

Aspectos do raciocínio proporcional de alunos do 7º ano do Ensino Fundamental: foco nas resoluções escritas de uma tarefa exploratória

Aspects of proportional reasoning of students of the 7th grade of the middle school: focus on written resolutions of an exploratory task

Síntia Paola Rodrigues¹
Maria Eduarda Valença de França²
Renata Viviane Raffa Rodrigues³

Resumo: Este estudo trata-se de uma pesquisa qualitativa que teve como objetivo compreender aspectos referentes ao raciocínio proporcional de oito grupos de alunos do 7º ano do Ensino Fundamental, a partir da análise das suas resoluções escritas no desenvolvimento de uma tarefa exploratória em formato digital. Embora alguns grupos tenham apresentado dificuldades em descrever os modos pelos quais se configurava a covariação entre as grandezas, por meio da constante de proporcionalidade, destaca-se que a maioria conseguiu realizar comparações, identificando e estabelecendo relações de natureza multiplicativa entre as quantidades. Esses resultados evidenciam o potencial das intenções das questões da tarefa exploratória para favorecer a mobilização de aspectos específicos do raciocínio proporcional dos alunos.

Palavras-chave: Raciocínio Proporcional. Tarefa Exploratória. Ensino Fundamental.

Abstract: This qualitative research study aimed to understand aspects related to the proportional reasoning of eight groups of 7th-grade middle school students based on the analysis of their resolutions during the development of an exploratory task in digital format. Although some groups found it challenging to describe how the covariation between the quantities was configured based on the proportionality constant, most could make comparisons, identifying and establishing multiplicative relationships between the quantities. These results demonstrate the potential of the intentions of the questions in the exploratory task to favor the mobilization of specific aspects of the students' proportional reasoning.

Keywords: Proportional Reasoning. Exploratory Task. Middle School.

1 Introdução

Seja ao seguir uma receita de bolo, que exige uma determinada quantidade de farinha em relação ao total, ou ao calcular o tempo estimado para completar uma viagem com base na velocidade de deslocamento, o cotidiano está repleto de situações que requerem a mobilização de capacidades de raciocínio proporcional. Essas e outras situações demandam a comparação multiplicativa de diferentes quantidades para fazer previsões e inferências (Lesh, Post & Behr, 1988). De acordo com Lamon (2012), o raciocínio proporcional está ligado à capacidade de pensar, seja de maneira progressiva ou regressiva, além de fornecer justificativas para situações que envolvem proporções simples, diretas ou inversas.

No entanto, devido às abordagens mecanizadas que se restringem ao uso de algoritmos prontos, como a regra de três, apesar de envolver aspectos importantes a serem reconhecidos em situações cotidianas, o raciocínio proporcional não tem sido articulado aos objetivos de

¹ Universidade Federal da Grande Dourados • Dourados, MS — Brasil • ✉ sintia.rodrigues057@academico.ufgd.edu.br • [ORCID](https://orcid.org/0000-0001-5631-3506) <https://orcid.org/0000-0001-5631-3506>

² Universidade Federal da Grande Dourados • Dourados, MS — Brasil • ✉ eduarda0878@hotmail.com • [ORCID](https://orcid.org/0000-0002-2898-4422) <https://orcid.org/0000-0002-2898-4422>

³ Universidade Federal da Grande Dourados • Dourados, MS — Brasil • ✉ renatarodrigues@ufgd.edu.br • [ORCID](https://orcid.org/0000-0002-5409-1265) <https://orcid.org/0000-0002-5409-1265>

ensino no âmbito escolar (Lamon, 2012). Para a autora, a mobilização de tais aspectos pelos alunos envolve a proposição de situações que favoreçam a construção de um processo mental que requer a análise das relações entre as grandezas e a identificação dessas relações como multiplicativas, e não aditivas.

A pesquisa de Ball (1990) identificou que, na formação inicial de professores, quase a totalidade dos futuros docentes usava algoritmos de produto cruzado na resolução de tarefas envolvendo situações de proporcionalidade, enquanto apenas uma minoria abordava outros meios de resolução. Por outro lado, Kenney, Lindquist e Heffernan (2002) e Khoury (2002) destacaram a importância de os professores se concentrarem em apoiar os alunos na criação de estratégias matemáticas que favoreçam capacidades de raciocínio proporcional.

Entretanto, as pesquisas também evidenciaram que não há uma única abordagem viável para todas as etapas escolares – ainda que Moseley (2005) tenha afirmado que, quanto mais cedo os alunos tiverem experiências com múltiplas representações, maior será o conhecimento sobre elas, em especial quando e como usá-las. O exemplo de Kenney e colegas (2002) revela que, para crianças do 4º ano, o uso de imagens e tabelas mostrou maior eficácia para o desenvolvimento do raciocínio proporcional.

De modo particular, neste estudo, pretendemos compreender aspectos referentes ao raciocínio proporcional de oito grupos de alunos do 7º ano do Ensino Fundamental, a partir da análise de suas resoluções escritas, no desenvolvimento de uma tarefa exploratória em formato digital. Primeiramente, apresentamos uma fundamentação teórica referente ao raciocínio proporcional e às tarefas, destacando o seu potencial no ensino da Matemática. Em seguida, descrevemos a metodologia da pesquisa e o contexto da investigação, a partir do desenvolvimento de uma tarefa exploratória na qual utilizamos a plataforma *Genially*⁴. Posteriormente, realizamos uma análise dos resultados obtidos e apresentamos algumas conclusões e considerações finais.

2 Referencial teórico

2.1 Raciocínio Proporcional

O raciocínio proporcional é fundamental para os alunos compreenderem não apenas eventos do cotidiano, mas também para a aprendizagem de diferentes campos da Matemática e de outras ciências que envolvem ou que podem ser descritas por meio de relações de proporcionalidade (Silvestre & Ponte, 2012). Contudo, o professor precisa estar atento aos seguintes aspectos que, segundo os autores, caracterizam o raciocínio proporcional: a) diferenciar situações de proporcionalidade; b) compreender a natureza multiplicativa das relações proporcionais; e c) conseguir utilizar o raciocínio proporcional em diferentes situações.

