numerador e o denominador em uma fração são números naturais que ficam "acima e abaixo" do traço horizontal, na representação usual de uma fração. Dessa forma, uma fração que assume a relação parte-todo, o denominador é o número que indica em quantas partes a unidade foi dividida, o numerador indica quantas partes dessas foram tomadas. Já na fração pensada como o resultado da divisão de dois números naturais, "o numerador é o dividendo e o denominador é o divisor" (BERTONI, 2009, p. 76).

Nos anos iniciais do Ensino Fundamental inicialmente se trabalha a operação de divisão entre números naturais, considerando sempre o dividendo maior ou igual ao divisor, abarcando-se divisões exatas e não exatas. A ideia de divisão entre números naturais possui dois significados distintos e complementares. Para Rangel (2019), quando se repartem de forma igual uma quantidade entre sujeitos deseja-se saber quanto cada um receberá, têm-se a divisão com ideia de repartir. Quando repartimos uma quantidade em grupos com a mesma quantidade e se quer saber quantos grupos vão se formar, estamos diante do significado da divisão medida. Os materiais escolhidos na pesquisa trazem a ideia da divisão com significado de repartir quantidades como parte de um todo, aproximando-se da definição de Behr et al. (1983).

Pesquisas na área de Educação Matemática evidenciam a dificuldade que, tanto crianças quanto professores dos anos iniciais, têm em relação à compreensão e aplicação dos conceitos de números racionais e divisão. Garcia, Pietropaolo e Campos (2009) analisaram domínios dos conhecimentos específicos, pedagógicos e curriculares de professores dos primeiros anos do Ensino Fundamental sobre a representação fracionária de números racionais e seus diferentes significados. Os autores destacam a importância de um enfoque mais amplo da noção de fração tanto em cursos de formação inicial como de formação continuada, sendo necessário também uma constante reflexão destes profissionais sobre sua prática. Fragilidades relativas a conhecimentos sobre o número racional, especificamente os ligados ao pensamento proporcional entre professores dos anos iniciais, também foram evidenciados em estudos de Camejo Maranhão e Miranda (2009).

Canova e Campos (2009) identificaram e analisaram crenças, concepções e competências de professores dos anos iniciais em situações que abordam o conceito de fração, referindo-se aos significados parte-todo, quociente, medida, operador multiplicativo e número. A análise dos resultados mostrou que as crenças não são influenciadas pela sua prática docente, o que não acontece com as concepções. Quanto à competência, constatou-se que não houve um desempenho equitativo entre os cinco significados da fração e seus invariantes.

Segundo Toledo e Toledo (2010), é aconselhável que o professor, juntamente com o seu aluno, utilize material manipulável para iniciar o trabalho com números racionais antes do 5º Ano, visando dar mais significado ao aluno, realizando experiências como: repartir quantidades que podem ser discretas ou contínuas em porções iguais de forma a buscar seus próprios caminhos; comparar para verificar se as porções ou quantidades obtidas são realmente iguais, no caso de grandezas de natureza discreta, ou sobrepor as partes, no caso de grandezas de natureza contínua.

O estudo feito por Aguiar (1980) partiu das conclusões piagetianas sobre a origem dos conceitos de frações, onde explica:

> A formação do conceito de fração depende de duas relações fundamentais: a relação parte-todo é formadora da noção de objeto como tal e intensiva, já a relação parte-parte extensiva e aritmética. Estas relações, também, entram na construção dos primórdios da conceituação de proporcionalidade a quantificação intensiva significa a compreensão de que o todo é maior ou igual à soma de suas partes e a extensiva, o reconhecimento de que uma parte pode ser

> tomada como unidade padrão passível de repetição, sendo por isto, numericamente quantificável (AGUIAR, 1980, p.88).

Contudo, é importante perceber que para que o conceito de frações exista psicologicamente, ou seja, quando é compreendido pelas pessoas, tem-se uma articulação entre a relação parte-todo com a ideia do objeto como um todo, enquanto que na parte-parte a relação se dá de forma aritmética, através das operações. Dessa forma Aguiar (1980) traz uma relação de itens que estabelecem essas articulações, como por exemplo: a existência de um todo que deve necessariamente ser dividido em partes, a condição de determinação e divisão do número dessas partes que devem ser iguais entre si, a necessidade de considerar a fração ao mesmo tempo como parte de um todo e como um todo em si mesma e o reconhecimento de que a soma das frações é igual ao inteiro original.

3 Material manipulável montessoriano e alguns princípios didáticos

Os materiais manipuláveis montessorianos são uma parte essencial do método Montessori, desenvolvido pela médica e pedagoga italiana Maria Montessori. Esses materiais foram cuidadosamente projetados para permitir que as crianças explorem conceitos abstratos de forma concreta e sensorial. Eles podem ser usados em várias áreas do currículo escolar, incluindo matemática, linguagem, ciências e desenvolvimento sensorial.

Os materiais montessorianos oferecem uma representação tangível de conceitos abstratos, permitindo que as crianças desenvolvam uma compreensão sólida antes de avançar para o pensamento abstrato. Os materiais são projetados para facilitar a forma independente de aprender, permitindo que as crianças sigam seu próprio ritmo e, ao interagir com o material, tenham condições de construir conceitos por si mesmas (MONTESSORI, 1965). Na grande maioria das vezes os materiais montessorianos são utilizados em salas de aula como um recurso didático de ensino. Montessori (1957) afirma que cabe aos professores apresentarem os materiais às crianças, explicando-lhes para que servem. A autora ainda afirma que o objetivo dessa abordagem “não é ministrar ensinamentos, mas sim despertar e desenvolver as forças espirituais e o potencial criativo de cada um” **(**MONTESSORI, 1957, p. 93).

