

Futuro ancestral da geometria¹

Ancestral future of geometry

Franck Bellemain²

Paula Moreira Baltar Bellemain³

Resumo: Nesse texto discutimos, sob a ótica da Teoria Antropológica do Didático (TAD), fragmentos da história da geometria e possíveis impactos sobre seu ensino, na atualidade. Revisitamos a geometria das origens, a geometria euclidiana e a geometria gráfica, destacando o lugar das figuras geométricas, ao longo do tempo e em práticas sociais diversas e elencamos elementos de praxeologias em torno dessas geometrias. Com base nesse sobrevo, evidenciamos a importância das formas geométricas na articulação entre as versões abstratas e aplicadas da geometria e defendemos a importância de considerar a geometria como domínio de conhecimento e estudo autônomo, porém entrelaçado com a matemática e outras disciplinas.

Palavras-chave: Geometrias. Teoria Antropológica do Didático. Forma Geométrica.

Abstract: In this text we discuss, from the perspective of the Anthropological Theory of Didactics (TAD), fragments of the history of geometry and possible impacts on its teaching. We revisit the geometry of origins, Euclidean geometry and graphic geometry, highlighting the place of geometric figures, over time and in different social practices, and we list elements of praxeology around these geometries. Based on this overview, we highlighted the importance of geometric shapes in the articulation between the abstract and applied versions of geometry and defended the importance of considering geometry as an autonomous domain of knowledge and study but intertwined with mathematics and other disciplines.

Keywords: Geometries. Anthropological theory of didactics. Geometric form.

1 Introdução

Esse texto discute, sob a ótica da Teoria Antropológica do Didático (TAD), relações entre fragmentos da história da geometria e possibilidades para seu ensino, na atualidade. Ele prolonga um texto anterior (Bellemain, 2024) no qual são apresentados argumentos em defesa do reconhecimento de uma geometria instrumental como ciência e área de pesquisa transdisciplinar. Com efeito, a geometria clássica e a geometria sintética (Lopes et al., 2019) não são mais reconhecidas como área de pesquisa, entre outras razões, por não produzirem mais resultados novos. Entretanto, “outras” geometrias (topológica, diferencial, algébrica, ...), consideradas como parte da matemática, têm visibilidade nos órgãos de fomento. Mesmo sem ser área de pesquisa, o ensino de conteúdos de geometria clássica, associados ao desenho geométrico, continua necessário. A reforma da matemática moderna, que reduziu o ensino de geometria em nome do “tudo é álgebra”, gerou consequências nefastas para as disciplinas que precisam de geometria como as artes, a física, as engenharias etc. Nesse contexto, o ensino da geometria pode legitimamente reivindicar seu reconhecimento como área de pesquisa, no mínimo, enquanto subárea da área de ensino ou de ensino das ciências.

Do ponto de vista da TAD, cabe interrogar as razões de ser dos objetos de saber veiculados na escola, relacionando esse questionamento tanto a suas formas de vida no âmbito

¹ Título inspirado em Krenak (2022).

² Universidade Federal de Pernambuco • Recife, PE - Brasil • ✉ franck.bellemain@ufpe.br • **ORCID** <https://orcid.org/0000-0001-5358-2057>

³ Universidade Federal de Pernambuco • Recife, PE - Brasil • ✉ paula.bellemain@ufpe.br • **ORCID** <https://orcid.org/0000-0002-2864-8883>

dos saberes produzidos pelos pesquisadores, como os usos sociais desses mesmos objetos.

Como destacam Bosch e Gascón (2007),

Dado que las matemáticas son un conocimiento que se usa, enseña, aprende, practica y difunde en instituciones sociales, para entender las matemáticas escolares es necesario entender las razones que motivan y justifican su enseñanza, y también el modo cómo esas matemáticas están siendo interpretadas en las diferentes instituciones de producción, desarrollo, uso y difusión. (Bosch e Gascón, 2007, p. 291)

É nessa linha de pensamento que pretendemos contribuir para a problematização do ensino de geometria. Em conformidade com o olhar da TAD, levantamos questões sobre interpretações da geometria em instituições no âmbito das quais esse objeto de saber tem sido produzido e é utilizado, buscando inferir possíveis relações com o ensino de geometria.

O desenho geométrico já foi incluído na educação básica, no ensino regular brasileiro e nesse contexto, a geometria era objeto de estudo em duas disciplinas (desenho e matemática), com abordagens geralmente dissociadas uma da outra. Em desenho geométrico, o ensino era voltado sobretudo ao traçado de figuras, com instrumentos (régua, compasso, esquadros), enquanto na matemática estudavam-se objetos abstratos, sem muita preocupação com os objetos gráficos que os representam. Atualmente, o desenho geométrico, embora ausente do ensino regular, é estudado em várias formações técnicas de nível médio, além de dar um suporte importante a práticas profissionais como a arquitetura, as engenharias e o design. A partir dessa constatação, interrogamos brevemente o lugar da geometria nas instituições produtoras hoje e ao longo da história.

