Exploração ontossemiótica das trajetórias didáticas mobilizadas por estudantes na resolução de uma situação-problema sobre Integral Definida

Ontosemiotic exploration of mobilized didactics trajectories by students in solving question about Definite Integral

Janine Freitas Mota[1]
João Bosco Laudares[2]

Resumo: Este trabalho, recorte de uma pesquisa de doutorado, objetiva explicitar e analisar, sob a perspectiva do Enfoque Ontossemiótico do Conhecimento e da Instrução Matemática (EOS) e do Conhecimento Didático-Matemático (CDM) do professor, como dez estudantes de Licenciatura em Matemática mobilizaram competências e desenvolveram conhecimentos na resolução de uma situação-problema sobre Integral Definida. A coleta de dados seguiu os aspectos metodológicos da Engenharia Didática, interpretados conforme o EOS. A análise dos dados revelou que a experimentação aprimorou os conhecimentos dos estudantes sobre a Integral Definida, abrangendo: conexões entre teoria e prática com contextos intra e extramatemáticos; formalização e generalização de conhecimentos; mobilização de competências; desenvolvimento da autonomia; interdisciplinaridade; uso de diferentes tipos de registros de representação e mobilização de processos cognitivos.

Palavras-chave: Exploração Ontossemiótica. Trajetórias Didáticas. Integral Definida. Conhecimento Didático-Matemático

Abstract: This scientific work, as a doctoral program task, aims to explain and analyse, from the perspective of Ontossemiotic Approach to Knowledge and Mathematical Instruction (OAK) and in the Didactic-Mathematical Knowledge of the teacher (DMK), how 10 (ten) Degree Mathematics students developed skills and knowledge in solving question about Definite Integral. The data search used methodologic aspects from Didactic Engineering, which were interpreted according OAK. The data analysis revealed the experimentation improved the students knowledge about Definite Integral, covering: connections between theory and practice in intra and extra-mathematics contexts; building and widespread of knowledge of Mathematics; skills and autonomy development; interdisciplinarity; use of different types of representation records and cognitive processes development.

Keywords: Ontosemiotic Exploration. Didactics Trajectories. Definite Integral. Didactic-Mathematical Knowledge.

1 Apresentação do contexto e importância do estudo sobre Integral Definida

Neste artigo, apresentamos uma parte dos dados obtidos na conclusão da pesquisa de doutorado conduzida pela primeira autora. A investigação completa pode ser encontrada em Mota (2021). O estudo teve como objetivo investigar a mobilização de competências e o desenvolvimento de conhecimentos didático-matemáticos por licenciandos em Matemática durante a implementação de uma proposta didática. A referida proposta abordou significados da Integral Definida de funções reais de uma variável real com o uso de tecnologias digitais. Neste recorte, optamos por explicitar e analisar como os estudantes mobilizaram competências e desenvolveram conhecimentos, sob a perspectiva do Enfoque Ontossemiótico do Conhecimento e da Instrução Matemática (EOS) e do Conhecimento Didático-Matemático

[1] Universidade Estadual de Montes Claros • Montes Claros, MG — Brasil • ✉ janine.mota@unimontes.br • ORCID https://orcid.org/0000-0003-1653-9521
[2] Universidade Federal de Minas Gerais • Belo Horizonte, MG — Brasil • ✉ jblaudares@terra.com.br • ORCID https://orcid.org/0000-0003-3624-3402

(CDM) do professor, na realização de uma das situações-problema exploradas na pesquisa.

O ensino da Integral Definida é essencial no currículo da Licenciatura em Matemática, pois abrange conceitos fundamentais do Cálculo e suas aplicações. Contudo, devido à sua complexidade, muitos estudantes encontram dificuldades em visualizar e formalizar esses conceitos. Tradicionalmente, o currículo organiza o ensino da Integral Definida após o estudo da Integral Indefinida, dos Limites e das Derivadas, enfatizando sua importância na resolução de problemas interdisciplinares, especialmente na Física e em outras áreas do conhecimento. No entanto, pesquisas sobre ensino de Cálculo destacam dificuldades em associar o Limite à Integral, conforme discutido em Mota (2023). A pesquisadora, primeira autora deste trabalho, argumenta que, para superar essas dificuldades, é necessário adotar abordagens que transcendam as técnicas algébricas, priorizando os significados e aplicações da Integral Definida no ensino universitário das Ciências Exatas.

Nesse sentido, ressalta-se que a Integral Definida tem diversas aplicações, incluindo o cálculo da medida de área sob uma curva, comprimento de curvas e volume de sólidos de revolução. Essas aplicações abrangem tanto contextos intramatemáticos (relacionados exclusivamente a objetos matemáticos) quanto extramatemáticos (que incluem elementos externos ao campo matemático), conforme preceitua Godino (2012).

Na constituição da problematização da pesquisa, foram analisados estudos como o de Turégano (1998), que enfatiza a necessidade de mudança de foco conceitual na abordagem da Integral Definida, destacando as dificuldades dos estudantes em relacionar a medida da área ao processo de somatório, em que a área deixa de ser um objeto geométrico e passa a ser o resultado de um cálculo. São mencionadas barreiras na compreensão dos elementos da Integral de Riemann, na integração e na aproximação do cálculo da medida da área, baseada no teorema da existência das somas.

Pesquisas referentes ao ensino de Cálculo com ênfase na Integral Definida indicam que as potencialidades desse objeto matemático para a construção do conhecimento são frequentemente subexploradas – existe uma relação insatisfatória entre o que se ensina e o que se aprende sobre Integrais, Limites e Derivadas, como ressalta Figueiredo, Siple, Longen e Boeing (2013, p. 1581): “apesar de sua grande importância, o ensino da Integral limita-se, muitas vezes, à memorização de técnicas de integração. Muitos alunos saem de um curso de Cálculo sem entendê-las nem sequer relacioná-las com limites e derivadas”.

Há estudos com proposições de ações interativas com o uso de tecnologias digitais, atividades de modelagem e resolução de problemas com aspectos interdisciplinares, conforme indicado por Melo (2002), Mota e Abar (2020), entre outras pesquisas.

Nesse contexto, este estudo propõe responder: De que forma a resolução de uma situação-problema, que aborda a Integral Definida, com suporte de tecnologias digitais, pode contribuir para a mobilização de competências e o desenvolvimento de conhecimentos didático-matemáticos de estudantes de Licenciatura em Matemática?

Na próxima seção, apresentamos considerações acerca do Enfoque Ontossemiótico do Conhecimento e da Instrução Matemática (EOS)[3] (Godino, 2012; Godino, Batanero & Font, 2008) e o Conhecimento Didático-Matemático (CDM)[4] (Godino, 2009; Pino-Fan & Godino, 2015), referenciais que subsidiaram a pesquisa realizada.