O Método sugere que os materiais sejam apresentados em uma ordem específica, seguindo uma progressão natural de dificuldade, permitindo assim que as crianças construam sobre o que já aprenderam. Para esta pesquisa, escolhemos cuidadosamente 4 materiais que trabalham com o conceito de equivalência e divisão de frações, são eles: *Material de Selos, Formas de Metal para Equivalência, Ideia do Justo* e *Pinos e Círculos de frações*, encontrados na obra de Montessori (1934a; 1934b) e serão cuidadosamente descritos no capítulo da metodologia.

4 Procedimentos metodológicos adotados

A intenção deste estudo foi compreender os processos de pensamento envolvidos em situações de equivalência e divisão de frações, a partir da manipulação de materiais concretos. Especificamente, estávamos interessados em conhecer o entendimento por parte de professores que ensinam ou já ensinaram sobre estes conceitos em sala de aula. Durante a elaboração da pesquisa alguns problemas nos ocorreram: Como seria possível o professor manipular o material montessoriano a partir de seus próprios conhecimentos? Como formular as perguntas certas para nortear a pesquisa, sem manifestar a indução das possíveis respostas que se queria obter? Através do Método Clínico Piagetiano começamos a entender que isso seria possível, ao propor uma conversa imparcial junto ao entrevistado, apresentando o material e, ao mesmo tempo, conversando sobre a equivalência e divisão de frações.

A peça-chave do Método Clínico Piagetiano, também conhecido como Método Clínico ou Método Crítico (DELVAL, 2002), é a entrevista clínica, organizada a partir de um roteiro de perguntas semiestruturado. A partir de uma conversa aberta com o entrevistado vão sendo feitas as perguntas, de modo a tentar esclarecer o que o participante diz. Conforme manipulavam os materiais, faziam-se então perguntas do roteiro e outras complementares, para seguir o curso do pensamento do entrevistado.

Na busca pelos instrumentos de investigação entendemos que todas as operações com frações, a partir do material concreto, conseguem ser realizadas com as equivalências de frações. Nesse sentido, selecionamos quatro materiais manipuláveis montessorianos. O primeiro é o *Material de Selos* - Instrumento 1, seguido pelas *Formas de Ferro para Equivalência* - Instrumento 2, depois a *Ideia do Justo* - Instrumento 3 e, por fim, os *Pinos e Círculos de Frações* - Instrumento 4.

O instrumento 1, *Material de Selos* é formado por pinos e fichas e é utilizado para trabalhar operações aritméticas no Sistema Montessori. Nesta pesquisa foi usado em uma situação envolvendo a divisão entre números naturais. No material, os pinos são utilizados para representar o divisor: os verdes representam as unidades, os azuis as dezenas e os vermelhos as centenas. As fichas representam o dividendo, ou seja, a quantidade a ser repartida, conforme visualiza-se na figura 1 à esquerda.

Durante a entrevista foi apresentada uma situação matemática, que pode ser resolvida a partir da manipulação dos pinos e fichas: *Uma professora quer repartir 15 lápis igualmente para três alunos. A partir do uso do Material dos Selos, represente uma forma de como a professora pode repartir essa quantidade para três alunos.* Aqui observamos sobre as possíveis representações para esta divisão.

O instrumento 2, *Formas de Metal para Equivalência,* é composto por uma base com um triângulo grande formado por um trapézio e dois triângulos retângulos menores e um retângulo vazado que dará espaço para as formas do triângulo. Este material, conforme a figura 1 à direita, foi utilizado com a intenção de observar concretamente o entendimento do conceito de equivalência e o que esta representa. As frações que representam a mesma parte do todo/inteiro são chamadas de equivalentes.

Figura 1: Instrumento 1 e Instrumento 2

Fonte: as autoras

Foi solicitado aos participantes que nomeassem as formas geométricas do material e, na sequência, foi perguntado se era possível colocar todas as peças do triângulo no retângulo ao lado e o que elas observavam a partir desse movimento.

O instrumento 3, *Ideia do Justo,* foi usado para esclarecer aos participantes a expressão que Montessori (1934a, p.137) usa “o justo é o que cada inteiro recebe”. A partir dessa expressão entende-se que cada um dos pinos inteiro vai receber a quantidade representada pelo valor apresentado no quociente; essa é a quantidade que denominamos de justa. A mesma expressão também é usada na divisão de frações quando os pinos são subdivididos e

representam o divisor, que vai receber a quantidade justa de círculos de frações. Neste instrumento foi solicitado aos participantes que utilizassem lápis e papel para representar com desenhos ou símbolos numéricos a seguinte situação: *João não quis mais a metade de seu chocolate. Resolveu repartir essa metade para seus dois amigos.* O propósito aqui foi identificar como é a compreensão de que na divisão de frações, onde o divisor não é inteiro, é preciso distribuir o dividendo para todas as partes fracionárias do divisor até que se complete o inteiro.

O instrumento 4, *Pinos e Círculos de Frações*, por vezes, se subdividem em partes, podendo ser em metades, terços e quartos. Para compor as divisões é importante observar que a quantidade do dividendo deve ser representada pelos círculos de frações, na figura 2 à direita, enquanto que o divisor é representado pelos pinos de frações, na esquerda.

Figura 2: Pinos e Círculos de Frações – Instrumento 4

Fonte: as autoras

Após a apresentação deste instrumento foi pedido que os participantes representassem com o material algumas situações: *Como você dividiria um quarto por dois inteiros?* Na sequência, perguntou-se: *Qual seria sua estratégia para repartir um meio por um terço?*

Um dos princípios de Piaget (1971) é de que o conhecimento é gerado a partir da interação do indivíduo com o ambiente em que vive. Este conhecimento se estrutura a partir da experiência, permitindo ao sujeito atribuir significado a partir do que interage. Ao organizarmos o material montessoriano a ser manipulado, assim como a entrevista clínica, consideramos que o participante, por ser professor/a que ensina matemática, tenha alguma compreensão sobre a divisão, ou seja, dividir números que são expressos como uma parte de um todo. Isso pode incluir compreender como realizar a divisão, como lidar com os denominadores das frações e como interpretar o resultado da divisão quando expresso como uma fração.