Hoje, a geometria clássica encontra mais espaços de vida nas áreas nas quais é utilizada do que na própria matemática, e alguns geométricos (Lopes et al, 2019) defendem o reconhecimento de uma geometria gráfica (geometria clássica gráfica) associada às tecnologias computacionais como área de pesquisa.

Discordamos do argumento que apoia a defesa do reconhecimento da geometria gráfica (GG) como ciência na sua associação com as tecnologias computacionais, pois estabelece uma certa dependência dos objetos e métodos da ciência geométrica em relação ao desenvolvimento de artefatos tecnológicos. Do nosso ponto de vista, a geometria fornece princípios teóricos para o desenvolvimento de tecnologias computacionais, mas tem vida própria.

Entendemos que o diferencial da GG em relação a outras geometrias diz respeito às propriedades exploradas e às ferramentas e métodos, que são gráficos. Nesse sentido, ela foca no estudo dos objetos (pontos, linhas, superfícies e volumes) e relações que podem ser representados e investigados graficamente. (Bellemain, 2024, p. 6)

Além disso, a falta de reconhecimento da geometria gráfica como área “autônoma” a leva a ser “engolida” pelas áreas que precisam dela, com sua associação às tecnologias computacionais. Assim, em certo sentido a geometria termina sendo substituída pelos *softwares* utilizados nas áreas que precisam de geometria gráfica computacional.

Nossa proposta é outra. Defendemos o reconhecimento de uma geometria instrumental, que atravessa e é atravessada por sua presença não só na matemática, mas em muitas outras áreas reconhecidas institucionalmente como disciplinas. Com esse viés, consideramos a geometria como ciência das formas (geométricas) e nos interessamos pelo desenvolvimento de princípios teóricos e metodológicos geométricos para as disciplinas (científicas, mas não somente) e para a articulação entre disciplinas.

Para defender essa proposta, faremos uma breve visita a fragmentos da evolução histórica da geometria, questionando mais especificamente o papel do desenho em três grandes períodos dessa evolução:

- A geometria das origens, que corresponde ao período que precede a sistematização dos conhecimentos geométricos e sua organização nos Elementos de Euclides.
- A geometria sintética, que começa com Euclides e se estende até a “algebrização” dos conhecimentos geométricos iniciada com o Programa de Erlangen de Felix Klein, geometria ensinada hoje na matemática.
- A geometria gráfica, herdeira de uma geometria clássica aplicada às áreas de construção e engenharias (artes e ofícios), que tenta manter um espaço de sobrevivência científica da geometria através das áreas que ainda a utilizam para a exploração e a representação de seus objetos.

Nesse sobrevoo histórico-epistemológico estão ausentes várias “geometrias” como geometrias não-euclidianas, analítica, diferencial, algébrica, analagmática, simplética etc. Apesar de reconhecer a importância dessa visão mais abrangente das geometrias, nosso interesse nesse texto se volta à relação complexa entre a geometria “teórica” (a exemplo da sintética) e a geometria aplicada (a exemplo da geometria gráfica), e ao papel dos objetos gráficos e das formas nessa relação. Consideramos que a problematização dessa relação tem impactos importantes sobre o lugar da geometria no currículo escolar.

Apoiados na Teoria Antropológica do Didático (TAD), questionamos onde se situam as formas geométricas em algumas praxeologias ao longo da história da geometria para dar suporte à reflexão sobre possíveis impactos no ensino de geometria hoje.

2 Alguns elementos da TAD

A adoção da TAD apoia-se na possibilidade que essa teoria oferece de emancipação da didática em relação a outros vínculos institucionais.

Le concept de transposition didactique puis sa généralisation sous le nom de transposition institutionnelle ont outillé un premier effort pour émanciper la didactique de l’emprise de l’objet étudié, tout particulièrement de la tyrannie des disciplines enseignées et de leurs suzerains, invoqués de façon souvent opportuniste, les disciplines « savantes » correspondantes. (Chevallard, 2005, p. 4)

Do ponto de vista da TAD, pode-se examinar e questionar as formas de vida que a geometria assume ou pode assumir na escola, a partir de um distanciamento em relação à matemática e às disciplinas que utilizam o desenho técnico, explorando possibilidades de interlocução da geometria com diversas disciplinas.

Ce que dit la théorie de la transposition didactique, c’est qu’il n’y a pas de « repère privilégié » à partir duquel observer, analyser, juger le monde des savoirs. Le « savoir savant » lui-même est une fonction, non une substance, et par rapport à quoi il faut dûment s’excéntrer. De là que le travail du didacticien consiste, chaque fois, en la construction d’un repère jamais définitif depuis lequel déconstruire et reconstruire le savoir dont il analyse la diffusion. (Chevallard, 2005, p. 5)

Isso não significa que o modo como a geometria vive em diferentes âmbitos é desconectado da análise didática relativa à geometria, mas não cabe a nenhum desses tipos de instituições (que produz ou que utiliza os objetos de saber em foco) a elaboração de modelos de referência para a difusão da geometria.