O reconhecimento de situações de proporcionalidade demanda a comparação prévia entre duas quantidades para descrever o que elas representam. Em geral, os alunos recorrem às estratégias de natureza multiplicativa para resolver problemas desse tipo (Silvestre, 2012). Uma relação multiplicativa é compreendida como aquela em que os valores das razões podem ser alterados, mas a relação entre eles permanece constante. Essas relações incluem, além da multiplicação, a divisão por números diferentes de zero (Cebola & Brocardo, 2019). Segundo Lamon (2012), o processo de multiplicação está relacionado aos casos em que se tem a ampliação, o encolhimento, a duplicação, a exponenciação e a partição em quantidades iguais, assim como a caracterização dos números racionais como operadores que orientam a multiplicação e a divisão. Dessa forma, a natureza multiplicativa começa a ser identificada

⁴ <https://genially.com/pt-br/>

pelos alunos quando analisam situações que se configuram em relações entre as quantidades e percebem o motivo pelo qual as estratégias aditivas não se aplicam às situações desta natureza.

Além do reconhecimento de situações de proporcionalidade e da compreensão da natureza multiplicativa, o raciocínio proporcional envolve uma estrutura de pensamento matemático que inclui o entendimento da covariação, utilizada para comparar duas variáveis e verificar como elas se relacionam. Também abrange a capacidade de realizar múltiplas comparações e análises de conjuntos de dados (Lesh *et al.*, 1988). Em especial, perceber a covariação significa entender que, ao passo que uma quantidade varia, a outra também varia, enquanto existe uma terceira quantidade, chamada de *constante de proporcionalidade*, que se mantém invariante (Lamon, 2012).

Maranhão e Machado (2011) também destacam que os alunos recorrem a estratégias particulares para resolver problemas de proporcionalidade, como: realizar operações de multiplicação e divisão; fazer comparações numéricas e não numéricas; além da compreensão da covariação entre duas grandezas, processos essenciais no raciocínio proporcional. Um exemplo pode ser observado na pesquisa conduzida por Spinillo (2002), em que a estratégia de utilizar a *metade* como referência apoiou o raciocínio proporcional dos alunos. Esse processo consistiu em utilizar a metade como ponto de referência, permitindo julgamentos proporcionais com base em *mais que a metade*, *menos que a metade* ou *igual à metade*. Essa estratégia ajudava as crianças a realizar julgamentos proporcionais de forma mais precisa. No estudo, a autora buscava promover a compreensão do conceito de proporção pelos alunos, enfatizando a capacidade de estabelecer relações parte-parte (razão) em vez de parte-todo (fração).

Além de reconhecer os processos necessários para mobilizar o raciocínio proporcional, é importante identificar as dificuldades enfrentadas pelos alunos. Segundo Maranhão e Machado (2011), uma dessas dificuldades consiste em distinguir situações proporcionais das que não são proporcionais. Essa distinção não ocorre de maneira intuitiva, mas sim por meio de um processo de inferências e deduções. Portanto, é fundamental que o professor auxilie os alunos a compreender os contextos dos problemas propostos em sala de aula, pois essa compreensão é essencial para que possam classificar as situações como diretamente proporcionais, inversamente proporcionais ou não proporcionais (Maranhão & Machado, 2011).

Os estudos de Costa e Ponte (2008) revelaram que embora os alunos conseguissem perceber as relações numéricas, eles tiveram dificuldade em explicar o raciocínio utilizado. Inicialmente, os alunos recorreram a estratégias aditivas antes de utilizarem estratégias multiplicativas. Além disso, a falta de familiaridade com os contextos dos problemas pode ter influenciado na interpretação das questões. Ademais, quando pressionados a concluir uma atividade em um tempo determinado, alguns alunos recorreram a estratégias formais, como a regra de três.

Segundo o estudo de Spinillo (2002), que investigou a construção da noção intuitiva de proporção em crianças, foi analisado que os alunos alcançaram uma compreensão mais elaborada de proporção. De tal forma que conseguiram superar a dificuldade em reconhecer a equivalência entre recipientes grandes ou pequenos cheios até a metade.

Para Silvestre e Ponte (2012), a dificuldade inicial dos alunos está em diferenciar as situações de proporcionalidade direta daquelas não proporcionais. Essa dificuldade se acentua quando tentam mecanizar algoritmos de resolução de problemas de proporcionalidade, sem uma construção anterior dos significados matemáticos que eles envolvem, o que acarreta problemas em sua utilização. Ademais, o distanciamento entre situações cotidianas envolvendo proporcionalidade e os problemas propostos na escola também é um fator que dificulta uma

compreensão mais profunda da natureza multiplicativa das situações proporcionais, não sabendo distinguir entre adição e multiplicação e quando utilizar cada operação. Com isso, os autores associam a falta de flexibilidade no raciocínio proporcional dos alunos à pouca diversificação das tarefas matemáticas que lhes são propostas em sala de aula.

Dessa forma, as tarefas exploratórias se destacam como especialmente relevantes para promover a mobilização de capacidades de raciocínio proporcional dos alunos, haja vista que a sua estrutura pode propiciar aos alunos a criação de diferentes estratégias de resoluções a partir de suas experiências anteriores de aprendizagem.

2.2 Tarefas Matemáticas

Ponte (2005) destaca que a aprendizagem resulta, principalmente, da realização de uma atividade e da reflexão sobre ela, esclarecendo que o envolvimento em uma atividade requer a realização de uma tarefa que se constitua como objetivo da atividade. Nessa linha, o autor argumenta que, para promover a atividade matemática dos alunos, é necessário produzir, propor e conduzir a realização de tarefas de maneira adequada, considerando que há diversos tipos de tarefas que podem variar quanto ao “grau de desafio matemático e o grau de estrutura” (Ponte, 2005, p. 7).

O grau de desafio matemático se refere ao nível de dificuldade, que pode ser elevado ou reduzido. Já a estrutura da tarefa se caracteriza pelo nível de abertura. Ou seja, constitui-se como uma tarefa fechada quando os dados e os objetivos são claros, enquanto as tarefas abertas apresentam um grau de indeterminação considerável no que é proposto ou solicitado (Ponte, 2005).

Em especial, as tarefas de exploração ou tarefas exploratórias diferenciam-se das investigações quanto ao nível de desafio, isto é, procura-se oferecer nelas possibilidades de o aluno iniciar a resolução a partir de suas experiências de aprendizagem. Por outro lado, uma tarefa exploratória também requer um elemento de desafio, de dificuldade moderada, que instigue e envolva os alunos na resolução da tarefa (Ponte, Mata-Pereira, Henriques & Quaresma, 2013).