[3] Teoria em evolução desde 1990, que tem como principal pesquisador Juan Díaz Godino, professor da Universidade de Granada, na Espanha, líder do grupo de pesquisa *Teoría y Metodología de Investigación em Educación Matemática*.
[4] O CDM, desenvolvido por Godino e colaboradores, compreende categorias que analisam os conhecimentos didático-matemáticos do professor e abrange aspectos relacionados à prática didática e ao conhecimento do conteúdo matemático, destacando a importância da formação contínua e do desenvolvimento profissional dos professores de Matemática.

2 EOS e CDM: subsídios teórico-metodológicos utilizados na elaboração e implementação da situação-problema

O EOS apresenta ferramentas teóricas para articular o pensamento (ideias matemáticas), a linguagem matemática (signos), os objetos, as situações de ensino e de aprendizagem e outros fatores que impactam esses processos. Essa abordagem inclui ferramentas que podem ser utilizadas na análise de questões relacionadas aos aspectos epistêmico (conhecimento didático-matemático do conceito), cognitivo (conhecimento de como os estudantes aprendem), afetivo (conhecimento afetivo, emocional, atitudinal, crenças sobre objetos), interacional (conhecimento sobre o ensino de Matemática), mediacional (conhecimento de recursos) e ecológico (conhecimento das relações entre o conteúdo matemático e outras disciplinas, fatores curriculares, socioprofissionais, políticos, econômicos) (Godino, 2017).

O ensino de Matemática demanda que o professor domine um conjunto complexo de conhecimentos didáticos e matemáticos. Segundo Godino (2009), o professor deve ser capaz de organizar o ensino, criar atividades de aprendizagem adequadas, utilizar recursos didáticos eficazmente e compreender as condições que facilitam o ensino e a aprendizagem. Esses princípios fundamentam o modelo teórico do Conhecimento Didático-Matemático (CDM), desenvolvido no contexto do EOS e investigado em estudos subsequentes (Godino, 2009; Pino-Fan, Godino & Font, 2013, Pino-Fan & Godino, 2015; Godino, 2017). As categorias do CDM ajudam a identificar e analisar os conhecimentos e competências necessários para aprimorar o ensino da Matemática, oferecendo um quadro teórico para avaliar e aperfeiçoar a prática docente.

A situação-problema abordada neste artigo integra uma proposta didática para o estudo da Integral Definida, implementada na pesquisa de Mota (2021). Essa proposta se fundamenta na estrutura teórico-metodológica do Enfoque Ontossemiótico do Conhecimento e da Instrução Matemática (EOS) (Godino, Batanero & Font, 2008; Godino *et al.*, 2013), articulada com a Engenharia Didática (Artigue, 1991). Foram delineadas trajetórias didáticas que incluíram o uso de diversas representações, a interdisciplinaridade com contextos intra e extramatemáticos e tecnologias digitais. No EOS, uma sequência de configurações didáticas orientada para a resolução de um tipo de situação-problema, ou de aprendizagem de um conteúdo específico, constitui uma trajetória didática. Foram considerados diversos aspectos no desenvolvimento da pesquisa, incluindo a natureza e a emergência dos objetos matemáticos a partir das práticas e configurações matemáticas, bem como a compreensão desses como uma competência desenvolvida pelos estudantes (Font, 2011). A conexão teórica foi estabelecida com os Registros de Representação Semiótica (TRRS) (Duval, 1993, 2009), e a resolução de situações-problema foi analisada levando em conta o comportamento do sujeito nas práticas operacionais e discursivas (Godino, 2011). A investigação também incluiu a análise dos processos na atividade matemática, incluindo sequências cognitivas e epistêmicas (Godino, Batanero & Font, 2008), além da implementação de processos instrucionais por meio de configurações e trajetórias didáticas. Finalmente, houve a categorização e análise do conhecimento didático-matemático (Godino, 2009), essencial para a compreensão do desenvolvimento dessas competências.

3 A situação-problema implementada e analisada

A proposta didática desenvolvida contemplou as seis entidades primárias do EOS: elementos linguísticos; situações-problema; conceitos/definições; proposições/propriedades; procedimentos; argumentos. As atividades, iniciadas com situações-problema que evocam objetos matemáticos, buscaram promover a compreensão do conceito de área de uma região limitada por uma curva fechada, a partir de perspectivas gráfica, algébrica e numérica. Tais atividades envolveram práticas matemáticas manifestadas na resolução de sequências de tarefas, constituindo-se em subconfigurações, constando de construções indicadas para realização no GeoGebra, além de questionamentos com o objetivo de estimular os processos cognitivos dos estudantes. Foram utilizadas as noções de configuração epistêmica[5] e configuração didática[6] para auxiliar os estudantes a identificar alguns significados da Integral Definida. A situação-problema, destacada neste artigo, compôs a Unidade 1, denominada "Institucionalização do conceito de Integral Definida" e está destacada na Figura 1.

Figura 1: Situação-problema 1 da Unidade 1 – Introdução à definição de Integral de Riemann

Atividade 1: Introdução à definição de Integral de Riemann
A atividade é constituída de tarefas experimentais com o uso do GeoGebra para o estudo de uma Soma de Riemann, como ferramenta para o cálculo de medida de área.
Objetivos: Estimar medidas de áreas, utilizando aproximações finitas, usando como ferramenta tecnológica o *software* GeoGebra, considerando uma função f contínua, em um determinado intervalo, em que $f(x) \geq 0$.
Metodologia: Utilizar as aproximações finitas com o GeoGebra.
Duração prevista: 3 h/a
Situação-Problema 1: Suponhamos que a prefeitura da cidade de Montes Claros necessite de que uma determinada empresa faça uma reforma no Parque Municipal Guimarães Rosa, localizado na Avenida José Corrêa Machado, bairro Ibituruna, e, para isso, precisa obter a medida da área desse Parque. Como obter a medida aproximada de sua área tendo como referência o mapa gerado pelo aplicativo *Google Maps?*

Fonte: Mota (2021, p. 152)

As primeiras tarefas indicadas na atividade possibilitaram aos estudantes a construção apresentada na Figura 2.