As entrevistas foram realizadas junto a seis educadoras, atuantes em turmas de 4º, 5º e 6º anos do Ensino Fundamental, de escola privada e pública, localizadas em Porto Alegre, RS, entre julho de 2023 e janeiro de 2024. As participantes foram selecionadas ao acaso, em função de suas disponibilidades e pelo fato de que ensinam ou já ensinaram o conteúdo de frações em sala de aula. Os encontros aconteceram individualmente, com duração aproximada de 90 minutos. Todas as entrevistas foram registradas em áudio e posteriormente transcritas na íntegra. Como todas as entrevistadas foram professoras mulheres, vamos referenciá-las sempre no feminino e a partir da identificação de codinomes atribuídos.

Para analisar os processos de pensamento envolvidos na aplicação dos instrumentos, até o momento, organizamos os dados emersos e criamos categorias de pensamento. A categorização das compreensões das participantes foi baseada nas suas interpretações manifestadas durante a manipulação dos instrumentos e ao responderem as perguntas.

5 Primeiras impressões e discussão dos resultados

Na coleta de dados as participantes manipularam os materiais montessorianos enquanto

respondiam a entrevista clínica. De acordo com Moraes (2009, p. 13), "a observação é o primeiro passo da reflexão e esta antecede a ação [...] Observar, refletir e agir – esta é a sequência do mestre montessoriano". A partir deste entendimento, uma vez que as participantes observaram o funcionamento inicial dos materiais, foram então agindo sobre eles e realizando as tarefas solicitadas. Destaca-se, assim, o fato de que o material possui o propósito de se fazer compreender (MONTESSORI, 1934a) e não simplesmente repetir regras decoradas a partir das ações que o sujeito realiza.

Os níveis de entendimento das participantes foram se revelando em tempos diferentes, acontecendo de modo único em cada entrevista. A divisão de frações é uma operação que envolve conceitos abstratos e complexos. Mesmo com o uso de materiais manipulativos, como os *Pinos e Círculos de Frações*, por exemplo, mostrou-se um instrumento desafiador para algumas das participantes expressarem suas compreensões desta operação aritmética.

Com base nas respostas obtidas, até o momento, construímos três categorias de análise, organizadas de acordo com os níveis de compreensão. Destaca-se que a maior dificuldade apresentada pelas participantes ficou concentrada na divisão de fração por fração, como será evidenciado nas categorias abaixo. O uso do material, aliado ao conhecimento teórico-matemático, apresentou-se como uma possibilidade para desvendar de que forma as professoras interrogadas compreendem a equivalência e divisão com frações.

Categoria 1: Compreensão parcial dos processos de divisão envolvendo frações

Nesta categoria reúnem-se entendimentos semelhantes apresentados pelas participantes, em relação a equivalência e divisão de frações, de forma superficial. De acordo com Silveira, Souza e Powell (2024), a superficialidade seria uma condição ou qualidade de quem promove uma observação ou afirmação que é básica, elementar, pouco profunda e sem reflexão. As divisões propostas abarcaram a operação entre números naturais, entre números naturais e frações e entre frações.

A partir da situação a ser revolvida no instrumento 1, onde a professora deseja repartir 15 lápis igualmente para três alunos, a dificuldade se apresentou ao perguntar sobre as possíveis representações para esta divisão. Apesar de inicialmente parecer uma tarefa simples, dividir os lápis igualmente entre os três alunos, poderia ser interpretado e representado de várias formas. Isso inclui desde a distribuição direta de cinco lápis para cada aluno até formas mais elaboradas, como dividir os lápis em grupos de cinco e depois redistribuir os grupos entre os alunos. Além disso, considerando o uso do *Material de Selos*, as representações poderiam variar dependendo da maneira que a participante escolhesse para realizar a divisão apresentada. Portanto, a complexidade da questão residia não apenas na divisão em si, mas na variedade de abordagens possíveis para representá-la. Contudo, na hora de representar simbolicamente a divisão de 15 lápis para 3 pessoas, poucas observaram que a mesma também poderia compor uma fração.

Neste instrumento 1 foi possível observar que algumas participantes realizaram a divisão a partir dos pinos, ou seja, cada pino ganharia uma quantidade. Outras, no entanto, agruparam as quantidades em grupos de cinco e depois distribuíram para os pinos, assim como algumas pegaram diretamente 15 unidades de fichas para distribuir. Algumas pegaram uma dezena e cinco unidades de fichas. Nesta situação, perceberam que não era possível distribuir uma dezena igualmente para cada pino, e então realizaram a troca da dezena por unidades, para poder repartir igualmente entre os pinos.

Com o instrumento 2, *Formas de Ferro para Equivalência*, solicitou-se inicialmente que as participantes observassem e nomeassem as figuras. Apenas uma delas não conseguiu observar mais de uma figura. Questionada, Jane respondeu: "*um triângulo e um retângulo*",

não observando o trapézio nem os triângulos menores. Observar e nomear as formas que compõem o triângulo grande, neste caso, era importante, pois os triângulos menores cabem exatamente 6 vezes dentro do trapézio, e 8 vezes dentro do retângulo, podendo trazer assim a ideia de equivalência também através da fração.

Durante a realização do instrumento 4 - *Pinos e Círculos de Frações*, dentre as divisões solicitadas, pediu-se que utilizassem o material para realizar a divisão de um meio (½) por um terço (⅓). Nas respostas obtidas, observou-se a dificuldade em compreender o fato de repartir uma fração por outra fração, conforme demonstra-se no raciocínio inicial de Fani:

> Um meio dividido por um terço. Ah, é que tem aquela "regrinha", né, um meio dividido por um terço é a mesma coisa que fazer um meio vezes três inteiros. Seriam três meios. Tá, isso feito no papel, agora a gente teria que chegar ao mesmo resultado com o material. É essa a ideia, né (Fani, participante da pesquisa).