Ademais, as tarefas exploratórias se caracterizam por demandar um elevado nível de exigência cognitiva, tal qual promova a exploração, a reflexão e o raciocínio sobre ideias e conceitos matemáticos de modo significativo. Assim, essas tarefas devem ser pensadas com base nos conhecimentos dos estudantes e adequadas ao conjunto de alunos a quem se destina, a fim de que se sintam motivados e sejam capazes de se envolverem nesse espaço cognitivamente desafiador (Stein & Smith, 2009).

Ainda, segundo Ponte *et al.* (2013), as tarefas exploratórias conduzem os alunos a atividades exploratórias que estimulam a interpretação matemática das situações, o raciocínio indutivo, a formulação de hipóteses e de generalizações, podendo ser trabalhadas tanto para desenvolver novos conceitos quanto para esclarecer ou fazer conexões entre as noções matemáticas já estudadas. Desse modo, para esses autores, a tarefa pode ser estruturada a partir de enunciados aparentemente simples, que requerem a interpretação e discriminação de casos ou enunciados complexos, organizados por meio da estruturação de questões.

Todavia, Ponte *et al.* (2013) observaram que, frequentemente, tem-se a combinação de questões mais simples com questões mais complexas, nas quais primeiro há a introdução de questões mais objetivas e, posteriormente, o grau de complexidade vai aumentando gradativamente até chegar a questões que demandam significativas reflexões. Ainda, ponderam que as tarefas devem ser envolventes, oferecer recursos para a construção de noções

matemáticas de forma significativa, requerendo, dessa forma, um elemento desafiador não demasiadamente difícil.

Para se tornarem mais envolventes, as tarefas exploratórias também podem contar com o apoio de mídias digitais, considerando que a incorporação eficiente desses recursos desperta o interesse e propicia “um ambiente educacional mais dinâmico, interativo e significativo para os estudantes” (Meroto, Sales, Oliveira & Andrade, 2023, p. 110). Nessa perspectiva, a plataforma digital *Genially* apresenta potencialidades para suportar tais processos, dado que ela está disponível em um *site*, criado em 2015, com o objetivo de tornar a comunicação mais interativa e abrir espaço para a criatividade. Além disso, permite criar, gratuitamente, conteúdos visuais e interativos como: animações, apresentações, jogos, entre outros (*Genially*, 2024). Todavia, é importante que a tarefa e os recursos utilizados estejam articulados a uma metodologia de ensino na qual, neste estudo, aporta-se do Ensino Exploratório (Canavarro, Oliveira & Menezes, 2012).

3 Metodologia e contexto da pesquisa

Este estudo faz parte de uma pesquisa mais ampla, que envolve a investigação de processos de resolução e de elaboração de tarefas por alunos de um 7º ano do Ensino Fundamental, associados às experiências dialógicas em aulas na perspectiva do Ensino Exploratório, para a mobilização de aspectos do raciocínio proporcional.

Nesse contexto de investigação, adotamos a abordagem qualitativa, considerando que seu objetivo é compreender os sentidos e significados que os sujeitos investigados atribuem, às suas próprias ações, representações e conceitos. Além disso, essa perspectiva considera o objeto de estudo como repleto de significados e relações estabelecidas pelos sujeitos por meio de suas ações (Chizzotti, 2006).

A pesquisa foi realizada com uma turma do 7º ano do Ensino Fundamental de uma escola da Rede Estadual de Ensino de Mato Grosso do Sul e contou com a participação de 33 alunos, na faixa etária de 11 a 14 anos. Para a produção dos dados, as aulas foram cedidas pela professora responsável pela turma, a qual esteve presente durante o desenvolvimento das atividades em sala. Assim, foi possível que uma das integrantes da pesquisa assumisse o papel de professora e pesquisadora, com o intuito de propor a realização de uma tarefa exploratória para os alunos. A aula foi conduzida pela perspectiva do Ensino Exploratório, que se organiza em quatro fases: a apresentação e proposição da tarefa; o desenvolvimento da tarefa; a discussão coletiva e a sistematização das aprendizagens (Canavarro *et al.*, 2012).

Neste estudo, os dados analisados decorrem do registro escrito da resolução da tarefa de cada um dos oito grupos de alunos durante a fase de desenvolvimento. Nessa fase, os alunos resolvem a tarefa em pequenos grupos, e o professor procura fornecer orientações sem influenciar na autonomia dos alunos.

Além das características que exigem a elaboração de uma tarefa exploratória (Ponte *et al.*, 2013), neste trabalho, considerou-se também o lúdico e a interatividade possibilitada por meio da plataforma digital *Genially*. Quanto ao lúdico, optou-se por introduzir a tarefa a partir de uma história animada contendo elementos adaptados dos filmes *Alice no País das Maravilhas* (2010) e *Alice Através do Espelho* (2016). Na história narrada, a família do Chapeleiro havia sido aprisionada pela Rainha Vermelha e obrigada a tomar o líquido do encolhimento tendo, assim, as alturas reduzidas e sendo necessário comer o bolo do crescimento para retornar aos seus tamanhos reais (figuras 1 e 2).

Figura 1: Contexto da tarefa (a)



Fonte: Acervo da Pesquisa

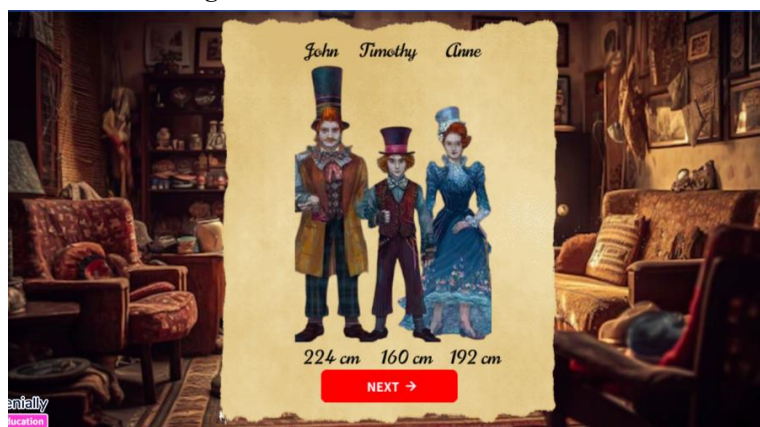
Figura 2: Contexto da tarefa (b)