Figura 2: Imagem ajustada ao eixo das abscissas

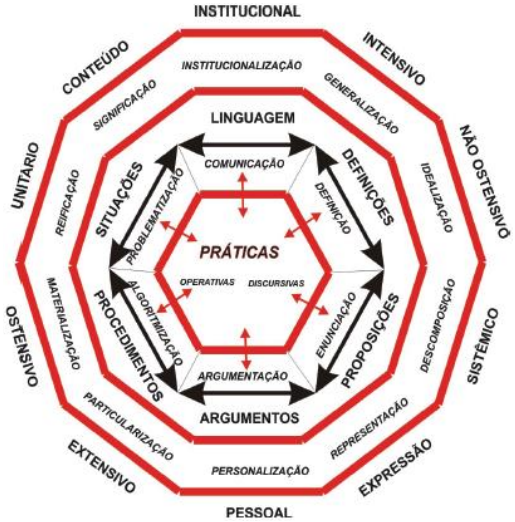
Fonte: Mota (2021, p. 158)

A atividade aborda termos essenciais para a compreensão da Integral Definida, no sentido de Riemann, incluindo a divisão dos intervalos em partes infinitamente pequenas, o cálculo do somatório das medidas de áreas dos retângulos aproximantes[7] e o uso do limite desse somatório com a quantidade de retângulos tendendo a infinito. Há, ainda, a menção aos limitantes inferior e superior, bem como a introdução à notação de Leibniz para a Integral Definida. Foram utilizados os elementos: linguagem verbal (conceitos e proposições); representações gráficas (no GeoGebra); numérica (valores aproximados); computacional (no GeoGebra); simbólica (símbolos matemáticos) e analítica (expressões algébricas). Os estudantes aplicaram proposições, propriedades e procedimentos matemáticos, fazendo conjecturas, generalizações e justificativas.

[5] As configurações epistêmicas são compostas pelos objetos que intervêm e emergem dos sistemas de práticas matemáticas em diferentes contextos de uso. Um objeto matemático pode ter várias configurações epistêmicas e essas carregam um significado parcial diferente para aquele objeto matemático (Font & Godino, 2006).
[6] Uma configuração didática está associada a uma configuração epistêmica, isto é, uma tarefa, os procedimentos requeridos para sua solução, linguagens, conceitos, proposições e argumentações (Godino, Batanero & Font, 2008).
[7] Denominam-se *retângulos aproximantes* os *n*-ésimos retângulos que compõem uma Soma de Riemann.

Nessa atividade, foram aplicados alguns dos dezesseis processos do EOS descritos por Godino, Batanero e Font (2008). Esses processos incluem comunicação, problematização, definição, enunciação, desenvolvimento de procedimentos e argumentação, os quais emergem dos objetos matemáticos como parte do processo cognitivo e epistêmico. A Figura 3 ilustra a inter-relação desses elementos na atividade.

Figura 3: Representação ontossemiótica dos conhecimentos matemáticos



Fonte: Adaptado de Godino, Batanero e Font (2008, p. 18)

Na seção seguinte, passaremos à descrição das trajetórias didáticas realizadas para a resolução da situação-problema em destaque, bem como dos elementos de análise utilizados.

4 Trajetórias didáticas e elementos de análise

A implementação da situação-problema culminou em trajetórias didáticas. A análise focou na descrição do conteúdo abordado, nos padrões de interação entre os estudantes[8], no reconhecimento de conflitos cognitivos e interativos, e nas formas como esses foram resolvidos. O EOS forneceu ferramentas para análise, conforme mostrado no Quadro 1.

Quadro 1: Níveis de análise propostos no EOS

Práticas Matemáticas e Didáticas	Descrição das ações realizadas para resolver atividades matemáticas e contextualizar os conteúdos.
Configurações de Objetos e Processos	Identificação dos objetos e processos matemáticos e didáticos envolvidos nas práticas.
Normas e Padrões	Identificação das regras, hábitos e normas que condicionam o processo de estudo.
Adequação Didática	Avaliação da pertinência das ações realizadas, dos conhecimentos mobilizados e dos recursos usados no ensino de um tema específico, além de identificar melhorias.

Fonte: Godino (2009)

Os níveis descritos integram uma abordagem epistemológica e sociocultural, considerando o contexto institucional e social dos processos de ensino e de aprendizagem. A análise didática caracterizou as configurações didáticas, epistêmicas e instrucionais, bem como as aprendizagens construídas, todas interagindo na trajetória didática por meio de práticas operativas e discursivas.

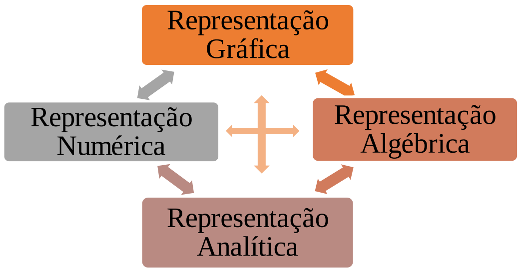
[8] Optamos por pseudônimos para garantir o anonimato dos estudantes.

As respostas dos estudantes revelaram suas compreensões acerca da Integral Definida, sendo analisadas as práticas, identificados os processos mobilizados, as dificuldades e os conflitos semióticos. Esses elementos são detalhados em Mota (2021). A linguagem, as representações, as relações e os argumentos são destacados para validar e explicar as proposições. Foram analisados os protocolos das duplas de estudantes, utilizando segmentos de transcrição de Fatos Didáticos Significativos[9] (FDS) para identificar e avaliar as trajetórias didáticas.

5 Práticas matemáticas e didáticas referentes à situação-problema em destaque

Os estudantes foram incentivados a usar uma representação ostensiva de conceitos, proposições, procedimentos e argumentos para avaliar a adequação das ações. A atividade estimulou a transição entre representações gráfica, numérica e analítica, resultando no esquema produzido (Figura 4), inspirado na TRRS (Duval, 1993, 2009).

Figura 4: Esquema que representa funções semióticas em termos de representação



Fonte: Adaptado da TRRS (DUVAL, 1993, 2009)

Os estudantes articularam, favoravelmente, os registros na língua materna, algébrica, gráfica e numérica, o que foi evidenciado a partir de protocolos escritos ou digitais das duplas. As práticas realizadas serviram como base para que os estudantes formulassem hipóteses, conjecturas e comunicassem a resolução da situação-problema.

As relações entre os objetos e processos matemáticos foram mobilizadas pelo uso de processos intuitivos, visando à compreensão dos conceitos da Integral de Riemann. Nesse contexto, distinguiram-se dois tipos de argumentação, conforme Duval (2009): retórica (justificativa verbal) e heurística (justificativa da eficácia). Esses tipos de argumentação emergiram enquanto os estudantes realizavam os procedimentos necessários para resolver a situação-problema, acompanhados de discussões e comentários entre si, demonstrando a integração entre os aspectos operacionais e discursivos do processo de aprendizagem.

Passaremos ao detalhamento da análise *a priori* e *a posteriori* das práticas operativas e discursivas realizadas na resolução da situação-problema especificada.

5.1 Práticas operativas e discursivas realizadas para resolução da situação-problema em destaque, analisadas *a priori* e *a posteriori*

Os estudantes foram guiados para a compreensão conceitual da medida de área da região abrangida entre a representação gráfica de uma função contínua f e o eixo das abscissas, em um intervalo $[a, b]$, partindo do limite das somas das medidas das áreas dos retângulos sobrepostos à região, chegando a uma Soma de Riemann e à relação do valor numérico com a medida aproximada da superfície do Parque Guimarães Rosa[10], proposto no contexto da

[9] Conforme Godino, Rivas, Arteaga, Lasa e Wilhelmi (2014), um fato didático é significativo se as ações ou práticas didáticas que o compõem desempenham um papel, ou admitem uma interpretação, em termos do objetivo instrucional pretendido. Os FDS ajudam a delimitar configurações didáticas ligadas à resolução das situações-problema e aos componentes epistêmicos, cognitivos ou instrucionais.