A participante sente necessidade de inicialmente aplicar a regra da divisão de frações, para posteriormente tentar operar a partir do material. O uso desta regra, onde mantem-se a primeira fração e inverte-se a segunda realizando-se uma multiplicação, está muito presente nos processos de ensino e aprendizagem durante toda a escolarização. É importante observar também como é feita a abordagem das frações nos livros didáticos. Bertoni (2009) conta que o trabalho em muitos livros dos anos iniciais tem consistido na divisão de figuras em partes iguais, no destaque de algumas destas frações, sua nomeação e representação com palavras ou símbolos. Ainda, destaca que, de forma imediata "são dadas as regras para as operações com frações, a maioria sem explicação e desvinculadas das figuras trabalhadas" (BERTONI, 2009, p.21). Dessa forma, o professor, muitas vezes apegado aos livros didáticos, torna-os seus meios de consulta de trabalho, não explorando outros instrumentos também cabíveis de experimentos.

A necessidade de recorrer ao uso da regra da divisão entre frações foi observada também por outras participantes ao resolverem os cálculos solicitados. Neves e Fávero (2009) corroboram de que a memorização de regras tem primazia sobre a compreensão conceitual. Isso leva à desconsideração da importância da compreensão da lógica do sistema numérico decimal para a compreensão da lógica dos algoritmos matemáticos e sua aplicação nas outras áreas de conhecimento.

Silva (2007) relata que é possível realizar um cálculo com base em um algoritmo sem daí derivar um modelo explicativo das operações efetuadas. Dessa forma, o sujeito memoriza uma lei, no sentido de uma regularidade de ações, através da qual pode resolver os problemas. Para resolver as situações que a escola apresenta é preciso que se saiba uma sequência de procedimentos automatizados, onde os estudantes manipulam algarismos em um cálculo sem compreender as operações que realizam (SILVA, 2007).

O entendimento sobre a divisão demanda uma visão mais abrangente do que simplesmente a inversão da multiplicação ou a distribuição uniforme de partes. Ainda que inserida no contexto conceitual da multiplicação, Vergnaud (1996) considera a divisão uma das operações mais complexas entre as quatro operações, por diversas razões conceituais: ela nem sempre é exata, o quociente nem sempre é o resultado da aplicação do operador ao operado, pode haver restos diferentes de zero e a divisão como regra operatória nem sempre é o inverso da multiplicação.

Dessa forma entende-se que esta fusão dos conceitos multiplicativos com os relacionados à partição, pode ser ampliada a partir da compreensão das conexões entre dividendo, divisor e quociente, e das interações que estes termos podem ter entre si.

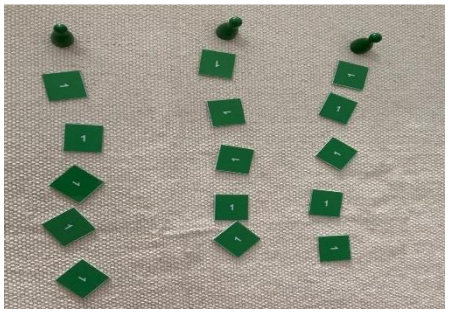
Categoria 2: Boa compreensão dos processos da divisão envolvendo frações

Nesta categoria reúnem considerações das participantes que apresentaram uma boa compreensão dos processos de divisão com frações, envolvendo a capacidade de entender e aplicar os princípios fundamentais das frações, tanto conceitualmente quanto operacionalmente. Isso inclui compreender que a divisão de frações retoma o conceito de equivalência, possível de ser observado a partir do manuseio com os materiais.

Em relação ao entendimento da divisão de dois números, o *Material de Selos* solicitava a repartição de 15 lápis igualmente para três alunos. Aqui foi observado as diferentes representações utilizadas pelas participantes para resolver a proposta. Bia explica: "*Aqui* [participante pega três pinos] *é o divisor, né? Eu me atrapalho com divisor e dividendo. Eu tenho 15* [lápis] *e eu posso transformar aqui* [participante pega algumas fichas] *em unidades. Agora, eu vou dar uma unidade de fichas para cada um dos pinos. Assim que eu faria".*

Percebe-se que, inicialmente, Bia apresenta certa dificuldade ao determinar o dividendo e o divisor. Após o manuseio do material, a participante parece recuperar seu raciocínio para solucionar a questão proposta. A figura 3 apresenta a resolução da participante, onde representa os estudantes com os pinos e distribui os selos um a um, para cada um dos pinos.

Figura 3: Material de Selos – resolução de Bia



Fonte: as autoras

Em seguida, deu-se sequência ao diálogo, perguntando: Simbolicamente, como é que você pode representar essa situação? Podes desenhar no papel? Bia responde: "*Eu faria 15 : 3* [15 dividido por três] *e, em seguida, representaria o cálculo no papel".*

Percebe-se que, na resposta dada acima, a participante não relacionou a divisão à possibilidade de ser representada também na forma de fração, uma vez que sugeriu a representação de 15 : 3. O mesmo caso ocorreu com outras participantes. Fani representa no papel a numeração 15 : 3 e explica: "*Daria cinco para cada um. Assim, eu distribuiria os 15 lápis e não sobraria nada".*

Ao realizarem a representação 15:3 demonstra o fato de que, muitas vezes, enxergam os números naturais como números isolados sem relação entre si, e acabam percebendo a representação da fração como outra coisa, algo que não se equivaleria a uma divisão entre números inteiros. Bertoni (2009) em seu estudo sobre ensino de frações afirma que "outro ponto que se nota é a desarticulação entre a compreensão da aprendizagem de frações e a dos números naturais" (p.22), a complexidade de lidar com frações que exigem mais de uma unidade para sua representação dificulta o processo de compreensão e manipulação desses conceitos matemáticos pelos professores. Isso pode ocorrer devido à necessidade de visualizar e operar com partes fracionárias de um todo de maneira abstrata, o que pode ser mais difícil do que trabalhar com números inteiros. Muitas vezes o professor se apoia em figuras ou regras, ou ambos, para fornecer respostas.