Le continent didactique est ainsi un chantier immense, qui ne saurait se développer par simple recopiage d'institutions établies, institutions qu'il s'agit, non pas d'imiter, mais de « penser », c'est-à-dire de modéliser – de façon toujours partielle, bien entendu. (Chevallard, 2005, p. 21)

A noção de praxeologia, no âmbito da TAD, é o instrumento por meio do qual se modelizam as atividades humanas (inclusive, mas não unicamente, as atividades matemáticas):

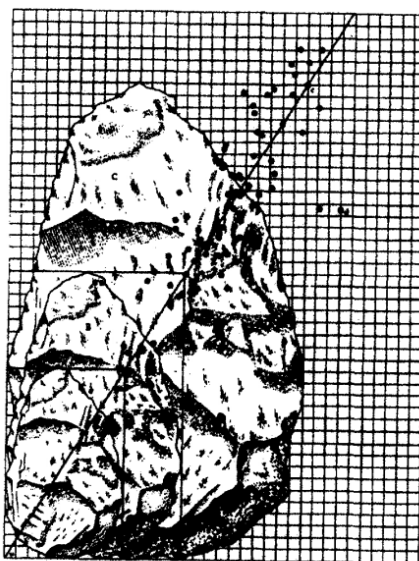
Le postulat de base de la TAD fait violence à cette vision particulariste du monde social : on y admet en effet que toute activité humaine régulièrement accomplie peut être subsumée sous un modèle unique, que résume ici le mot de praxéologie. Avant même d'examiner ce qu'est une praxéologie, on doit donc noter que l'on part ainsi d'une hypothèse qui ne spécifie nullement l'activité mathématique parmi les activités humaines : c'est autrement que les mathématiques devront se voir reconnues leur spécificité. (Chevallard, 1998, p. 91)

Mais especificamente, atividades regularmente executadas são consideradas, no modelo mais simples, a partir de quatro componentes interligados: realizar uma **tarefa** de certo tipo, por meio de uma **técnica** , justificada ou engendrada por uma **tecnologia** que, por sua vez, é explicada num nível mais profundo por uma **teoria** . A modelização de praxeologias não se faz no vácuo, mas sim, institucionalmente e historicamente situada. A articulação entre praxis (tarefa-técnica) e logos (tecnologia-teoria) oferece a possibilidade de adentrar na relação estreita, bidirecional e desafiadora entre o intelecto e o físico. A universalidade da proposta de Chevallard (ibid.) é apoiada sobre uma grande extensão do sentido dado, notadamente dependendo de contextos e épocas, aos termos tarefa, técnica, tecnologia e teoria. Com a noção de praxeologia, destaca-se a interdependência entre saber e saber-fazer e o entrelaçamento de vários níveis de ação, de justificação e de abstração.

A grande adaptabilidade da noção de praxeologia a diversas áreas de conhecimento e épocas da história humana vem da flexibilidade relativa à caracterização de cada elemento que a compõe. Em contrapartida, da mesma forma que o postulado da TAD vai contra a visão particularista do mundo social, ele exige também uma nova análise das atividades humanas, com suas exigências de anticonformismo, perspicácia e criatividade, questionando os modelos de construção do conhecimento estabelecidos e frequentemente impostos. Nesse contexto, a proposta desse texto é revisitar fragmentos da evolução da geometria, buscando evitar o olhar engessado por uma visão eurocêntrica e tecnicista, a fim de esboçar outras formas possíveis de vida para a geometria na escola hoje.

3 Da geometria das origens à geometria euclidiana

A origem do termo geometria, cuja etimologia remete à medida da terra, e dos saberes aos quais se atribui esse campo são situados 3000 anos antes da nossa era, nas civilizações do Egito Antigo e da Babilônia, apoiada na descoberta de tábuas, registros das primeiras noções de geometria. Nesses registros, boa parte das noções de geometria mobilizadas diz respeito à comparação ou ao cálculo de comprimentos, área e volumes, o que é coerente com a etimologia da palavra, embora não corresponda plenamente ao que se atribui à geometria hoje. Essa visão, essencialmente eurocêntrica, toma os Elementos de Euclides como obra fundadora da geometria e ignora milênios de desenvolvimento conceitual de “toda” a humanidade ao longo dos quais as formas geométricas foram concebidas, registradas e utilizadas.

Figura 1: Padrão de pedra entalhada**Figure 2.** Diagramme illustrant les proportions de bifaces du site de Kilombe. Kenya, vers -700 000 (Gowlett, in Rudgley, 1999, p. 87).

Fonte: Keller, 2001, p.332

Keller (2001) destaca que tais formas já aparecem nas realizações dos bifaces pelos entalhadores de pedras (figura 1) numa época remota (entre 1.000.000 a.C. e 300.000 a.C.), se tornam mais sofisticadas com a laminagem e os primeiros riscos, e enfim por meio de produções gráficas (entalhadas, riscadas, pintadas).