[10] O Parque Guimarães Rosa foi citado na situação-problema devido à sua relevância no contexto regional da pesquisa.

situação-problema. Uma função semiótica do tipo representacional foi estabelecida, porque a medida da área é representada com um valor numérico e por meio de outras representações: gráfica (com o GeoGebra), algébrica e analítica (como em $Área(R) = \int_a^b f(x)\,dx$). A atividade visou solidificar conceitos por meio da conversão para a representação numérica, alcançando o objetivo de calcular a medida da área do Parque e transformar escalas gráficas.

A Figura 4 representa a decomposição da Atividade em três Configurações Didáticas (CD), (CD1), (CD2) e (CD3), compostas por práticas, identificadas por P1.1 e subsequentes, que resumem as tarefas solicitadas, conforme apresentado de forma completa em Mota (2021).

Figura 4: Configurações Didáticas – Atividade 1 da Unidade 1

Configuração Didática 1 da Atividade 1 (CD1.1): Manipulações no *software GeoGebra* para alocação da figura e preparação para realização de reflexões – 1º ao 4º passo da Atividade 1.

P1.1 Preparação da imagem do mapa do Parque no GeoGebra: Inserir e posicionar, adequadamente, a imagem do mapa do Parque na área gráfica do *software*, observando o sistema de eixos cartesianos. Coincidir uma extremidade do mapa do Parque com o eixo das abscissas. Criar um polinômio que represente uma das extremidades da região que expressa a superfície do Parque. Criar retas perpendiculares ao eixo das abscissas para delimitar o intervalo em que a região que representa a superfície do Parque está representada no plano cartesiano.

P1.2 Realização da aproximação da medida da área da região que representa a superfície do Parque, utilizando recurso do GeoGebra: Inserir o comando *SomaRetângulos*. Variar o número de retângulos utilizados. Identificar o valor numérico relacionado à medida aproximada da área.

Configuração Didática 2 da Atividade 1 (CD1.2): Institucionalização dos objetos matemáticos que compõem uma Soma de Riemann – 5º passo da Atividade 1

P2.1: Experimentação das medidas dos elementos dos retângulos sobrepostos à região que representa a superfície do Parque, quando se altera o número de retângulos.

P2.2.: Representação algébrica da soma das medidas das áreas dos retângulos sobrepostos, usando somatório ($\sum_{k=1}^{n} A_k = A_1 + A_2 + \cdots + A_i + \cdots + A_n$), sendo A_1 a área do primeiro retângulo, A_2 a área do segundo retângulo e A_n a área do *e-nésimo* retângulo; e a relação do número de retângulos utilizados com uma melhor aproximação da soma das medidas das áreas dos retângulos, com a medida da área da região que representa a superfície do Parque.

P2.3: Interpretação algébrica da divisão do intervalo $[a, b]$ em subintervalos menores e regulares. Institucionalização da relação $\frac{|b-a|}{n} = \Delta x$, sendo $[a, b]$ o intervalo considerado, n o número de retângulos sobrepostos à superfície do mapa e Δx a medida dos subintervalos.

P2.4: Institucionalização da escolha das alturas $f(c_i)$ dos retângulos sobrepostos à região que representa a superfície do Parque.

P2.5: Institucionalização da representação algébrica da medida da área do *e-nésimo* retângulo: $A_n = f(c_n) \cdot \Delta x$

P2.6: Institucionalização da soma das medidas das áreas dos retângulos:

$$R_n = f(c_1) \cdot \Delta x + f(c_2) \cdot \Delta x + \cdots + f(c_3) \cdot \Delta x + \cdots + f(c_n) \cdot \Delta x = \sum_{k=1}^{n} A_n$$

Configuração Didática 3 da Atividade 1 (CD 1.3): Aplicação da Integral Definida para cálculo da região representada pelo mapa do Parque – tarefas 14 e 15 do 5º passo, 6º passo da Atividade 1

P3.1: Institucionalização da relação do limite com o conceito das somas infinitesimais:

$$Area = \lim_{n \to \infty} R_n = \lim_{n \to \infty} [f(c_1) \cdot \Delta x + f(c_2) \cdot \Delta x + \cdots + f(c_3) \cdot \Delta x + \cdots + f(c_n) \cdot \Delta x]$$

P3.2: Associação do conceito de limite ao de integral, usando a formalização matemática:

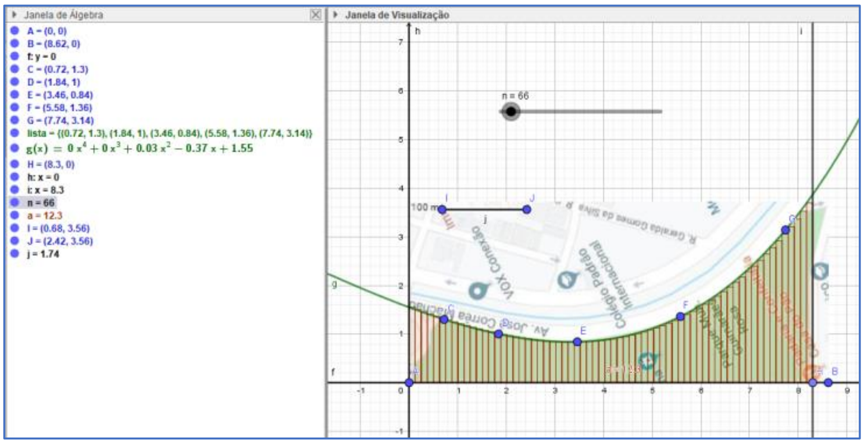
$Área = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i) \cdot \Delta x = \int_a^b f(x)dx$ para funções contínuas, em que $f(x) \geq 0$, em $[a, b]$.

P3.3: Cálculo da proporcionalidade entre a medida aproximada da área da região que representa a superfície do Parque Guimarães Rosa, obtida no GeoGebra, e a medida aproximada da área desse Parque.

Fonte: Mota (2021, p. 193-194)

A análise *a priori* das práticas da CD1 considerou experimentações no GeoGebra para desenvolver a ideia intuitiva da Integral Definida para o cálculo de medida de área. Esperava-se que os estudantes delimitassem algebricamente o mapa do Parque no plano cartesiano. A visualização de retângulos sobre o mapa permitiu calcular a aproximação da medida da área, revelando um erro devido à imperfeita adaptação dos retângulos à superfície. Esse erro poderia ser reduzido, ao diminuir a base dos retângulos e aumentar sua quantidade. Após a implementação da CD1, esperava-se que os estudantes apresentassem a tela no GeoGebra, conforme mostrado na Figura 6.