Fonte: Acervo da Pesquisa

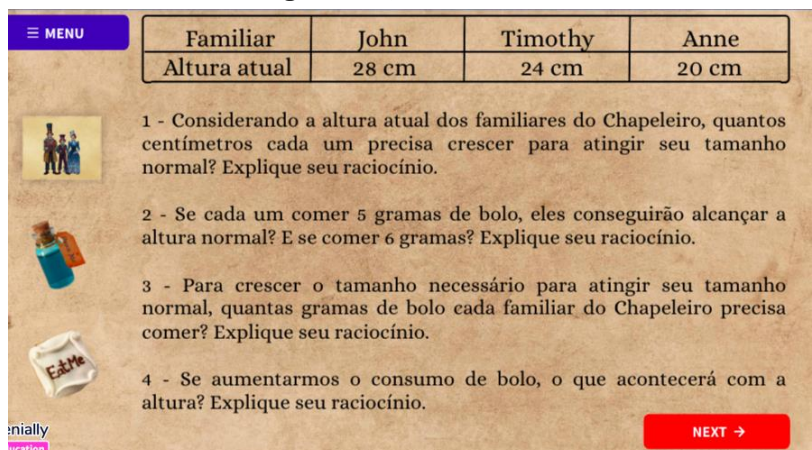
A intenção desta tarefa é que a atividade produzida pelos alunos propiciasse a eles identificar a quantidade de gramas do bolo do crescimento que cada familiar do Chapeleiro precisaria comer para voltar ao seu tamanho normal. Contudo, tendo como propósito mobilizar aspectos do raciocínio proporcional dos alunos, na tarefa, foram elaboradas questões (figuras 3, 4, 5, 6) que mobilizassem a percepção das relações multiplicativas entre as grandezas, assim como a covariação (Lamon, 2013).

Figura 3: Altura normal dos familiares



Fonte: Acervo da Pesquisa

Figura 4: Questões 1, 2, 3, 4



Familiar	John	Timothy	Anne
Altura atual	28 cm	24 cm	20 cm

1 - Considerando a altura atual dos familiares do Chapeleiro, quantos centímetros cada um precisa crescer para atingir seu tamanho normal? Explique seu raciocínio.

2 - Se cada um comer 5 gramas de bolo, eles conseguirão alcançar a altura normal? E se comer 6 gramas? Explique seu raciocínio.

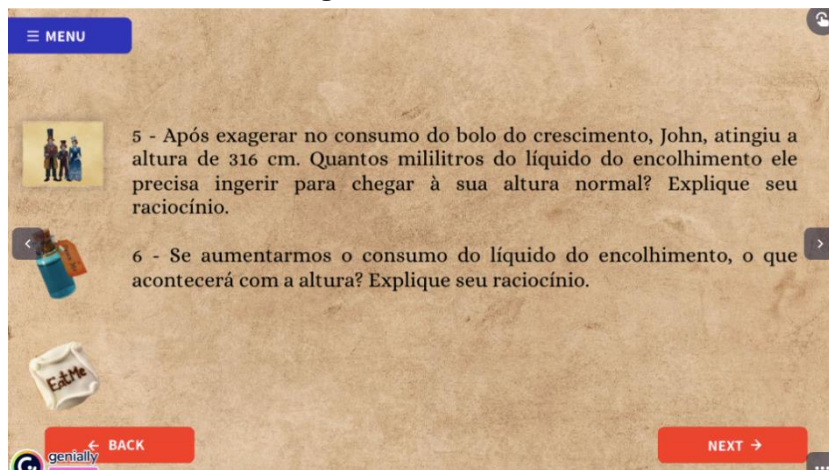
3 - Para crescer o tamanho necessário para atingir seu tamanho normal, quantas gramas de bolo cada familiar do Chapeleiro precisa comer? Explique seu raciocínio.

4 - Se aumentarmos o consumo de bolo, o que acontecerá com a altura? Explique seu raciocínio.

Fonte: Acervo da Pesquisa

No que se refere às intenções relativas a cada questão da tarefa, a Questão 1 foi proposta com o intuito de que os alunos percebessem que a altura de cada familiar não parte do zero, sendo necessário crescer apenas a parte da altura perdida ao tomar o líquido do encolhimento. Dessa forma, a questão explora o pensamento aditivo, com o qual as crianças estão mais familiarizadas, mas que, ao longo da tarefa, dará espaço ao pensamento multiplicativo. A Questão 2 tinha por objetivo levar os alunos a refletirem sobre a relação multiplicativa entre as grandezas envolvidas, ou seja, entre a quantidade de centímetros aumentados e a quantidade de gramas de bolo, bem como identificar que a constante de proporcionalidade é o 4. Já a Questão 3, além de abarcar o aspecto de quantidade e covariação definido por Lamon (2012), demandava a percepção da operação de divisão dentro das relações de proporcionalidade. Ainda, a Questão 4 foi elaborada com o propósito de promover a reflexão quanto à relação diretamente proporcional entre a quantidade de gramas de bolo e a quantidade de centímetros aumentados.

Figura 5: Questões 5, 6



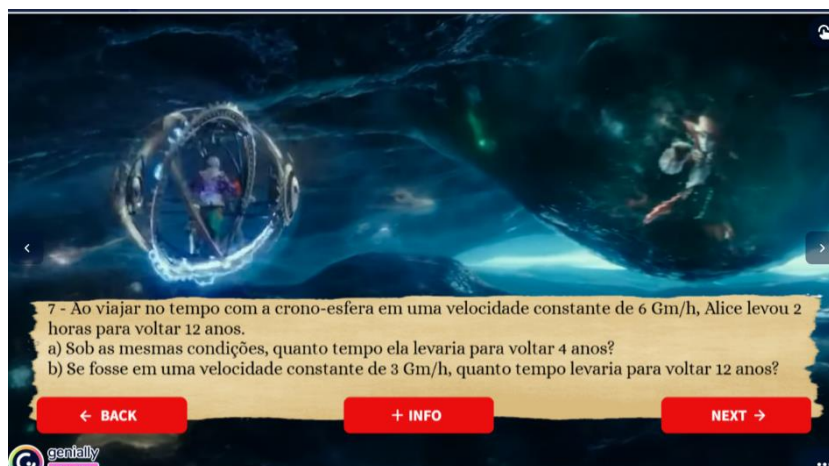
5 - Após exagerar no consumo do bolo do crescimento, John, atingiu a altura de 316 cm. Quantos mililitros do líquido do encolhimento ele precisa ingerir para chegar à sua altura normal? Explique seu raciocínio.