No instrumento 4 - *Pinos e Círculos de Frações*, percebe-se que as participantes inicialmente tiveram dificuldades de operar com o material concreto, sentindo necessidade de realizar o cálculo aritmético, no papel ou mentalmente. Após interagirem e irem respondendo a entrevista clínica, algumas conseguiram fazer relações a partir da manipulação. Em determinado momento da entrevista foi solicitado que utilizassem o material para realizar a divisão de ½ por ⅓, onde os pinos representam o divisor e os círculos representam o dividendo. Quanto ao uso do material, a participante poderia recorrer tanto aos pinos quanto aos círculos de frações para completar quantidades, no momento de representar a operação indicada. Ao manusear o material, a participante começa a explicar como a operação se realiza:

> A gente quer repartir o que é justo para todo mundo, então, um meio dividido para um terço seria o que cada um vai ganhar. A gente quer descobrir o quanto que uma pessoa ganharia, e daí cada uma ganhará um meio. Assim, eu teria o que cada um deveria ganhar (Fani, participante da pesquisa).

Em seguida, é questionada para explicar como havia chegado a esse raciocínio, a partir do manuseio do material. A participante responde que, a partir da ideia do justo, cuja proposta pode ser observada no material, ela conseguiu compreender a operação de dividir um meio por um terço no material concreto:

> Eu pensei em duas coisas: como eu sei fazer a divisão no papel e também sei sobre a ideia do justo ser o que cada inteiro recebe, então, para eu ter um inteiro, eu teria que ter três terços e, por isso, o resultado daria três meios, então, o que uma pessoa vai receber, na verdade, é três meios (Fani, participante da pesquisa).

A partir dessa constatação, pode-se perceber o entendimento de Fani sobre a necessidade de completar o inteiro, antes de operar. De acordo com Vergnaud (1996, p.64) o conhecimento de um indivíduo "se constrói à medida que ele consegue estabelecer relações e conceitualizar determinadas situações ou problemas, que necessitam de teoremas de níveis diferentes". Ainda de acordo com este autor, observa-se que, nesse sentido, "a questão da conceitualização perpassa não somente questões de caráter teórico, pensando no verbo conceitualizar, mas se dá por meio de uma estreita dialetização entre o empírico e o teórico" (VERGNAUD, 1996, p. 64). Ou seja, o conceito matemático, a partir do manuseio do material, acaba por transitar de um meio teórico, inserindo-se em um espaço empírico de testagem.

Lorenzato (2010) afirma que o concreto é imprescindível para aprendizagem inicial, mesmo que não seja suficiente para a abstração matemática. Nesse sentido, ainda que as ações concretas e experienciadas não sejam suficientes para o desenvolvimento do pensamento abstrato matemático, o autor acrescenta que para "se alcançar a abstração é preciso começar pelo concreto" e enfatiza que, "[...] este é o caminho para a formação de conceitos" (LORENZATO, 2010, p. 20).

Categoria 3: Domínio da operação de divisão envolvendo frações

As situações reunidas nesta categoria apresentaram um domínio dos processos de divisão envolvendo frações. Nesse sentido, considerou-se a capacidade do participante em entender os conceitos subjacentes à divisão de frações e aplicá-los de forma flexível e eficaz em uma variedade de situações, incluindo o uso do material.

Com o instrumento 2, a visualização do material com as formas geométricas favorece a ideia da equivalência. Nos movimentos realizados por Jane, conforme a sequência de imagens da figura 4, percebe-se que, embora as figuras vazadas sejam diferentes, a área do triângulo e

retângulo mantém-se as mesmas. A entrevistada afirma: *"Posso transportá-las, só que a disposição das peças ficará diferente, mas a área que elas estão ocupando é a mesma"* (Jane).

Figura 4: Formas de Ferro para Equivalência – resolução de Jane

Fonte: as autoras

Neste experimento tinha-se a intenção de observar como as participantes encontrariam o sentido de equivalência entre as formas geométricas. Ao transportar cada uma das três figuras vermelhas e recolocá-las no retângulo vazado, ao lado, Jane complementa sua explicação: *"As duas figuras têm a mesma área e, por mais que no início não pareça, a partir do movimento das peças dá para ter a conclusão que realmente é a mesma área, ou seja, essas se equivalem".*

A constatação da equivalência entre as áreas das figuras evidencia também a importância do uso de materiais manipulativos e da exploração ativa em sala de aula. Fani ainda descreve: *"[...] que o retângulo ficou todo preenchido com as formas que formavam o triângulo, então, os dois têm a mesma área, ou seja, as áreas vão ser equivalentes".*

Essa visualização e compreensão de equivalência pode ter acontecido porque elas observaram e relacionaram a igualdade das áreas ao medir as superfícies, enquanto encaixavam todas as peças do triângulo grande dentro do retângulo. Em outras palavras, ao rearranjar as peças do triângulo grande para preencher o retângulo, elas perceberam que as áreas dos dois eram iguais e, assim, visualizaram a equivalência das áreas.

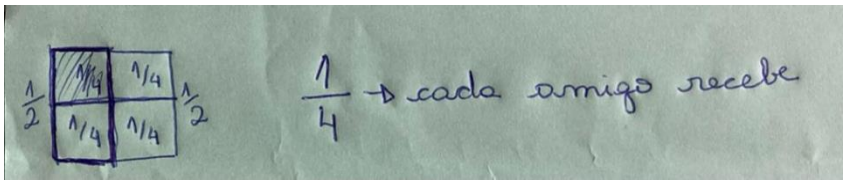
Dando continuidade à análise das respostas, no instrumento 3 abordou-se a *Ideia do Justo*. Montessori (1934a) denominou como a "ideia do justo" quando, em uma divisão com frações, justo é o que o número inteiro recebe. Neste instrumento forneceu-se papel e lápis e pediu-se para as participantes solucionarem a seguinte situação matemática: "João não quis mais a metade de seu chocolate e resolveu repartir a metade deste para seus dois amigos. A partir dessa situação gostaria que você representasse o fato ocorrido utilizando frações".