Figura 6: Tela do GeoGebra referente às práticas inerentes à CD1



Fonte: Mota (2021, p. 196)

Na análise *a posteriori* das práticas da CD1, todas as duplas utilizaram o GeoGebra e manifestaram a reflexão discursiva, manipulando a tecnologia com poucas dificuldades e expondo argumentos, conforme exemplificado no diálogo dos estudantes:

> ELBA: *Temos que colocar uma reta perpendicular a* $y = 0$. *Mas a reta ficou em cima do eixo x. Parece que o comando não deu certo.*
> FRANCIELE: *Apaga e clica de novo para criar uma perpendicular ali.*
> ELBA: *Nesse caso, vou criar uma perpendicular a esse ponto?*
> FRANCIELE: *Não, tem que ser perpendicular ao eixo x e passando pelo ponto H e outra passando pelo ponto A. Acho que é assim... tenta aí.*
> FRANCIELE: *Não, tem que ser perpendicular ao eixo x e passando pelo ponto H e outra passando pelo ponto A. Acho que é assim... tenta aí (Mota, 2021, p. 197).*

A análise do arquivo do GeoGebra dessa dupla revelou um erro na construção da reta perpendicular ao eixo das abscissas. Esse equívoco destacou a capacidade da dupla de reconhecer o erro, demonstrando seus conhecimentos prévios e habilidades de interpretação e comunicação de conceitos matemáticos.

A visualização foi essencial, pois ajudou na compreensão da aproximação da medida da área do Parque, conforme diálogo dos estudantes ao realizarem a prática P1.2:

> LUDIMILA: *Tem que ir na barra de entrada, olha lá soma dos retângulos.*
> TÚLIO: *É verdade o erro que terá. Olha para você ver, se usarmos apenas um retângulo o erro será muito* grande. *Olha os retângulos sendo criados, que massa!* ***Eu sei no quadro, mas estou falando no GeoGebra!***
> LUDIMILA: *Quanto mais retângulos, mais exata fica a área.*
> TÚLIO: *Verdade, usando mais retângulos, a área do Parque fica mais aproximada. Mota (2021, p. 197)*

Nesse caso, Túlio relatou sua habilidade em calcular a Integral Definida por meio de algoritmos, destacando que o uso do GeoGebra para visualização gráfica auxilia na compreensão das diferentes representações. Ludimila contribuiu com a observação de que “a medida da base dos retângulos se reduz à medida que o número de retângulos cresce”. Desse modo, a integração das representações no GeoGebra promoveu o desenvolvimento de habilidades cognitivas, como exploração, formulação de conjecturas, refutação e abstração.

Referente aos conceitos, foram evidenciadas algumas dificuldades de compreensão dos estudantes em relação aos conceitos de Geometria Plana e outros.

Na análise *a priori* das práticas da CD2, considerou-se que os estudantes utilizariam representações natural e simbólica, aliadas ao raciocínio intuitivo e experimental, para transitar da particularidade à generalização de problemas. A atividade engajou objetos ostensivos (símbolos e gráficos) e não ostensivos (definições e conceitos). A representação gráfica no *software* teria o potencial de melhorar a visualização e manipulação de conceitos abstratos, promovendo uma aprendizagem mais acessível e significativa.

Nessa configuração, foram abordados conceitos relacionados à série de somas sucessivas (P2.2). A atividade matemática engloba as ações de familiarização dos estudantes com a notação sigma $(\sum)$, necessária na definição de Soma de Riemann. Como discutido por Duval (2009, p. 15), "as representações semióticas não são somente indispensáveis para fins de comunicação, mas necessárias ao desenvolvimento da atividade Matemática". Foi conjecturado que os estudantes aprimorariam a escrita matemática generalizada, partindo das observações das experimentações.

A linguagem envolveu diferentes registros de representação semiótica associados ao conceito de medida de área, incluindo o registro ostensivo (A soma das áreas dos retângulos se aproxima da medida da área da superfície que representa o Parque.), o registro discursivo nas proposições (À medida que a base dos retângulos tende a zero e a quantidade de retângulos aumenta, a aproximação da medida da área do Parque se torna mais precisa.) e o registro de procedimentos (Diminuir a base dos retângulos ajusta-os de forma mais adequada à superfície representada pelo mapa do Parque.). Esperava-se que os estudantes utilizassem esses objetos na elaboração de argumentos sólidos para tomar decisões relacionadas às práticas e para fornecer respostas satisfatórias às tarefas apresentadas.

Sobre a análise *a posteriori* inerente às práticas da CD2, verificou-se que as duplas observaram as propriedades e argumentos presentes na conceitualização matemática das medidas das bases e alturas dos retângulos, o que as levou à abordagem gráfica e teórica de uma Soma de Riemann. Conforme Turégano (1998), a essência na evolução da compreensão do conceito de limite que constitui a Integral de Riemann é a identificação, aqui possibilitada pelo registro geométrico-gráfico, da altura dos retângulos, situação que convence o estudante de que existe um número que mede a altura dos retângulos e que esse número se relaciona com a imagem da função f considerada. Foram realizadas, pelas duplas, a leitura de textos matemáticos e a interpretação dos conceitos no contexto da situação-problema proposta, escrevendo o somatório de forma genérica, como $\sum_{i=1}^{n}\left(\Delta x \cdot f(c_i)\right)$, (com $i = 1, 2, ..., n$).

Foi possível perceber os processos mentais usados pelos estudantes na generalização da amplitude Δx, observados neste diálogo:

> ELBA: *Se utilizamos 4 retângulos no intervalo [1,5], cada retângulo terá base com medida 1 unidade. Olha só na tela...*
> FRANCIELE*: Então delta x iria ser igual a um.*
> ELBA*: A conta seria (5-1), dividido por 4. E se tivermos* x_0, x_1, x_2, x_3, x_4 *... A primeira parte pode ser* $x_1 - x_0$. *Depois* $x_2 - x_1$ *... Eu creio que seja assim.*
> FRANCIELE: *Aqui seria* $x_4 - x_3$. *De modo geral, delta x é igual a x superior menos o x inferior do subintervalo. Então, podemos escrever* $x_n - x_{n-1}$.
> ELBA*: Mas na atividade fala* $\Delta x = x_i - x_{i-1}$
> FRANCIELE: É a mesma coisa, só trocou o n por i. *Mota (2021, p.202)*

A estudante Elba inicia particularizando o cálculo da medida de cada subintervalo, para depois identificar a forma genérica de expressar a amplitude dos subintervalos.