6 - Se aumentarmos o consumo do líquido do encolhimento, o que acontecerá com a altura? Explique seu raciocínio.

Fonte: Acervo da Pesquisa

A Questão 5 fundamenta-se nos mesmos objetivos das questões 2 e 3, mas envolve uma nova grandeza, já a Questão 6 objetiva a reflexão entre a relação diretamente proporcional entre quantidade de mililitros do líquido do encolhimento e a quantidade de centímetros reduzidos, haja vista que, embora a altura das personagens venha a diminuir, a parte reduzida aumenta se a quantidade de mililitros ingeridos aumentar.

Figura 6: Questão 7



Fonte: Acervo da Pesquisa

Por último, a Questão 7 foi elaborada para conduzir os alunos à percepção de que nem sempre duas grandezas se relacionam de forma diretamente proporcional, existindo também o estabelecimento de relações entre grandezas inversamente proporcionais.

Todavia, considerando a necessidade de utilizar tecnologias digitais para o desenvolvimento da tarefa, a apresentação foi realizada no Laboratório de Informática da escola na qual a pesquisa foi conduzida. Assim, antes do início da aula, a professora pesquisadora acessou a tarefa em todos os 30 computadores disponíveis, visando otimizar o tempo. No início da aula, a tarefa foi apresentada aos alunos com o uso de um projetor, que espelhava a tela do computador da professora e permitia orientar os alunos quanto à plataforma e à tarefa proposta.

Em virtude da necessidade de recortes, na próxima seção, analisamos as resoluções escritas dos alunos, referentes às questões 2, 3, 4, 5 e 6 da tarefa, buscando identificar e compreender os aspectos do raciocínio proporcional mobilizados e evidenciados no desenvolvimento da tarefa.

4 Análises e resultados

A construção do quadro apresentado nesta seção ocorreu devido à necessidade de reorganizar os dados de acordo com os aspectos do raciocínio proporcional mais recorrentes identificados nas produções dos alunos. O primeiro deles trata-se da comparação de quantidades, que, segundo Silvestre (2012), pode ser numérica ou não, e estar articulada ao contexto analisado. O segundo se refere à comparação de natureza multiplicativa, que se difere da primeira por demandar a identificação de que uma quantidade pode ser obtida por meio da multiplicação de outra quantidade por um número que se caracteriza como a constante de proporcionalidade, em vez de apenas comparar as duas quantidades sem reconhecer o tipo de relação entre elas. O terceiro, ainda incipiente, está ligado ao reconhecimento da covariação entre as grandezas identificadas.

Ademais, utilizou-se de siglas para facilitar a organização da relação entre os grupos e as questões que apresentam determinado aspecto do raciocínio proporcional. As siglas G1 a G8 indicam os grupos de 1 a 8, simplificando a referência aos diferentes grupos de alunos. De maneira semelhante, as siglas Q2 a Q6 indicam as questões de 2 a 6, simplificando a referência às questões da tarefa desenvolvida em sala de aula.

Quadro 1: Aspectos do raciocínio proporcional e questões relacionadas

Grupos/Aspectos do raciocínio proporcional	G1	G2	G3	G4	G5	G6	G7	G8
Comparação de quantidades	Q2	Q2	Q2	Q2	Q2		Q2	Q2
Comparação de natureza multiplicativa	Q3, Q5	Q3, Q5	Q3, Q5	Q3, Q5	Q3, Q5		Q2, Q3, Q5	Q3, Q5
Covariação	Q4, Q6	Q4, Q6	Q4, Q6	Q4, Q6	Q4, Q6		Q4, Q6	Q4, Q6

Fonte: Elaborado pelas pesquisadoras

Conforme o quadro, a comparação de quantidades predominou na Questão 2 da tarefa, enquanto a comparação propriamente de natureza multiplicativa emergiu de modo evidente nas questões 3 e 5. A covariação, por sua vez, esteve presente nas questões 4 e 6. Observa-se que, por se tratar das mesmas questões, os grupos apresentaram a mobilização do mesmo aspecto do raciocínio proporcional em destaque em suas resoluções. Esse resultado evidencia que a natureza da questão está diretamente relacionada ao aspecto do raciocínio proporcional a ser desenvolvido pelos alunos em suas estratégias.

O Grupo 6, no entanto, não apresentou justificativas que possibilitassem a identificação de aspectos do raciocínio proporcional, havendo a ausência de registro das resoluções das questões 2, 3 e 4 e o registro de resoluções inconclusivas nas demais questões, fato que está relacionado tanto à falta de habitualidade dos alunos com metodologias que demandem a descrição das estratégias empregadas para a resolução quanto à dificuldade enfrentada na interpretação e compreensão das questões em termos matemáticos.

Lesh *et al.* (1988) salientam que o raciocínio proporcional envolve múltiplas comparações, como comparações entre frações, quantidades ou sistemas de representação, enquanto Lamon (2012) indica que as grandezas podem ser comparadas por dois tipos de razão, sendo elas a comparação parte-todo e a comparação parte-parte. A comparação parte-todo diz respeito a comparação de uma parte da grandeza com o conjunto total dessa grandeza, ou seja, partes de um total de partes. Já a comparação parte-parte refere-se à comparação entre as grandezas que representam, cada uma, partes do conjunto. Nesse sentido, consideramos que, ao fazer a comparação entre as grandezas, antes de tudo, estamos fazendo uma comparação entre as quantidades. De acordo com o quadro, observamos que a comparação entre quantidades foi um dos aspectos do raciocínio proporcional mobilizado por sete dos grupos investigados.

Para explicitar o processo pelo qual esse aspecto se evidencia, selecionamos a resolução desenvolvida na Questão 2 (*Se cada um comer 5 gramas de bolo, eles conseguirão alcançar a altura normal? E se comer 6 gramas? Explique seu raciocínio.*) pelo Grupo 7 (Figura 1). Na qual os alunos obtiveram as quantidades de centímetros aumentados (20 e 24 cm) de acordo com cada uma das quantidades de grama de bolo consumidas (5 e 6 g). Posteriormente, as quantidades de centímetros obtidas foram somadas às medidas das alturas reduzidas, respectivamente de John, Timothy e Anne (28, 24 e 20 cm). A partir desses valores, os alunos concluíram que, apenas essas quantidades de bolo não seriam suficientes para atingir a altura normal das personagens.