On voit que le travail graphique, de par sa logique d'évocation, qui provient elle-même d'une pensée spécifique mythique-rituelle, provoque la création d'éléments à caractère géométrique : non pas sous forme explicite, indépendante, mais sous formes d'habitudes mentales d'évidences. Le système euclidien ne les inventera pas, mais il les posera ; car les définitions euclidiennes n'ont de sens, précisément, que par rapport à ces habitudes mentales. (Keller, 2001, p.339)

Nesse trecho, Keller (ibid.), além de afirmar que os objetos geométricos não nasceram com Euclides, destaca que eles aparecem como símbolos gráficos em rituais míticos. Claro que entre os símbolos de forma geométrica dos rituais e os objetos geométricos representados e manipulados em geometria existe um salto conceitual enorme de várias centenas de milhares de anos. Entretanto, se os símbolos dependem dos objetos simbolizados, eles abrem caminhos para especulações independentes desses objetos:

Les nouvelles figures graphiques sont donc une création spontanée du mode de pensée symbolique, et qui n'existent dans la conscience que pour autre chose, pour l'objet symbolisé et pas pour elles-mêmes ; mais de fait, il y a séparation matérielle entre les deux et par suite possibilité d'indépendance, et possibilité de spéculation indépendante sur ces symboles. (ibid., p.336)

Além de figuras, outras noções importantes de geometria, particularmente para a geometria sintética, começaram a emergir muito antes da “matematização” iniciada pelas civilizações contemporâneas à elaboração dos Elementos de Euclides. É notadamente o caso das dimensões, e do plano como lugar de representação e estudo, assim como o desenho como

meio de representação (abstração do objeto desenhado):

Or ces corpus pré-euclidiens ont à leur fondement ce que nous appellerons des "évidences", c'est-à-dire des notions et des pratiques non introduites, non justifiées :

- le plan, lieu principal des mouvements de figures et de leur étude ;
- un stock de figures élémentaires comme le segment de droite, le cercle, le carré, le rectangle, le cube, le triangle, le trapèze, certaines servant d'unités de mesure ;
- la possibilité de transformer ces figures les unes dans les autres au moyen de décompositions et de recompositions ;
- la numération et la mesure, qui cherche à associer un nombre à une figure quelconque. (ibid., p.328)

Não se trata de apresentar nesse texto um repertório das noções geométricas que emergiram desde tempos pré-históricos, mas de destacar algumas características importantes da emergência das evidências que embasaram a formalização da geometria:

- As primeiras formas geométricas são símbolos, a superfície de representação (por exemplo, as paredes de uma caverna, ou a areia na qual seres humanos desenhavam) permite a passagem entre o mundo real e o mundo mítico. Os símbolos geométricos são abstrações que evocam os objetos e permitem a manipulação da “essência” desses objetos: *“la figure géométrique et ses transformations sont l'archétype, le modèle-clé de la pensée mythique-rituelle.”* (ibid., p.328) Nos rituais, símbolos geométricos são objetos materiais que permitem a manipulação, pelos ritos, dos ideais simbolizados, a passagem e a comunicação entre os dois mundos. Obviamente, não se trata de um sistema geométrico, mas temos um modo de abstração no qual o símbolo remete a outra coisa que não ele mesmo.
- As primeiras noções geométricas apareceram nas atividades humanas de transformação da matéria, notadamente no corte das pedras, na intenção de fabricar objetos de formas adaptadas em função do uso (pontas triédricas, bifaces, gumes etc.) e eventualmente de questões estéticas (simetria). Elas aparecem também nos riscos produzidos pelos gestos em rituais nas superfícies de passagem entre o mundo real e o mundo mítico. Nos dois casos, a relação entre a mente e a mão, o gesto, o corpo ocupam um papel central na elaboração e na comunicação das evidências geométricas.

l'homme, au cours de quelques deux millions et demi d'années, a construit progressivement son cerveau, ses outils, son langage, ses normes sociales, rend plausible une construction humaine des objets géométriques également. (ibid., p.328)

- A superfície de representação e o grafismo simbólico têm um papel central na elaboração dos símbolos geométricos, mesmo se esses símbolos não são propriamente geométricos e *“n'existent dans la conscience que pour autre chose, pour l'objet symbolisé et pas pour elles-mêmes”* (ibid., p.136), e mesmo se, inicialmente, a superfície é lugar de passagem e a *“importance du graphisme est dans son exécution, il n'est plus rien après le geste créateur. Il n'est pas œuvre d'art au sens actuel du terme, mais acte rituel dont l'exécution est la seule raison d'être”* (ibid., p.136).

A longa elaboração dessas noções geométricas, através das atividades humanas nutriu um inconsciente coletivo no qual as formas são evidências reconhecidas, reproduzidas, transmitidas, suportes à comunicação, muito antes de serem geométricas. Elas pertencem a um patrimônio físico-intelectual que, fornece premissas para a geometria sintética, mas não se restringe a esta.

Pode-se inferir que nessa etapa da geometria pré-euclidiana, entre os tipos de tarefas aos quais o que hoje chamamos de geometria responde, estão fabricar utensílios e dar suporte a um

pensamento mítico. Tomando o exemplo da fabricação de utensílios, as técnicas envolvem gestos que permitem produzir formas adequadas ao uso social dos utensílios e no bloco tecnológico-teórico estão experiências e conhecimentos assistemáticos relativos, entre outros, às propriedades físico-químicas da matéria que permitem que o utensílio cumpra sua função (cortar, afiar, caçar, etc.). Em relação às formas como suporte de pensamento, as técnicas incluem representar visualmente símbolos que remetem a uma conexão com algo que transcende a realidade material e o bloco tecnológico teórico apoia-se em crenças e conhecimentos compartilhados pelos grupos sociais.