A pesquisadora menciona dificuldades observadas na sequência da P2.3, enfrentadas por outra dupla, que tentava generalizar a amplitude Δx para [a, b] com *n* retângulos, explicitadas neste diálogo:

> BRUNO: *Como falo da medida do intervalo de uma forma geral? Eu sei a medida desse subintervalo específico. Para saber a medida de qualquer um é só fazer* $x_i - x_{i-1}$ *como fala na atividade. Mas, professora, como posso falar da medida de qualquer subintervalo, considerando o intervalo* $[a, b]$ *todo, com a quantidade de retângulos sendo variada?* ***Aprendemos muito, mas não sabemos expressar*** *(Mota, 2021, p. 202).*

O estudante Bruno tentou generalizar a medida do subintervalo, buscando uma regra de construção ao variar a quantidade de retângulos. A pesquisadora destaca a dificuldade da representação escrita capturar a complexidade do pensamento matemático.

É possível perceber, nas primeiras tarefas discursivas, como cada dupla manifestou seus conhecimentos. O Quadro 3 apresenta as respostas de duas duplas às tarefas propostas na prática P2.1 – *O que você pode notar a respeito da ocupação física dos retângulos sobre a área do Parque, à medida que aumentamos o número de retângulos?*

Quadro 3: Protocolo das duplas Mariana e Jair, Ítalo e Luiz referente à Situação-Problema em destaque

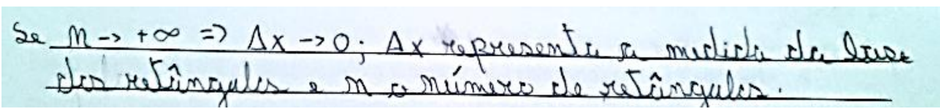
Duplas	Protocolo transcrito
Mariana e Jair	Que ao movimentar o controle deslizante, a ocupação dos retângulos vai diminuindo, obtendo, assim, uma distância menor com mais retângulos nessa área.
Ítalo e Luiz	Ao aumentar o número de retângulos, estes ocupam a área da figura do parque, de forma que a soma das áreas dos retângulos se aproxima da medida da área do parque.

Fonte: Mota (2021, p. 204)

Na análise das respostas das duplas, os estudantes Ítalo e Luiz conseguiram converter corretamente a proposição matemática para o registro de linguagem verbal de maneira adequada. Outras duplas apresentaram respostas semelhantes. Contudo, Mariana e Jair tiveram dificuldades em realizar essa conversão, não conseguindo estabelecer uma linguagem verbal coerente ao descrever a "ocupação dos retângulos", inicialmente afirmando que "a ocupação dos retângulos vai diminuindo", o que indica um obstáculo na transição entre registros de representação semiótica. Posteriormente, eles corrigiram essa interpretação ao afirmar que "cada retângulo representa uma porção da área do Parque" e que "o número de retângulos necessários para cobrir toda a área deve tender ao infinito". A dificuldade de Mariana e Jair pode estar associada à sua competência em transitar entre diferentes registros de representação semiótica, especialmente na conversão das observações feitas no experimento matemático para uma representação formal e simbólica, conforme proposto por Duval. Godino (2017) diz que, para se observar a compreensão pessoal, é preciso analisar as práticas pessoais (significados) estabelecidas, com vistas a entender a relação entre as facetas epistêmicas e cognitivas do conhecimento matemático. Assim, quando se pretende analisar a compreensão de um indivíduo em relação a um dado objeto, as práticas observadas são os indicadores empíricos que permitem efetuar essa avaliação.

Ao analisar os protocolos referentes às respostas da tarefa "O que acontece com a medida da base de cada um dos retângulos quando aumentamos a quantidade total desses?", observou-se que, embora a maioria das duplas tenha respondido corretamente utilizando a linguagem natural, apenas os estudantes Gisele e Bruno recorreram à representação simbólica. Isso evidencia uma afinidade maior com esse registro de representação, demonstrando maior atenção à formalidade da linguagem simbólica usada na Matemática, como destacado no protocolo apresentado na Figura 7.

Figura 7: Protocolo da dupla Gisele e Bruno



Fonte: Mota (2021, p. 205)

As práticas matemáticas realizadas na CD2 tiveram o potencial de estimular a habilidade de fluência da linguagem matemática que os estudantes possuíam, além de impulsionar a revisão ou complementação dessa fluência com representações matemáticas relacionadas à simbolização matemática. Os estudantes realizaram outros processos matemáticos, além da mobilização de representações, como argumentação e comunicação, ampliando suas capacidades no domínio da Matemática.

Quanto à análise *a priori* das práticas da CD3, esperava-se que os estudantes compreendessem que o limite da soma das medidas das áreas dos retângulos aproximantes, quando o número desses tende a infinito, converge para a medida da área A de uma região S que está sob a representação gráfica de uma função contínua f, em um intervalo específico, ou seja: $A = \lim_{n\to\infty} R_n = \lim_{n\to\infty}[f(c_1)\cdot\Delta x + f(c_2)\cdot\Delta x + \cdots + f(c_n)\cdot\Delta x]$. Além disso, esperava-se que eles revisassem que usamos a notação de somatório para escrever somas de muitos termos, como em: $\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\cdot\Delta x = f(c_1)\cdot\Delta x + f(c_2)\cdot\Delta x + \cdots + f(c_n)\cdot\Delta x$ com $c_i \in [a,b]$.

Assim, tomando-se o limite quando as subdivisões tendem a ficar cada vez menores, esperava-se que os estudantes compreendessem que a Integral Definida de uma função integrável pode ser aproximada, com qualquer grau de precisão desejado, por uma Soma de Riemann. Se f for positiva, a Soma de Riemann pode ser interpretada como uma soma de medidas de áreas de retângulos aproximantes, sendo representada, analiticamente por:

$Área = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\cdot\Delta x = \int_a^b f(x)dx$ para f contínua, $f(x) \geq 0$, em $[a,b]$.

A prática P3.2 aborda a apresentação da medida da área sob uma curva como limite de uma soma, o que geralmente é ensinado na disciplina de Cálculo. Esse conceito envolve outros conceitos complexos, como somatório e convergência, que aumentam a sua dificuldade. Na pesquisa, é destacado que a compreensão da definição de Integral Definida se potencializa ao se articularem conhecimentos prévios e se relacionarem os elementos envolvidos, reconhecendo suas funções no processo de definição. Portanto, é desejável que os estudantes sejam expostos a esses elementos gradualmente, coordenando seus conhecimentos prévios.

A prática P3.3 retorna à abordagem da situação-problema e envolve o cálculo proporcional da medida da área do Parque, utilizando medidas encontradas no GeoGebra. Esperava-se que os estudantes realizassem procedimentos da Matemática da Educação Básica, como estabelecimento de uma escala de proporcionalidade entre unidades de medida (centímetros e metros), determinação da proporção entre a razão de comprimento e a razão de medidas de área, e aplicação da regra de três para relacionar as dimensões do mapa do Parque com seu tamanho real.