Nas respostas observou-se que todas as participantes conseguiram compreender e representar a situação, resultando na fração de ¼ para cada um dos amigos, conforme reportado na explicação de Fani:

> Ele tem a metade do chocolate e essa metade aqui é dele, e ele quer dividir essa metade que sobra para dois amigos, então, ele quer fazer um meio dividido por dois. Assim, o que a gente pode observar é que esse meio ele quer dividir para duas pessoas. Então, poderia fazer a divisão aqui (representa no desenho), assim cada um vai receber esse pedacinho aqui que eu pintei mais forte. Logo, da metade que sobrou, cada um vai receber a metade da metade, dessa forma, cada um vai receber um quarto (Fani, participante da pesquisa).

Inicialmente Fani desenha o quadrado grande e parte-o ao meio, figura 5, indicando a fração de ½, conforme escreve à direita e à esquerda do quadrado. Em seguida parte cada uma das metades ao meio, tendo então 4 partes de ¼, conforme identifica em cada um dos quadrados. A partir disso, pinta uma das metades, representando a parte que cada amigo recebe.

Figura 5: Ideia do Justo – resolução de Fani



Fonte: as autoras

Após a conclusão do desenho foi questionado a respeito do entendimento das participantes sobre o divisor desta operação, se seria um número inteiro ou fracionário. Todas as participantes responderam que este divisor era um número inteiro, por estar sendo repartido por duas pessoas: "*Esse número era uma fração (½), porém, ele queria dividir essa quantia entre dois amigos, então, ele dividiu entre dois, o qual se trata de um número inteiro"* (Jane).

A partir das respostas obtidas, verificou-se que algumas das participantes entenderam que a divisão realizada entre os amigos traria a ideia do justo, conforme explica Fani:

> Sim, porque a gente pegou a metade que a gente tinha e dividiu em duas partes exatamente iguais, então, é justo porque cada um recebeu a mesma quantidade. Na verdade, a gente está sempre dando o justo para cada um. Quando faz a divisão por um número inteiro, a gente está dando a quantidade que a gente está dividindo e dando exatamente a mesma coisa para todo mundo, então, é justo que cada um ganhe a mesma quantidade que foi dividida (Fani, participante da pesquisa).

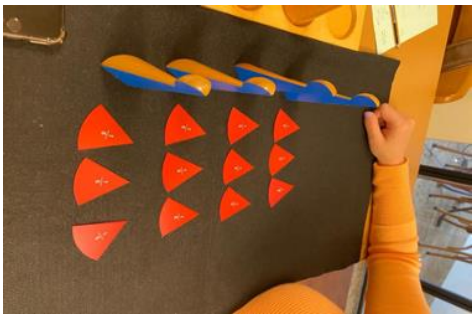
O quarto instrumento envolve dois materiais. Os *Pinos de Frações* são compostos pelo pino inteiro e outros pinos repartidos em partes menores que o inteiro, quando usado na divisão determina o divisor. A caixa dos *Círculos de Frações* é usada para expressar a quantidade do dividendo. Foi solicitado que as participantes realizassem algumas divisões usando o material para representar a operação. Uma das operações solicitadas foi a divisão de três sextos (3/6) por um quarto (¼), com a intenção de compreender como a entrevistada lida com o fato de ter no dividendo e no divisor números fracionários. Assim, Jane apresentou o seguinte raciocínio: *"Primeiro, eu vou pegar os três sextos* [nos círculos de frações], *que é a quantidade que eu tenho. Assim, um quarto* [nos pinos de frações] *ganharia três sextos e os outros quartos (¼+¼+¼) também devem ganhar três sextos, o que daria um total de 12/6, que daria 2".*

Pôde-se perceber que as participantes desta categoria não apresentaram dificuldade em manusear o material e colocá-lo em correspondência com o cálculo proposto, uma vez que já haviam tido a primeira experiência com a divisão anterior, em que se depararam com uma divisão entre frações ao realizarem ½ dividido por 1/3. Assim, elas buscam repetir o mesmo raciocínio para outras divisões entre frações, por entenderem que o justo é o que o inteiro ganharia, por isso, todas as partes devem receber a mesma quantidade. Fani também consegue organizar seu cálculo a partir do material concreto:

> Eu vou pegar três sextos aqui nos círculos. Depois, eu tenho que dividir 3/6 por um quarto, os quais eu vou pegar nos pinos. Então, se eu seguir a mesma ideia que eu tive antes, de pensar que, quando a gente está dividindo, a gente tem que pensar o que é justo para um inteiro (Fani, participante da pesquisa).

Na continuidade do raciocínio de Fani, conforme figura 6, é possível observar como organiza o material para operar. Escolhe quatro partes de ¼ para representar o divisor, utiliza os pinos, e três partes de círculos de frações, onde cada parte equivale a ⅙, para representar 3/6. Nesse movimento percebe-se seu entendimento de que o justo é o que o inteiro ganha.

Figura 6: Divisão de 3/6 por ¼ - resolução de Fani



Fonte: as autoras

Seguindo, Fani continua seu raciocínio:

> Sendo assim, como o que eu quero dividir é o que cada um inteiro recebe, então, eu teria que fazer o seguinte: dar três sextos para cada um quarto e vou usar o meio como se fosse uma equivalência. Então, um inteiro juntando todos os quartos vai receber dois inteiros, logo, o Pino inteiro vai receber dois inteiros. Dá para perceber que três sextos divididos por um quarto são dois inteiros (Fani, participante da pesquisa).