A obra euclidiana nasce, junto com a filosofia, de um novo olhar sobre as evidências e noções geométricas acumuladas naquela época. Nesse olhar, o ser humano não somente pensa, mas considera os pensamentos, as abstrações, como objetos de estudo. Nos Elementos parte-se das evidências geométricas como premissas e procura-se construir um edifício coerente e rigoroso em torno delas. A partir dessa primeira construção matemática, que mais de 2000 anos depois continua ainda como referência, a geometria evoluiu em torno de dois grandes eixos:

- Uma geometria “matemática” procurando uma coerência, um rigor, uma verdade absoluta interna, evitando/eliminando as ambiguidades e implícitos do mundo físico, assim como questionando as evidências na origem das premissas. “*Hilbert écrit qu’ on pourrait remplacer « point, droite, plan » par « table, chaise, bock de bière »*” (Nordon, 1981). Mesmo procurando construir uma geometria pura, ou melhor geometrias puras, as figuras geométricas, as formas, não são eliminadas da construção teórica, servindo notadamente como suporte perceptivo, comunicativo, explicativo, inspirando os processos heurísticos e os raciocínios.
- Uma geometria “aplicada” a serviço das artes e ofícios na qual o esquema, a planta, o quadro são produtos da atividade, notadamente como suporte à comunicação. As formas geométricas compõem o vocabulário e as propriedades geométricas são a gramática dessa linguagem. A geometria sintética fornece o suporte teórico e tecnológico às realizações gráficas.

Mesmo se esses dois eixos se articularam e se retroalimentaram ao longo da história, hoje, em certas instituições, eles parecem independentes, ou mesmo opostos.

4 Geometria sintética, pensamento geométrico

As noções geométricas surgiram muito antes da Grécia Antiga, mas o que se admite como a origem do pensamento geométrico, como modelizado hoje, são os Elementos de Euclides. Não somente os Elementos como coletânea de noções, propriedades e resultados conhecidos na época da redação da obra grega, mas também, e sobretudo, como mudança de paradigma (Houdement, Kuzniak, 2006) relativamente à geometria. « *Les Éléments d’Euclide (environ 300 avant J.C) marquent, d’après Szabó (1993), une inflexion décisive qui portent les géomètres grecs à refuser la simple vérification visuelle et l’évidence intuitive.* » (Houdement, Kuzniak, 2006. p.177). Essa mudança de paradigma corresponde, segundo Keller (2001), ao nascimento da filosofia e à passagem do “pensar” ao pensamento como objeto de estudo.

A partir dessa mudança, a geometria evoluiu em direção à emergência de geometrias mais abstratas e cujas fundações estão nas estruturas algébricas, mas sem que houvesse novas mudanças nos princípios nos quais os raciocínios e demonstrações foram elaborados. « *Par la suite, les géomètres grecs envisagent les objets géométriques « en soi » et non plus leurs traces matérielles visibles. La géométrie se reconstitue en un corps de savoirs, basé sur des axiomes et organisé par le raisonnement hypothético-déductif.* » (Houdement, Kuzniak, 2006, p.178). Os rastros materiais dos objetos geométricos, desenhos geométricos notadamente, são suportes

à intuição, à experiência e ao raciocínio, mas não intervêm nas demonstrações, e um dos objetivos “clássicos” senão da geometria, pelo menos do seu ensino, acompanhando essa leitura da evolução da geometria, é favorecer a passagem de uma “geometria da observação” a uma “geometria da demonstração”.

Parsyzs (2006), apoiado nos trabalhos de Van Hiele, Henry, Gonseth e Houdement e Kuzniak, descreve essa passagem entre as geometrias de observação e de demonstração, considerando dois níveis de apreensão das formas: perceptivo e descritivo (segundo Van Hiele), três paradigmas geométricos: geometria natural, geometria axiomática natural e geometria axiomática formal (segundo Gonseth, e retomado por Houdement e Kuzniak, 2006), três tipos de relação com o espaço: situação concreta, primeira modelização para simplificar a situação e manter o que é pertinente em relação com o problema explorado, matematização (segundo Henry, 1999). Baseado nesses trabalhos, ele propõe quatros paradigmas geométricos, considerando a natureza dos objetos (físicos ou teóricos) em jogo e os modos de validação (perceptivo-dedutivo ou hipotético-dedutivo), que ele sintetiza no quadro a seguir:

Figura 2: 4 paradigmas geométricos, seus objetos e modos de validação

type de géométrie	géométries non axiomatiques		géométries axiomatiques	
	concrète* (G0)	spatio-graphique (G1)	proto- axiomatique (G2)	axiomatique (G3)
objets	physiques		théoriques	
validations	perceptivo-déductives		hypothético-déductives	

* A proprement parler, G0 n'est pas une géométrie.