Figura 7: Questão 2 - Grupo 7

$$\begin{array}{r} 20 \\ \times 4 \\ \hline 80 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 24 \\ \times 6 \\ \hline 144 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 20 \\ \times 5 \\ \hline 100 \end{array}$$

JOHN TIMOTHY ANNE

R. Mto. Mto. E se fazer 4 vezes 5 que dá 20 e 4 vezes 6 que dá 24, se fazendo mais cada um da altura atual não dá a altura certa.

Fonte: Acervo da Pesquisa

O encaminhamento das operações realizadas e as conclusões que tiveram (Figura 7) revelam que os alunos fizeram diferentes comparações, primeiro entre a quantidade de centímetros obtida consumindo as quantidades de gramas indicadas na questão (comparação de natureza multiplicativa), bem como em relação à quantidade de centímetros atingidos ao comer cinco gramas de bolo e a quantidade de centímetros correspondente ao tamanho normal (comparação de quantidades). Além disso, o grupo somou à altura atual apenas os centímetros equivalentes a 5 gramas de bolo e concluíram que 6 gramas de bolo também não seriam suficientes para que as personagens alcançassem suas alturas normais, indicando que houve uma comparação entre as quantidades de bolo e as quantidades centímetros correspondentes a cada uma.

Do mesmo modo, podemos observar na justificativa apresentada na resolução pelo Grupo 8 (Figura 8), o estabelecimento de uma relação para comparar a quantidade de gramas de bolo e a quantidade de centímetros correspondente a ela.

Figura 8: Questão 2 - Grupo 8

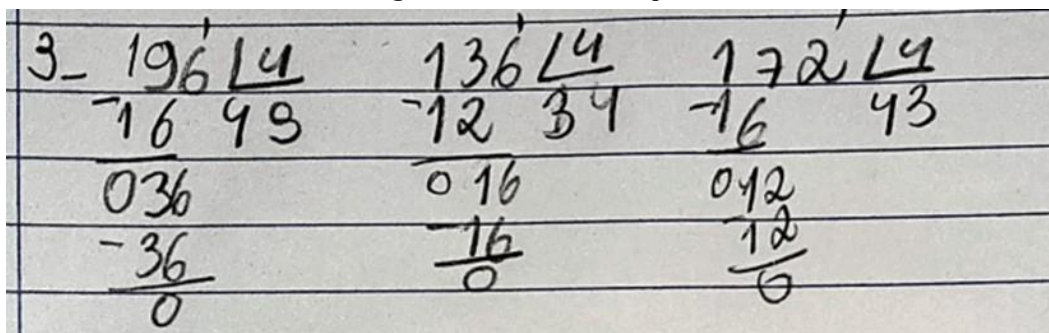
2- Porque 1 grama e quatro e se comer 6 gramas crescam 24 centímetros

Fonte: Acervo da Pesquisa

Observa-se que há uma comparação entre a relação dada no enunciado da tarefa, que indica que cada grama possibilita o crescimento de 4 cm, e a relação estabelecida pelo consumo de 6 gramas de bolo e a quantidade de centímetros que se crescerá a partir disso.

Na sequência (Figura 9), ao resolver a Questão 3 (*Para crescer o tamanho necessário para atingir seu tamanho normal, quantas gramas de bolo cada familiar do Chapeleiro precisa comer? Explique seu raciocínio.*), o Grupo 8 explorou a natureza multiplicativa da situação, dado que realizou a partição das quantidades de centímetros em 4 partes iguais de centímetros. Segundo Lamon (2012), ao comparar as quantidades e reconhecer que as estratégias aditivas não se aplicam, os alunos começam a observar a natureza multiplicativa presente nos casos em que se tem a ampliação, encolhimento, duplicação, exponenciação e partição em quantidades iguais.

Figura 9: Questão 3 - Grupo 8



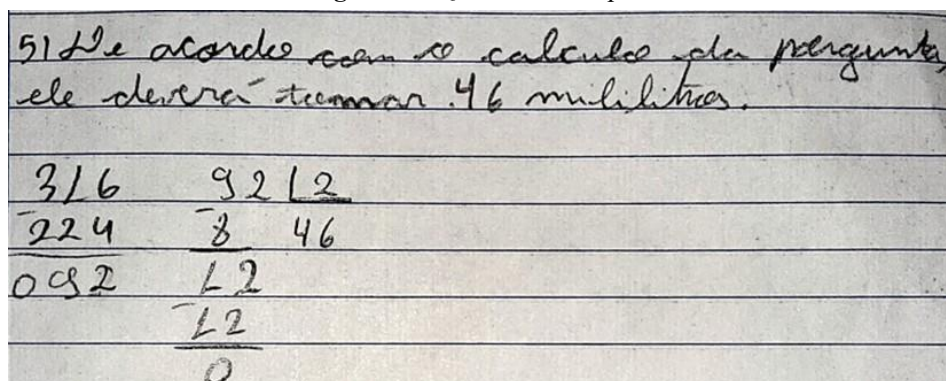
Three handwritten division problems on lined paper:

$$\begin{array}{r} 3 \overline{) 196 \cancel{14}} \\ \underline{16} \\ 036 \\ \underline{-36} \\ 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} 3 \overline{) 136 \cancel{14}} \\ \underline{12} \\ 016 \\ \underline{-16} \\ 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} 3 \overline{) 172 \cancel{14}} \\ \underline{16} \\ 012 \\ \underline{-12} \\ 0 \end{array}$$

Fonte: Acervo da Pesquisa

De modo semelhante, o Grupo 4, ao resolver a Questão 5 (*Após exagerar no consumo do bolo do crescimento, John, atingiu a altura de 316 cm. Quantos mililitros do líquido do encolhimento ele precisa ingerir para chegar à sua altura normal? Explique seu raciocínio.*), fez a divisão da quantidade excedente ao tamanho normal de John por 2, ou seja, a partição da quantidade de centímetros em 2 partes iguais de centímetros para verificar o total de líquido que deveria ser tomado.