Neste movimento percebe-se que a participante opera a partir dos seus conhecimentos consolidados sobre a divisão entre frações. No que se refere aos mecanismos de controle da participante durante o experimento, observa-se que ele possui duas fontes que fornecem os dados para a constituição da sua conduta "uma é a ação propriamente dita e a outra é a conceituação que o sujeito possui sobre o objeto. Percebe-se que as operações se dirigem das ações às conceituações ou dos conteúdos às formas" (SILVA, 2007, p.21).

Silveira, Souza e Powell (2024) evidenciam que questões problemáticas relacionadas à frações, quando pensadas como conteúdo matemático escolar, relacionam-se desde os diversos tipos de representação de uma fração no mundo real, assim como a forma notacional de escrita, a existência enquanto número, as formas de representação física e pictórica, a complexidade de numerosas regras aritméticas, até a forma de ensino do professor.

6 Reflexões das participantes após a manipulação dos instrumentos

Os instrumentos apresentados tiveram o propósito de compreender o raciocínio do professor que ensina matemática a partir do material concreto manipulável montessoriano. Ao final da entrevista foi solicitado às entrevistadas que fizessem um breve relato sobre a experiência com materiais manipuláveis e como compreenderam sua aplicação na divisão de frações. Ana traz uma constatação relevante ao trabalho, afirmando que sua dificuldade em demonstrar os cálculos a partir do material teria se iniciado quando foi solicitado para realizar as divisões com frações. A participante confidencia a necessidade de desconstruir seu pensamento abstrato, que estaria relacionado ao que Montessori (1965) traz como qualidades comuns que não são manuseáveis, mas independentes dos objetos reais. Essa transformação ocorreu para que pudesse construir um outro pensamento, reconstruído a partir de operar no material manipulável. Isso pode ser evidenciado no trecho abaixo:

> Eu sei a respeito da conta que coloquei no papel. Sabia que um meio dividido por um terço era só multiplicar a primeira fração pelo inverso da segunda, que vai me dar três meios. Pensando nisso, a única coisa que fez sentido seria pegar os três terços e colocar o meio para cada um. Só que descobri isso porque eu já sabia fazer a operação, então eu precisei desconstruir aquilo que eu já tinha feito e tentar descobrir, de forma

> prática, como eu resolveria esse problema, o que na operação eu sei fazer (Ana, participante da pesquisa).

Por fim, perguntou-se às participantes o que poderia ficar como recomendação para o ensino da divisão de frações a partir do material. Uma delas contou sobre a oportunidade que o material trouxe para expressar o cálculo da divisão de frações de forma concreta. Montessori explica que os materiais "servem para compreender como é indispensável utilizar um material simples e preciso sobre o qual a inteligência se desenvolve alcançando uma nova descoberta" (MONTESSORI, 1934a, p.10). Tal entendimento corrobora com o relato de Fani: *"Achei muito interessante esse material, porque já tentei fazer ou expressar a divisão de fração muitas vezes no papel, mas eu nunca consegui, de fato, visualizá-la antes de ter acesso a esse material"*.

A participante também retoma a ideia do justo e do inteiro, teoria abordada por Montessori (1894), onde a partir do material, relata a facilidade que teve em visualizar a construção do raciocínio matemático, que, quando feito de maneira tradicional, permanece somente em condições abstratas. Tal relato pode ser evidenciado abaixo:

> No material a gente não precisa nem pensar no algoritmo para fazer a divisão, só olhamos para ele e pensamos na ideia do justo, como sendo o que uma pessoa inteira vai receber. Assim, a gente consegue fazer a divisão muito facilmente e concretamente, que é uma coisa que eu nunca tinha conseguido fazer anteriormente (Fani, participante da pesquisa).

O relato acima dialoga com o estudo de Silva (2007), sobre o fato de que muitos alunos não pensam na conta que estão realizando, isto é, não pensam sobre a operação, como esta se dá, sobre a sua significação, visando somente um resultado e uma metodologia facilitada para atingi-lo. Silva (2007) explica que o estudante acaba memorizando a ordem de ações que deve executar e aplicar na resolução do cálculo, mesmo não compreendendo o processo e os conceitos envolvidos durante o desenvolvimento do algoritmo. O material montessoriano, conforme os experimentos feitos nas entrevistas, mostrou-se capaz de proporcionar a visualização das operações, bem como favorecer a observação da compreensão do pensamento do professor a respeito do cálculo a ser feito.

7 Considerações conclusivas

Neste estudo propôs-se uma entrevista clínica com professoras que ensinam ou já ensinaram frações nos anos iniciais do Ensino Fundamental, com a intenção de observar como compreendiam a equivalência e divisão de frações, a partir da manipulação do material montessoriano. A partir dos dados coletados e interações com os instrumentos, observou-se diferentes interpretações e raciocínios, onde algumas das participantes enfrentaram mais obstáculos do que outras ao tentarem encontrar soluções para as situações propostas.

Dessa forma, alinhado ao que Vergnaud (1996) afirma sobre o desenvolvimento do campo conceitual do indivíduo, percebeu-se que, embora as participantes tivessem que alcançar um nível de compreensão para então manipularem o material, as situações vivenciadas foram diferentes para cada uma. Conforme os instrumentos iam sendo apresentados, percebeu-se que algumas participantes tiveram necessidade de realizar o cálculo algorítmico inicialmente, para posteriormente tentar representar a operação com o material manipulável. Algumas afirmaram ter a necessidade de aplicar a regra da divisão de frações para resolver os cálculos solicitados.

Enquanto que na compreensão parcial da divisão de frações, as participantes atuaram a partir de regras e memorização, em busca de uma possível relação posterior com o material

concreto, nas explicações das participantes com domínio da operação, percebe-se que o apoio de seu pensamento acontece a partir do material, o que era uma demanda dos instrumentos. Mesmo com o uso de materiais manipulativos, como os *Pinos e Círculos de Frações,* por exemplo, mostrou-se um instrumento desafiador para algumas das participantes expressarem suas compreensões desta operação aritmética.