Fonte: Parzys (2006, p.130)

Dessa proposta, ele foca, sobretudo, G1 e G2 porque considera que « *au niveau de l'enseignement obligatoire, ce sont G1 et G2 qui jouent un rôle crucial dans la construction par l'élève de son rapport aux savoirs géométriques* » (ibid., p.131), propondo praxeologias distintas relativas a esses dois paradigmas, e olhando notadamente o papel do desenho geométrico nestas:

- pour G1, les techniques utilisées pour la résolution de ce type de tâches sont essentiellement liées à l'usage d'instruments tels que règle graduée, compas, équerre, rapporteur (perception instrumentée). Les technologies (mode de validation) font également usage des instruments, qui sont alors utilisés pour contrôler le dessin construit par la constatation visuelle de coïncidences ou de superpositions.... Le niveau théorique – absent dans la pratique usuelle – serait une théorie relative à la précision ou à l'économie des tracés, qui est effectivement attestée historiquement...
- pour G2 et pour le même type de tâches, les techniques concernent des objets géométriques (droites, points, segments, cercles...) dont l'existence est assurée par des énoncés (définitions, axiomes, propriétés admises...), et l'usage des instruments permet d'en obtenir des représentations (dessins). Les technologies correspondantes consistent en la production d'un discours de type déductif appliqué aux données de l'énoncé et utilisant des éléments de G2 rencontrés antérieurement. Le niveau théorique est constitué par une géométrie axiomatique de type G3 (la géométrie affine euclidienne). (ibid., p.131-132)

Destacamos na análise feita por Parzys, a diferença do papel da representação gráfica. No G1 é objeto, produto da maioria das tarefas, enquanto no G2, serve de auxílio para a elaboração de provas e demonstrações. « *Une technique très générale dans G2 est la réalisation et l'étude de "figures" (=dessins) sur lesquelles on fera éventuellement agir des techniques de G1 dans le but de rechercher des indices qui permettront d'aboutir à une démonstration.* »

(ibid., p.132) Acrescentaremos ainda que existe uma diferença de “logos” particularmente importante entre G1 (precisão, economia, validação instrumental) e G2 (axiomática e raciocínio lógico-dedutivo).

A passagem entre G1 e G2, de uma geometria da observação a uma geometria da demonstração, segundo Parzys, exige uma ruptura de contrato didático. Essa ruptura corresponde historicamente à passagem da interpretação das formas gráficas, simbolizando objetos e seres, às figuras geométricas, como objetos de estudo. Na ideia de reconhecer e dar mais importância ao patrimônio físico-intelectual construído ao longo dos milhares de anos pré-históricos, podemos investigar a geometria da observação como uma geometria de reconhecimento de formas, uma geometria efetivamente natural, lembrada por Gonseth.

Esse olhar rápido sobre a evolução da geometria e seu ensino é claramente focado na matematização da geometria, entretanto subsiste, num nível profissional (não somente no ensino), uma geometria do tipo G1 na qual as tecnologias (no sentido da praxeologia) são complementadas pelas tecnologias computacionais (software de modelagem ou CAD - Computer-aided design). Nessa geometria, a teoria relativa à precisão ou à economia dos traçados citada por Parzys não precisa mais ser considerada pelos geômetras, mas sim pelos engenheiros da computação, idealizadores dos *softwares* que utilizam as teorias geométricas. Vale destacar que, do ponto de vista do ensino da geometria gráfica, o uso de tais *softwares*, e mais ainda no caso dos *softwares* de geometria dinâmica, não dispensa “automaticamente” a utilização de elementos tecnológicos-teóricos de geometria sintética uma vez que o tipo de tarefa (de construções geométricas) proposta pode justamente exigir o emprego de tais elementos justificativos das construções.

5 Geometria gráfica, geometria instrumental

A geometria gráfica é um termo sugerido (Lopes et al., 2019) para identificar as atividades realizadas pela atual comunidade de expressão gráfica no Brasil. A escolha do termo destaca as limitações de “expressão gráfica” para identificar essas atividades por não considerar, além da expressão, o estudo e a interpretação da forma em vista a sua representação. Na prática, vemos a geometria gráfica essencialmente como uma geometria aplicada às artes e ofícios, aplicação que pode se estender a uma grande diversidade de áreas (na medicina por exemplo, desde que envolva representação gráfica de propriedades e objetos geométricos). Hoje, o estudo das formas fica limitado àquelas formas que os artefatos tecnológicos computacionais disponibilizam, tendo como resultado uma homogeneização “ocidentalizada” (uma vez que os *softwares* de modelagem são produzidos no hemisfério norte) das formas estudadas, que dá continuidade à homogeneização imposta pela geometria euclidiana.

Sem dúvida, a aplicação de uma ciência, além de ter aportes para as áreas nas quais está aplicada, pode ter também contribuições para os avanços da própria ciência. Um exemplo clássico de tais idas-e-vindas em geometria é o fato que a necessidade de representar em duas dimensões objetos e cenas tridimensionais contribuiu para o desenvolvimento da geometria projetiva e da geometria descritiva. Podemos afirmar que a aplicação de uma ciência muitas vezes antecede a própria ciência. Procuramos evidenciar que noções geométricas existiam antes dos Elementos de Euclides e o primeiro discurso que construiu a geometria como ciência. A questão hoje é saber se a atual aplicação da geometria gráfica contribui para avanços efetivos em geometria.