Figura 10: Questão 5 - Grupo 4



Handwritten text and division problem on lined paper:

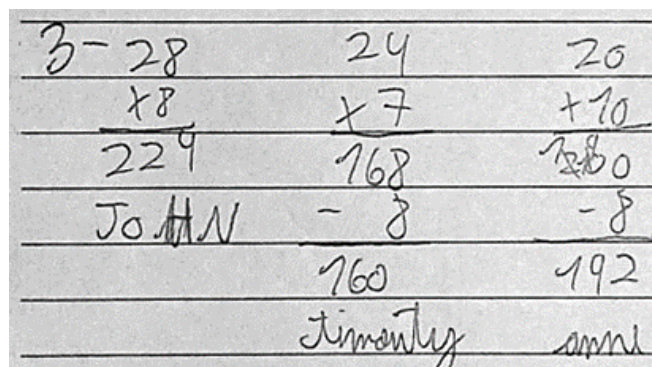
51 De acordo com o cálculo da pergunta, ele deveria tomar 46 mililitros.

$$\begin{array}{r} 316 \quad 3212 \\ \underline{224} \quad \underline{8} \quad 46 \\ 092 \quad 12 \\ \underline{12} \\ 0 \end{array}$$

Fonte: Acervo da Pesquisa

Dessa forma, analisando as resoluções dessas duas questões, observamos indícios da mobilização da percepção da natureza multiplicativa, como mostram as figuras 9 e 10, em que os grupos optam pela operação de divisão das quantidades de centímetros, em vez de buscarem estratégias aditivas. No entanto, conforme analisado na Figura 11, também houve casos em que a natureza multiplicativa foi observada pelos alunos, mas não compreendida em termos de comparação e relação entre as grandezas envolvidas.

Figura 11: Questão 3 - Grupo 7



Handwritten calculations on lined paper:

$$\begin{array}{r} 3-28 \\ \times 8 \\ \hline 224 \end{array} \quad \begin{array}{r} 24 \\ \times 7 \\ \hline 168 \end{array} \quad \begin{array}{r} 20 \\ +10 \\ \hline 30 \end{array}$$

Below the calculations, the names "JOHN" and "TIMOTHY" are written, along with the numbers "760" and "192".

Fonte: Acervo da Pesquisa

O Grupo 7 parece ter interpretado que a quantidade de gramas de bolo aumentava a altura atual dos personagens. Porém, com dificuldades de identificar as grandezas e o tipo de relação entre elas. Tal processo também pode ser observado na resolução da Questão 5.

Figura 12: Questão 5 - Grupo 7

$$\begin{array}{r} 376 \\ - 40 \\ \hline 276 \\ - 52 \\ \hline 224 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 200 \\ - 40 \\ \hline 160 \\ - 52 \\ \hline 108 \end{array}$$

R: Para voltar ao normal ele deve ingerir 57 miligramas para voltar ao normal.

Fonte: Acervo da Pesquisa

Novamente, o Grupo 7 apresentou indícios da percepção da natureza multiplicativa, porém, teve dificuldades ao efetuar as operações de multiplicação, mesmo com a identificação do valor constante dado pela relação entre as quantidades envolvidas na questão.

No que concerne ao reconhecimento da covariação entre as quantidades de gramas de bolo e os centímetros aumentados, com ou sem a descrição da constante de proporcionalidade, identificamos indícios mais recorrentes desse aspecto nas respostas à Questão 4 (*Se aumentarmos o consumo de bolo, o que acontecerá com a altura? Explique seu raciocínio.*) e à Questão 6 (*Se aumentarmos o consumo de líquido do encolhimento, o que acontecerá com a altura? Explique seu raciocínio.*). Um exemplo, é a resposta escrita pelo Grupo 5.

Figura 13: Questão 4 - Grupo 5

4- Eles cresceram mais 4 cm por pedaço de bolo

Fonte: Acervo da Pesquisa

Conforme apresentado pelos alunos (Figura 13), observa-se que eles reconheceram que o aumento de uma grama de bolo influenciava em um aumento/crescimento de mais 4 cm de altura.

A seguir, na resposta à Questão 4, apresentada pelo Grupo 2 (figura 14), também podemos observar que os alunos perceberam a relação de covariação entre as grandezas (gramas de bolo e altura), embora não tenham descrito como ela ocorre de acordo com a constante de proporcionalidade.

Figura 14: Questão 4 - Grupo 2

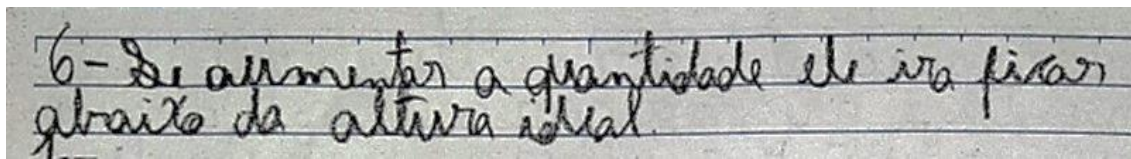
4- Eles vão ficar com a altura acima do normal. E não conseguirão mais crescer todos na sua altura normal.

Fonte: Acervo da Pesquisa

Na figura 15, na resposta apresentada à Questão 6, novamente, o Grupo 2 conseguiu descrever que há uma covariação entre a altura e a quantidade de bolo consumida. Os alunos explicam que as personagens ultrapassariam a altura normal, caso houvesse um maior consumo

de gramas de bolo. Todavia, não explicitam se essa covariação representa uma relação diretamente proporcional.

Figura 15: Questão 6 - Grupo 2



Fonte: Acervo da Pesquisa

Na maioria dos grupos, as respostas seguiram o mesmo raciocínio: eles cresceriam mais do que o necessário se aumentasse o consumo de bolo e diminuiriam mais do que o necessário se aumentasse a ingestão do líquido. No entanto, em que medida essa covariação ocorreria mencionada pelos alunos.

5 Conclusão

Assim como no estudo de Costa e Ponte (2008), a partir das análises das resoluções das tarefas exploratórias apresentadas pelos alunos, observou-se que a maior parte dos grupos foi capaz de criar estratégias de resolução sem que houvesse uma apresentação prévia de procedimentos matemáticos para resolvê-las. Tais estratégias basearam-se nos seguintes aspectos ligados ao raciocínio proporcional: comparar grandezas; estabelecer comparações de natureza multiplicativa; e reconhecer características de uma covariação entre as grandezas.

Por um lado, os alunos recorreram as estratégias intuitivas, sem que procedimentos mecanizados fossem aplicados. Todavia, algumas resoluções continham apenas os resultados finais, sem justificativas matemáticas ou explicações referentes aos métodos empregados para a obtenção das respostas, o que evidenciou a dificuldade dos alunos de expressarem o seu raciocínio e, como consequência, refletirem sobre os procedimentos adotado. A falta de argumentação, em algumas questões, ocasionou certa complexidade nas análises, como é o caso das questões 4 e 6, em que as respostas apresentadas não permitiram identificar com clareza os aspectos mobilizados, assim como o alcance dos objetivos das questões, os quais estavam relacionados à percepção da relação diretamente proporcional entre as grandezas.