No estudo conduzido por Mota (2021), os estudantes determinaram a medida da área aproximada do Parque em 12,88 cm², que corresponde a 32.200 m² na escala real. Esse valor foi comparado com a medida da área real do Parque Guimarães Rosa, de 35.000 m², resultando em um erro esperado de 8%[11]. Previa-se o engajamento dos estudantes em processos cognitivos, como enunciação, argumentação, algoritmização, interpretação e representação.

Na análise *a posteriori* das práticas da CD3, ao usar a imagem do Parque, buscou-se despertar a atenção para a modelação com base nos conceitos matemáticos relativos ao cálculo de área, conforme proposto por Dreyfus (1991), que indica utilizar uma estrutura matemática que incorpore as características do objeto, sistema ou processo. Promoveu-se a interpretação geométrica para auxiliar na formação de representações mentais e na tradução dessas representações. Os estudantes sintetizaram e formalizaram conceitos, formularam conjecturas e hipóteses, incitando processos de enunciação, argumentação, institucionalização e comunicação. Algumas duplas tiveram dificuldades, como na compreensão da relação entre a

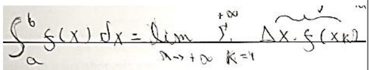
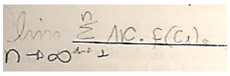
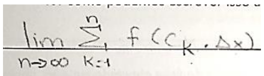
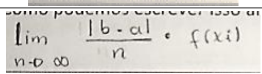
---

[11] A pesquisadora ressalta que a porcentagem de erro encontrada é considerada uma margem de erro grande e justifica, com uma nota informativa inserida na atividade, que, ao longo do tempo, aconteceram invasões de áreas no Parque e, por esse motivo, a sua extensão atual é diferente da extensão original.

amplitude (Δx) dos subintervalos e as medidas das bases dos retângulos, na identificação das medidas das alturas dos retângulos, como sendo o $f(c_i)$, na associação do aumento do número de retângulos à diminuição da medida da área de cada um, no uso da notação para o somatório e na compreensão da definição formal de Integral Definida. Dificuldades com pré-requisitos da Matemática Básica, como mudança de escalas e regra de três, foram observadas, o que foi minimizado pela interação entre os estudantes e pelas reflexões nas experimentações.

Os estudantes relacionaram a medida da área delimitada pela função polinomial e o eixo das abscissas no intervalo [a,b] com o limite do somatório das áreas dos retângulos quando o número tende ao infinito. No entanto, alguns cometeram equívocos ao articular o somatório com o limite ou não utilizar o somatório na forma algébrica solicitada. No Quadro 4, as respostas das duplas mostram a dificuldade em identificar o objeto matemático apropriado para expressar o somatório das medidas das áreas dos retângulos aproximantes na representação geométrica realizada no GeoGebra.

Quadro 4: Protocolos extraídos dos guias de atividades dos estudantes. CD 1.3 da Atividade 1, Unidade 1

Duplas	Respostas apresentadas	Protocolo Transcrito
Gisele e Bruno		$\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} \Delta x . f(x_k)$
Mariana e Jair		$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \Delta x \cdot f(c_i)$
Elba e Franciele		$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{+\infty} f(c_k \cdot \Delta x)$
Ludimila e Túlio		$\lim_{n\to\infty} \Delta x \cdot f(c_i)$
Ítalo e Luiz		$\lim_{n\to\infty} \frac{\lvert b-a \rvert}{n} \cdot f(x_i)$

Fonte: Mota (2021, p. 213)

Observa-se que os estudantes Gisele e Bruno, Mariana e Jair, Elba e Franciele reconheceram a relação entre o limite e o somatório das medidas das áreas dos retângulos, com Gisele e Bruno antecipando a notação da Integral Definida. No entanto, Elba e Franciele cometeram falhas na escrita algébrica. Em contraste, Ludimila e Túlio, Ítalo e Luiz não demonstraram essa relação entre limite e somatório em suas notações na atividade nem em seus diálogos, como relatado pela pesquisadora. Isso sugere que esses estudantes podem não ter compreendido completamente o processo matemático envolvido.

Todas as duplas registraram que o objeto matemático que pode ser utilizado para resumir a notação é a Integral Definida. As duplas Ludimila e Túlio, Ítalo e Luiz apenas registraram a expressão textual "Integral Definida", já as demais escreveram a expressão matemática $\int_a^b f(x)dx$ como resposta a essa tarefa. As cinco duplas resolveram a situação-problema proposta, com aproximações diferentes para a medida da área do Parque.

Em uma análise geral sobre a atividade, foi possível verificar que os estudantes, embora com algumas dificuldades na forma de expressão verbal ou simbólica, alternaram e interpretaram de forma satisfatória as representações, o que evidencia um possível aprimoramento na compreensão conceitual sobre os temas tratados.

6 Considerações Finais

A situação-problema proposta facilitou a mobilização dos conhecimentos sobre a Integral Definida, promovendo a compreensão de conceitos, definições e procedimentos pelos estudantes, além de permitir a elaboração de argumentos convincentes e corretos. O desenvolvimento das práticas possibilitou um aprimoramento na abordagem dos conceitos. O desenho da situação-problema, com as trajetórias didáticas implícitas, propiciou reflexões essenciais para o aprofundamento dos conceitos em estudo.

Além disso, a situação-problema proposta, que compôs a proposta didática desenvolvida em Mota (2021), trouxe contribuições que transcendem o ensino e a aprendizagem da Integral Definida. Implicitamente, os acadêmicos da Licenciatura em Matemática puderam verificar que o formato das atividades pode ser adaptado e aplicado para estudantes em qualquer nível de ensino, ajustando-se ao conteúdo matemático a ser trabalhado. Destacam-se, no desenho utilizado, o envolvimento de contextos reais, a interdisciplinaridade e a realização de práticas experimentais com o suporte de tecnologias digitais.

O sistema de práticas, mobilizado pela resolução da situação-problema, movimentou um conjunto de funções semióticas para o aprimoramento das definições acerca da Integral Definida, como o limite de uma Soma de Riemann, abordando aspectos algébricos, geométricos e analíticos. As sessões de *feedback* e institucionalização, realizadas com os estudantes, tornaram possível aproveitar algumas respostas para gerar discussões produtivas sobre a Integral Definida. Os estudantes enfrentaram obstáculos, principalmente relacionados à escrita e interpretação da simbologia matemática, que estão relacionados à mudança de representações e à interpretação geométrica. Esses desafios foram atenuados pelo uso do *software* GeoGebra.