Sem pretender responder a essa questão, nem achar que existe uma resposta objetiva, temos a convicção que o estudo da geometria e sua evolução do ponto de vista dos princípios teórico-metodológicos da TAD permite avanços significativos na construção dessa resposta.

Nesse contexto, a investigação das relações institucionais dos produtores e/ou usuários de geometria gráfica de um lado e dos produtores e/ou usuários de geometria sintética (abstrata) é enriquecedora notadamente para destacar que questões cada instituição investiga e esboçar a modelização de praxeologias relativas à geometria nessas diversas instituições.

Nesse sentido, comparando a articulação G1-G2 nos ensinamentos profissional (técnico) e obrigatório (básico) na França, Parzysz (2006, p.133) evidencia que:

Ce qui compte, dans une perspective professionnelle, c'est l'efficacité et non la justification : on utilise éventuellement la théorie pour rechercher des procédures efficaces, mais pas nécessairement. On se situe donc dans une problématique de la précision, et non de la conformité à la théorie (qu'on peut appeler la "rigueur").

Essa comparação no nível do ensino é simples reflexo do que acontece no nível profissional, as exigências de eficácia do desenho, da geometria gráfica, para a produção colocam em segundo plano a necessidade de justificar o processo de construção, enquanto as exigências de rigor da geometria matemática colocam em segundo plano as realizações gráficas.

Essas diferenças de relação institucional com a geometria levam a um afastamento importante entre os praticantes da geometria matemática e os praticantes da geometria gráfica. Esse afastamento tem um componente corporativista em consequência das disputas de espaço no mundo científico e nos órgãos de fomento entre esses praticantes. As configurações institucionais nas quais esses coletivos se organizam também são diversas. No Brasil, boa parte dos geométricos gráficos atua em escolas de belas artes ou suas reorganizações (artes visuais, arquitetura, design, expressão gráfica etc.). Vale destacar que a geometria da “eficácia” encontrou na história um suporte político, seja no Brasil com a criação de uma escola de artes e ofícios para formar profissionais preparados para o desenvolvimento industrial do país (Gani, 2004), seja na França com a importância do papel de Gaspard Monge, como político depois da revolução, no desenvolvimento do ensino da geometria e do desenho geométrico (notadamente, perspectiva, estereotomia, geometria descritiva). Vale lembrar que essa tensão entre geometria formal e geometria aplicada aparece nas obras de geometria descritiva de Gaspard Monge (Monge, 1799) e Frère Gabriel Marie (Frère Gabriel Marie, 1877), o primeiro propondo um estudo sintético de nove problemas relativos à representação de objetos com precisão a partir de projeções cilíndricas, quando o segundo apresenta uma extensa nomenclatura de situações geométricas e os métodos (“receitas”) para projetá-las (Gani, 2004).

O suporte político ao ensino da geometria aplicada foi impulsionado no Brasil, desde o início dos anos 2000 com a fortalecimento de políticas educacionais voltadas ao ensino técnico de nível médio, muitas vezes integrado ao ensino regular. Com efeito, em muitas formações técnicas são necessários conhecimentos de geometria gráfica.

6 Considerações finais

A tensão entre a geometria formal e a geometria gráfica aplicada depende muito das instituições nas quais essas geometrias vivem, e o não reconhecimento dessas geometrias como ciências pelos órgãos de fomento aumenta ainda mais essa tensão, cada uma delas procurando esse reconhecimento em outras áreas.

Ao longo de milhares de anos, o ser humano constituiu seu cérebro, suas ferramentas e linguagens, nas suas relações intelectual e física com o mundo e nessa constituição ele também desenvolveu sua capacidade de observar, reconhecer e reproduzir padrões (formas), inclusive formas geométricas. Esses padrões fazem parte de nosso patrimônio intelectual-físico e são sempre mobilizados nas nossas atividades.

O breve sobrevoo de fragmentos da história da geometria, com o olhar da TAD, mostrou

que num período pré-euclidiano, entre os tipos de tarefas aos quais remete o que hoje chamamos de geometria há, por exemplo, fabricar utensílios que cumpram funções como cortar ou afiar. A geometria euclidiana desloca o foco de atenção, mas esse caráter instrumental dos objetos geométricos permanece vivo nas práticas sociais. Assim, a tensão entre paradigmas de geometria, rebate na geometria a ser estudada na escola, como mostram Houdemont e Kusniak (2006) e Parzys (2006). Ou seja, em conformidade com os princípios da TAD, a vida dos objetos de saber geométricos na escola é interligada com suas formas de vida em instituições de uso e de produção desses objetos.

Nossa proposta é incorporar de modo mais contundente, na reflexão sobre a geometria a ser ensinada na educação básica, essa geometria ancestral, que perpassa as diversas civilizações do passado e do presente. Os conhecimentos geométricos subjacentes à fabricação de utensílios desde a pré-história nos inspiram a ampliar o olhar sobre os padrões geométricos e questionar possíveis impactos sobre o ensino de geometria. De que modo as formas se conectam com os usos que se faz de objetos materiais? Como as formas geométricas estão presentes nas diversas disciplinas? Como representar formas simbolicamente (graficamente, via gestos, ou fisicamente)? Que meios são necessários para que pessoas com deficiência tenham acesso às representações simbólicas de formas geométricas? Essa geometria gráfica/instrumental atravessa práticas sociais as mais diversas, desde aquelas da vida cotidiana até as profissionais.