Entretanto, em nossas análises, observamos indícios que apontam para uma possível mobilização do aspecto de covariação, isto porque os alunos perceberam que a mudança das quantidades de uma grandeza implica na mudança das quantidades da outra grandeza, mas não explicitaram que essa mudança ocorre de acordo com uma quantidade invariável chamada *constante de proporcionalidade*, como descreve Lamon (2012). Ainda assim, as demais resoluções forneceram detalhes que possibilitaram identificar a mobilização dos aspectos referentes à comparação entre quantidades, na Questão 2, e à comparação de natureza multiplicativa, nas questões 3 e 5. O primeiro aspecto mencionado foi evidenciado tanto nas comparações entre quantidades diferentes de uma mesma grandeza quanto em comparações entre quantidades de diferentes grandezas.

Já as comparações de natureza multiplicativa foram identificadas quando os alunos optaram por particionar as quantidades por meio da operação de divisão, que se trata da operação inversa da multiplicação. Contudo, nem todos os grupos conseguiram avançar com essa estratégia, tendo em vista que alguns perceberam a existência da natureza multiplicativa entre as quantidades, mas não compreenderam como a relação multiplicativa poderia ser estruturada. Ademais, o fato de os grupos não optarem por estratégias aditivas acena a emergência de processos do raciocínio proporcional, visto que Silvestre e Ponte (2012) elencam a compreensão da natureza multiplicativa nas relações de proporcionalidade como um dos

principais aspectos do raciocínio proporcional.

Esses resultados evidenciam o potencial de tarefas exploratórias, especialmente com o uso de tecnologias digitais, articulado a uma narrativa familiar, baseada nas histórias de *Alice no País das Maravilhas*, para envolver os alunos no desenvolvimento da atividade e favorecer a mobilização de aspectos fundamentais ao raciocínio proporcional.

Referências

- Ball, D. L. (1990). The mathematical understanding that preservice teachers bring to teacher education. *Elementary School Journal*, 90(4), 449-466.
- Canavarro, A. P.; Oliveira, H. & Menezes, L. (2012). Práticas de ensino exploratório da matemática: o caso de Célia. In: L. Santos (Ed.). *Investigação em Educação Matemática 2012: Práticas de ensino da Matemática*. (pp. 255-266). Portalegre: SPIEM..
- Cebola, G. & Brocardo, J. (2019). Estratégias, Representações e Flexibilidade na Resolução de Tarefas de Comparação Multiplicativa. *Bolema: Boletim de Educação Matemática*, 33(64), 568-590.
- Chizzotti, A. (2006). *Pesquisa em Ciências Humanas e Sociais* (8. ed., pp. 77-87). São Paulo, SP: Cortez.
- Costa, S. & Ponte, J. P. (2008). O raciocínio proporcional dos alunos do 2º ciclo do ensino básico. *Revista da Educação*, 16(2), 65-100.
- Genially. (2024). Retrieved July 12, 2024, from Genially: <https://genially.com/pt-br/quem-somos/>
- Kenney, P. A.; Lindquist, M. M. & Heffernan, C.L. (2002). Butterflies and caterpillars: Multiplicative and proportional reasoning in the early grades. In: B. Litwiller (Ed.). *Making sense of fractions, ratios, and proportions*. (pp.87-99). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Khoury, H. A. (2002). Exploring proportional reasoning: Mr. Tall/Mr. Short. In: B. Litwiller & G. Bright (Eds.). *Making Sense of Fractions, Ratios, and Proportions: 2002 Yearbook*. (pp. 100-102). Reston, VA: The National Council of Teachers of Mathematics.
- Lamon, S. J. (2012). *Teaching fractions and ratios for understanding: Essential content knowledge and instructional strategies for teachers* (3. ed.). New York, NY: Routledge.
- Lesh, R.; Post, T. & Behr, M. (1988). Proportional reasoning. In: J. Hiebert & M. Behr. (Eds.). *Number Concepts and Operations in the Middle Grades*. Tradução de A. I. Silvestre, Escola EB 2,3 de Fernão Lopes. Revisão da tradução F. Álvares, Escola EB 2,3 de Fernão Lopes (pp. 93-118). Reston, VA: Lawrence Erlbaum & National Council of Teachers of Mathematics.
- Maranhão, C. & Machado, S. (2011). Uma meta-análise de pesquisas sobre o pensamento proporcional. *Educar em Revista*, 27(1), 141-156.
- Meroto, M. B. N.; Sales, G. R. F.; Oliveira, J. P. & Andrade, S. G. S. (2023). Explorando o potencial das mídias digitais e linguagem visual na educação. *Revista Ilustração*, 4(5), 107-115.
- Moseley, B. (2005). Students' early mathematical representation knowledge: The effects of emphasizing single or multiple perspectives of the rational number domain in problem solving. *Educational Studies in Mathematics*, 60(1), 37-69.



- Ponte, J. P. (2005). Gestão Curricular em matemática. In: GTI (Ed.). *O professor e o desenvolvimento curricular*. (pp. 11-34). Lisboa: Associação de Professores de Matemática.
- Ponte, J. P.; Mata-Pereira, J.; Henriques, A. C. & Quaresma, M. (2013). Designing and using exploratory tasks. In: C. Margolinas (Ed.). *Task Design in Mathematics Education: Proceedings of ICMI Study 22*. (pp. 493-501). Oxford: ICMI.
- Silvestre, A. I. & Ponte, J. P. (2012). Proporcionalidade directa no 6.º ano de escolaridade: uma abordagem exploratória. *Interacções*, 8(20), 70-97.
- Silvestre, A. I. (2012). *O desenvolvimento do raciocínio proporcional: Trajetórias de Aprendizagem de Alunos do 6.º Ano de Escolaridade*. 392f. Tese (Doutorado em Educação). Universidade de Lisboa. Lisboa.
- Spinillo, A. G. (2002). O papel de intervenções específicas na compreensão da criança sobre proporção. *Psicologia: Reflexão e Crítica*, 15(3), 475–487.
- Stein, M. K. & Smith, M. S. (1998). Mathematical tasks as a framework for reflection: From research to practice. *Mathematics Teaching in the Middle School*, 3(4), 268-275. Tradução de alunos de mestrado em Educação Matemática da FCUL. (2009). *Educação e Matemática*, (105), 22-28.