As diversas representações – verbal, algébrica, geométrica, computacional – utilizadas na atividade incentivaram os estudantes a se expressarem matematicamente e a fazerem interpretações matemáticas. Assim, foi evidenciada a importância da linguagem e da fluência matemática e suas representações. Esses diversos modos de representação das práticas matemáticas apoiaram a mobilização dos processos matemáticos, a argumentação e a comunicação sobre os conceitos, as definições e as propriedades manipulados. Uma das principais dificuldades enfrentadas pelos estudantes foi a compreensão da Integral Definida como limite de somas infinitesimais. O trabalho com os limites e com os somatórios revelou entraves cognitivos pelos estudantes.

Pela análise dos dados da pesquisa, foi possível verificar que os estudantes, embora com algumas dificuldades, apropriaram-se de conhecimentos e desenvolveram competências, ou seja, os significados pessoais manifestados estão em suas zonas de desenvolvimento proximal.

Também ficou evidenciado o uso de manipulações com elementos linguísticos. Houve uma identificação argumentada da expressão analítica relacionada à Integral Definida, como uma Soma de Riemann, $\int_a^b f(x)dx = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i) \cdot \Delta x$. Ao longo do desenvolvimento das atividades, por meio da participação discursiva nas sessões de *feedback* e institucionalização, pôde-se observar uma familiaridade dos estudantes com os objetos primários que emergiram das práticas. Assim, foi considerado que o sistema de práticas promovido, a partir da resolução da situação-problema proposta alcançou os significados pessoais dos estudantes.

Foi possível revelar, ainda, alguns conflitos semióticos dos estudantes no que refere aos objetos matemáticos presentes na definição da Integral Definida, conforme exposto nas análises *a posteriori* de cada atividade. No entanto, evidenciou-se que eles chegaram a uma compreensão favorável à definição estudada, de forma que as dificuldades foram gerenciadas pelas interações entre si, com a atividade proposta e com o *software* utilizado.

Em relação aos aspectos afetivos, o objetivo foi avaliar o grau de interesse ou motivação dos colaboradores da pesquisa em relação ao processo de estudo. As atitudes e motivações positivas dos estudantes foram salientadas nos encontros ocorridos, em que foi percebido que a utilização de situações-problema em contextos reais os fez sentir motivados a realizar as atividades e como utilizar as tecnologias digitais. Vale ressaltar que alguns estudantes comentaram que, em princípio, tiveram dificuldade em se expressar por escrito, mas, à medida que progrediam nas atividades, sentiam que estavam se saindo cada vez melhor.

Isso posto, em relação ao processo de construção da compreensão da Integral Definida, pode-se dizer que os significados construídos responderam ao que era esperado, pelo menos em um nível aceitável. Foi perceptível que os recursos tecnológicos contribuíram para a autonomia dos estudantes na resolução das atividades propostas, sendo o GeoGebra suporte no desenvolvimento dos processos cognitivos deles.

Referências

Artigue, M. (1991). Analysis. In D. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 167-198). Kluwer Academic Publishers.

Dreyfus, T. (1991). Advanced mathematical thinking processes. D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 25-41). Kluwer Academic Publishers.

Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. In *Annales de 5º Didactiques et de Sciences Cognitives*. (pp. 37-65). Strasbourg.

Duval, R. (2009). *Semiósis e pensamento humano: Registros semióticos e aprendizagens intelectuais.* (L. F. Levy & M. R. A. Silveira, Trads.). Livraria da Física.

Figueiredo, E. B., Siple, I. Z., Longen, L. G. & Boeing, F. K. (2013). Integral Definida: um recurso tecnológico para o professor. In *Actas* do 7º *Congresso Internacional de Ensino de Matemática* (p. 6579-6589). Canoas, RS.

Font, V. (2011). Competencias profesionales en la formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria. *Unión - Revista Iberoamericana de Educación Matemática,* 7(26).

Godino, J. D. (2011). Indicadores de idoneidad didáctica de procesos de enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas. In *Actas del 13ª Conferencia Interamericana de Educación Matemática*. (p. 1-20). Recife, PE.

Godino, J. D. (2009, Dec.). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de Matemáticas. *Unión*, 5(20), 13-31.

Godino, J. D. (2017). Construyendo un sistema modular e inclusivo de herramientas teóricas para la Educación Matemática. In *Actas del 2º Congreso International Virtual Sobre El Enfoque Ontosemiótico Del Conocimiento y La Instrucción Matemáticos*. pp. 1-20. Granada.

Godino, J. D., Batanero, C., Contreras, A., Estepa, A., Lacasta, E., & Wilhelmi, M. R. (2013). Didactic engineering as design-based research in Mathematics Education. In Proceedings of 8th *Congress of the European Society for Research in Mathematics Education.* Manavgat-Side.

Godino, J. D. (2012). Origen y aportaciones de la perspectiva ontosemiótica de investigación en Didáctica de la Matemática. *In Actas del 16º Simposio de La Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática*. (pp. 49-68). Jaén.

Godino, J., Rivas, H., Arteaga, P., Lasa, A., & Wilhelmi, M. R. (2014). Ingeniería didáctica basada en el enfoque ontologico semiótico del conocimento y de la intrucción matemáticos. *Recherches En Didactique Des Mathématiques*, *34*(2–3), 167–200.

Godino, J. D., Batanero, C., & Font, V. (2008). Um enfoque onto-semiótico do conhecimento e a instrução matemática. (E. Crisostomo, Trad.). *Acta Scientiae*, 10(2), 7-37.

Melo, J. (2002). *Conceito de Integral: Uma proposta computacional para seu ensino e aprendizagem.* Tese (Doutorado). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo, SP.

Mota, J. F., Abar, C. A. A. P. (2020). Uma proposta de articulação entre teoria e prática no estudo da integral definida. *Revista Produção Discente Educação Matemática*, 9(2), 12-24.

Mota, J. F. (2021). *Um estudo ontossemiótico sobre os conhecimentos didático-matemáticos de aplicações da Integral Definida com estudantes de Matemática.* 2021. Tese (Doutorado em Educação Matemática). Pontifícia Universidade Católica de São Paulo. São Paulo, SP.

Mota, J. F. (2023). Análise de abordagens à Integral Definida em pesquisas brasileiras. *Revista de Ensino de Ciências e Matemática*, 14 (3), 1–24, 2023. 10.26843/rencima. v14n3a08.

Pino-Fan, L.R., Godino, J. D., Font, V. (2013, Jul.-Dec.). Desenho e aplicação de um instrumento para explorar a faceta epistêmica do conhecimento didático-matemático de futuros professores sobre a derivada (Primeira Parte). *Revemat*, 8(2), 1-49.

Pino-Fan, L. R., Godino, J.D. (2015). Perspectiva ampliada del conocimiento didáctico-matemático del profesor. *Paradigma*, XXXVI (1), 87– 109.

Turégano, P. (1998, May/Aug.). Del área a la Integral. Un estudio en el contexto educativo. *Enseñanza de las Ciencias*, 16 (2), 233-249.