Por um lado, pensamos que a geometria da escola não deve se restringir ao tipo G1, ignorando a abstração propiciada pela geometria do tipo G2. Por outro, consideramos que a geometria do tipo G2 ao ser introduzida, não deve eliminar ou minimizar o lugar da abordagem espaço-gráfica da geometria. Discordamos dos caminhos em que se desconsidera a importância das representações no estudo abstrato das formas ou se ignoram as justificativas teóricas no estudo dos objetos e das construções gráficas. Nosso ponto de vista, amparado nos breves fragmentos histórico-epistemológicos, visitados com o olhar da TAD, é em defesa do reconhecimento da geometria (formal e aplicada) como linguagem de modelização e estudo das formas (geometria gráfica ou mais amplamente geometria instrumental, para abrir para outros modos de representação e percepção, além do visual).

A dialética entre a geometria formal e a geometria instrumental aproxima-se da dialética de “Su e perçu” (conhecido e percebido) de Parzys no contexto do ensino na qual existe para o sujeito uma negociação na interpretação de uma situação geométrica entre o que ele conhece e o que ele percebe, para chegar a uma interpretação sintética (Parzys, 2006, p.138). Essa dialética entre o que identificamos, o reconhecimento e o conhecimento de formas é uma característica da inteligência humana na sua capacidade de abstrair. Essa dialética não se restringe às fronteiras das disciplinas e uma linguagem de modelização geométrica oferece justamente um meio de atravessar as fronteiras entre as áreas de conhecimento.

Defendemos uma geometria que articula formalizações e aplicações como domínio autônomo de conhecimento. Pensamos uma abordagem da geometria como estudo das formas, consideradas como reificação dos objetos, relações e operações formais presentes em situações concretas e estudados entre outros, na matemática.

Referências

Bellemain, F. (2024). Geometria instrumental: A transdisciplinaridade das formas para a pesquisa e o ensino em geometria. *REMATEC*, 19(48), e2024013. <https://doi.org/10.37084/REMATEC.1980-3141.2024.n48.e2024013.id600>. Disponível em: <https://www.rematec.net.br/index.php/rematec/article/view/600>. Acesso em: 11 jul. 2024.



- Bosch, M. C., & Gascón, J. (2007). 25 años de transposición didáctica. In L. Ruiz-Higueras (Org.), *Sociedad, escuela y matemáticas: Aportaciones de la teoría antropológica de lo didáctico* (pp. 385-406). Universidad de Jaen.
- Chevallard, Y. (1998). Analyse des pratiques enseignantes et didactiques des mathématiques : L'approche anthropologique. In *Actes de l'école d'été de la Rochelle* (pp. 91-120). Université de la Rochelle: IREM de Clermont-Ferrand.
- Chevallard, Y. (2005). La didactique dans la cité avec les autres sciences. *Symposium de Didactique Comparée*, Montpellier, 15-16 setembro, 2005. Disponível em: http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=65. Acesso em: 15 jul. 2024.
- Frère Gabriel Marie (Edmond Brunhes). (1877). *Géométrie descriptive—éléments* (5a ed.). Jacques Gabay.
- Gani, D. C. (2004). *As lições de Gaspard Monge e o ensino subsequente da geometria descritiva* (Dissertação de Mestrado). Universidade Federal do Rio de Janeiro, RJ.
- Henry, M. (1999). L'introduction des probabilités au lycée: Un processus de modélisation comparable à celui de la géométrie. *Repères-IREM*, 36, 15-34.
- Houdement, C., & Kuzniak, A. (2006). Paradigmes géométriques et enseignement de la géométrie. *Annales de Didactiques et de Sciences Cognitives*, 11, 175-193.
- Keller, O. (2001). Éléments pour une préhistoire de la géométrie. *L'Anthropologie*, 105(3), 327-349. [https://doi.org/10.1016/S0003-5521\(01\)80020-0](https://doi.org/10.1016/S0003-5521(01)80020-0)
- Krenak, A. (2022). *Futuro ancestral*. São Paulo: Companhia das Letras.
- Lopes, A. V. L., Gusmão, M. B. R., & Cunha, M. C. W. (2019). Quem somos? O que fazemos? Para onde vamos? Uma reflexão epistemológica sobre a geometria gráfica. *Revista Brasileira de Expressão Gráfica*, 7(2). Disponível em: <http://www.rbeg.net/index.php/rbeg/article/view/81>. Acesso em: 31 out. 2023.
- Monge, G. (1799). *Géométrie descriptive: Leçons données aux Écoles normales, an VII*. Paris: Baudouin.
- Nordon, D. (1981). *Les mathématiques pures n'existent pas !*. Paris: Actes Sud.
- Parzysz, B. (2006). La géométrie dans l'enseignement secondaire et en formation de professeurs des écoles : De quoi s'agit-il ?. *Quaderni di Ricerca in Didattica*, 17, 128-151.