A experiência anterior destas professoras com números fracionários pode explicar os seus entendimentos e compreensões a partir do material concreto. Diante da aplicação, tem que se considerar que a maioria das participantes, embora não tenham manifestado compreensão total na divisão de frações por frações, demonstraram um grande interesse em conhecer o material que pudesse levá-las a tal compreensão. Assim sendo, entendemos que possivelmente esteja faltando para esses profissionais uma formação que se preocupa com questões de construção básica dos conceitos a partir de materiais concretos manipuláveis. Dessa forma, este estudo pretende contribuir com trabalhos relacionados a formação continuada de professores que ensinam matemática, de modo que suas didáticas sejam voltadas a construção de significados. Cabe destacar, portanto, a importância de seguirem estudos futuros sobre a equivalência e divisão de frações.

Esta investigação limitou-se em conhecer entendimentos relacionados a operação de divisão com números fracionários a partir de materiais manipuláveis. Uma ampliação deste estudo poderia concentrar-se em compreender sobre as outras operações aritméticas envolvendo frações e manuseio no material, para então saber se as limitações e obstáculos restringem-se à divisão ou abarcam as outras operações.

8 Agradecimentos

Este trabalho foi realizado com apoio financeiro da FAPERGS, vinculado ao Projeto de Pesquisa “Produtos Educacionais para a Alfabetização no Laboratório de Matemática”.

9 Referenciais Bibliográficos

Alves, L. D. (2019). *Alfabetização matemática na perspectiva montessoriana* (Dissertação de Mestrado). Universidade Federal do Paraná, Curitiba, PR.

Aguiar, M. C. A. (1980). *A formação dos conceitos de fração e de proporcionalidade e as operações concretas e formais* (Dissertação de Mestrado). Universidade Federal de Pernambuco, Recife, PE.

Behr, M., Lesh, R., Post, T., & Silver, E. (1983). Rational number concepts. In R. Lesh & M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes* (pp. 91-125). New York: Academic Press.

Bertoni, N. E. (2009). *Módulo VI: Educação e linguagem matemática IV*. Brasília: Universidade de Brasília.

Brasil. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. (2018). *Base nacional comum curricular: Ensino Médio*. Brasília, DF.

Camejo, A., Maranhão, C., & Miranda, M. R. (2009). Ideias de professoras dos anos iniciais sobre números racionais. In *Anais do 4º Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática*. Brasília, DF.

Canova, R. F., & Campos, T. M. (2009). Competência, concepção e crenças de professores polivalentes a respeito de fração. In *Anais do 4º Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática*. Brasília, DF.

Cavalcanti, E. M. S., & Guimarães, G. L. (2009). Os significados de fração em livros didáticos das séries iniciais. In *Anais do 4º Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática*. Brasília, DF.

Delval, J. (2002). *Introdução à prática do método clínico: descobrindo o pensamento das crianças*. Porto Alegre, RS: Artmed.

Garcia, A. F., Pietropaolo, S. R. C., & Campos, T. M. M. (2009). Conhecimento profissional docente de professores das séries iniciais em um processo de formação continuada, tendo como objeto de discussão o processo de ensino e aprendizagem das frações. In *Anais do 4º Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática*. Brasília, DF.

Kieren, T. E. (1976). On the mathematical, cognitive, and instructional foundations of rational number. In R. Lesh (Ed.), *Number and measurement: Papers from a research workshop* (pp. 101-144). Columbus: Eric Clearinghouse for Science, Mathematics, and Environmental Education.

Lorenzato, S. (2006). *O laboratório de ensino de matemática na formação de professores*. Campinas, SP: Autores Associados.

Lorenzato, S. (2010). *Para aprender matemática*. Campinas, SP: Autores Associados.

Montessori, M. (1934a). *Psicoaritmética*. Barcelona: Casa Editorial Araluce.

Montessori, M. (1934b). *Psico-geometria: El studio de la geometría basado en la psicología infantil*. Barcelona: Casa Editorial Araluce.

Montessori, M. (1957). *Ideas generales sobre mi método*. Buenos Aires: Editorial CEPE.

Montessori, M. (1965). *Pedagogia científica: A descoberta da criança*. São Paulo, SP: Flamboyant.

Moraes, M. S. L. (2009). *Escola Montessori: Um espaço de conquista e redescobertas* (Dissertação de Mestrado). Centro Universitário La Salle, Canoas, RS.

Neves, R. S. P., & Fávero, M. H. (2009). A pesquisa de intervenção no desenvolvimento de competências conceituais: A divisão e os racionais em questão. In *Anais do 4º Simpósio Internacional de Pesquisa em Educação Matemática*. Brasília, DF.

Piaget, J. (1971). *A formação do símbolo na criança*. Rio de Janeiro, RJ: Zahar Editores.

Rangel, A. C. S. A. (2019). *Construção da divisão nos anos iniciais em seus dois significados: Medida e partilha*. Porto Alegre, RS: Neemias.

Silva, J. A. (2007). Modelos explicativos elaborados por adolescentes e adultos para o cálculo com frações: Da percepção ao pensamento operatório. *Educação Matemática Pesquisa*, 9(2), 293-318.

Silveira, E., Souza, M. A. V. F., & Powell, A. B. (2024). Estudo de frações: Superficialidades, parcialidades ou equívocos. *Bolema*, 38(e230100), 1-23.

Toledo, M. B. A., & Toledo, M. A. T. (2010). *Teoria e prática de matemática: Como dois e dois*. São Paulo, SP: FTD.

Vergnaud, G. (1996). A teoria dos campos conceituais. In J. Brum (Org.), *Evolução das relações entre a psicologia do desenvolvimento cognitivo e a didática da matemática*. Lisboa: Instituto Piaget.